Math. P. 715 d

<36613586370014

<36613586370014

Bayer. Staatsbibliothek

Die

Differential- und Integralrechnung

und deren

Anwendung auf die Geometrie in der Ebene.

Von

Dr. Edmund Külp,
Professor der Physik und Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt.

Bayerische Staatsbibliothek München

Mit 6 lithographirten Tafeln.

BIBLIOTHEK DER K. B. KRIEGS-AKADEMIE

K. B. CADETTEN CORPS BIBLIOTHEK

Darmstadt.
Verlag und Eigenthum von Ernst Kern.
1856.

g. or. 343 1

Math. p. 715 a 2

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Bayerische Staatsbibliothek München

G

242

Inhaltsverzeichniß.

Erste Abtheilung. (Erstes Kapitel.)

Differentiation der Functionen von einer und mehreren Veränderlichen.

Seite

I. Functionen im Allgemeinen. Derivirte Functionen und Differentiale . . . 1

II. Differentiation der Functionen einer Veränderlichen . . . 10

III. Derivirte Functionen und Differentiale der höheren Ordnungen . . . 30

IV. Anwendung der Differentialrechnung auf verschiedene analytische Aufgaben, in denen nur eine unabhängige Veränderliche vorkommt . . . 57

1) Untersuchung der unter einer unbestimmten Form erscheinenden Ausdrücke . . . 57

2) Maxima und Minima der Functionen einer Veränderlichen . . . 64

3) Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe . . . 74

4) Die Maclaurin'sche und Taylor'sche Reihe für eine imaginäre Veränderliche . . . 84

V. Differentiale imaginärer Functionen und der Cauchy'sche Satz in Bezug auf die Gültigkeit der Maclaurin'schen Reihe . . . 88

VI. Differentiation der Functionen von mehreren Veränderlichen . . . 111

VII. Differentiale höherer Ordnungen für die Functionen von mehreren Veränderlichen . . . 116

		Seite
VIII.	Anwendung der Differentialrechnung auf verschiedene analytische Aufgaben, welche mehrere unabhängige Veränderliche enthalten	131
	1) Die unbestimmten Formen der Functionen von mehreren Veränderlichen	131
	2) Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen	133
	3) Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Formel für die Functionen mehreren Veränderlichen	151
	4) Das Lagrange'sche Theorem	154

Zweite Abtheilung. (Zweites Kapitel.)

Integration der expliciten Functionen von einer Veränderlichen.

I.	Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integralrechnung	161
II.	Integration der algebraischen Differentiale	180
III.	Integration der transcendenten Differentiale	207
	1) Differentiale mit Logarithmen und Exponentialgrößen	207
	2) Goniometrische und cyclometrische Differentiale	212
	3) Transcendente Exponentialintegrale	227
	4) Transcendente goniometrische Integrale	234
IV.	Bestimmte Integrale	239
	1) Eigenschaften und Werthermittelungen bestimmter Integrale	239
	2) Allgemeine bestimmte Integrale	248
	3) Specielle bestimmte Integrale	259
	4) Transformationen und Convergenz bestimmter Integrale	284
V.	Die Euler'schen Integrale	295
VI.	Die periodischen Functionen	322
VII.	Fourier'schen Integrale	335
VIII.	Die elliptischen Functionen	348

Dritte Abtheilung. (Drittes Kapitel.)

Anwendungen auf die Geometrie in der Ebene.

I.	Berührung ebener Curven	385
	1) Von den Tangenten und Normalen	385
	2) Von den Asymptoten	396
	3) Von der Berührung der verschiedenen Ordnungen	401
	4) Gebrauch der Polarcoordinaten	405

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Vorrede.

Seit dem Jahre 1836, in welchem die hiesige höhere Gewerbschule errichtet wurde, hatte ich unter anderen Zweigen der Mathematik auch die Grundzüge des höheren Calcüls jährlich vorzutragen. Bei diesem Unterrichte legte ich zum Grunde anfänglich Boucharlat's Differential- und Integralrechnung und einige Jahre später meine Bearbeitung des hierhergehörigen Theils des vollständigen Lehrcursus der reinen Mathematik von Francoeur. Was nun bei dem ersten der genanten Lehrbücher vorgekommen war, das ereignete sich mehr oder minder ebenfalls bei dem zweiten: in allen Stücken nämlich konnte das Buch mich nicht befriedigen, wiewohl ich vielleicht eher als mancher Andere zuzugeben bereit bin, daß darin verschiedene Partieen recht gut behandelt sind. Namentlich konnte mir nicht zusagen, daß Francoeur, wie es Lagrange in seiner Theorie der analytischen Functionen schon gethan, den Taylor'schen Lehrsatz von vornherein an die Spitze stellte und denselben als Ausgangspunkt wählte, um so aus der fernerliegenden Betrachtung der Reiheentwickelungen die Grundbegriffe der Differentialrechnung herzuleiten. Denn streng genommen ist der Taylor'sche Satz oder die Entwickelung der Functionen in Reihen eigentlich weiter nichts als ein specieller Fall von den

mannigfaltigen und ausgedehnten Anwendungen der Differentialrechnung. Es liegt darum ganz in der Natur der Dinge, die Principien dieses Zweiges der Analysis unabhängig von jenem Satze aufzustellen und auseinander zu setzen.

Der Grundbegriff der Differentialrechnung ist aber der Begriff der Grenze, auf welchen wir bei unseren Schlüssen und Betrachtungen in diesem Theil der Mathematik doch immer in letzter Instanz zurückzukehren genöthigt sind. Auch haben die beiden unsterblichen Männer, von denen Jedem ein gleiches Recht an dieser denkwürdigen Erfindung zukommt, den Begriff der Grenze und der daraus fließenden Folgerungen klar erfaßt und deutlich ausgesprochen. Newton's Methode der Fluxionen und Leibnitz's Ideen über das unendlich Kleine laufen auf ein und dasselbe hinaus; das Gesetz der Stetigkeit bei der Veränderung der Größen auszudrücken ist ihr gemeinsames Ziel; beide Theorien ergänzen und unterstützen einander vollkommen, übereinstimmendes Licht gegenseitig einander zusendend.

Wie gesagt, ist die gesammte Differentialrechnung im Grunde nichts anders, als die Entwickelung dieses Begriffes der Grenze und der daraus resultirenden Folgerungen. Deswegen war Lagrange, der diesen Calcül auf anderweitige Weise zu begründen suchte und denselben auf eine bloße Anwendung der Regeln der gewöhnlichen Algebra zurückzuführen strebte, häufig nicht im Stande jenen Begriff der Grenze oder einen gleichbedeutenden Begriff gänzlich zu umgehen. Wir sehen dies zu verschiedenenmalen recht deutlich in seiner Theorie der analytischen Functionen, wo bei der Rectification der Curven und der Quadratur der krummen Flächen, bei der Darstellung der ungleichförmig zu- oder abnehmenden Geschwindigkeit und bei der Bestimmung des Ausdruckes für die Intensität einer veränderlichen continuirlichen Kraft der große Mann durch

die Natur des Gegenstandes und die Gesetze des Denkvermögens aufgefordert wird, den Hülfsbegriff der Grenze einzuführen, den die rein algebraische Entwickelung nicht zu ersetzen vermag.

Wie sehr übrigens in didactischer Beziehung es wünschenswerth ist, die Lagrange'sche Begründungsart der höheren Analysis zu verlassen und zu der ursprünglichen, natürlichen Betrachtungsweise zurückzukehren, das habe ich öfters Gelegenheit gehabt wahrzunehmen. Wurde nämlich nach Francoeur's Lehrbuch die Differentialrechnung mit den Schülern durchgenommen, so konnten nach einiger Zeit die Meisten derselben recht fertig differentiiren, wußten auch in der Integralrechnung mit einiger Gewandtheit sich zu bewegen; mehr oder weniger war ihnen jedoch das wahre Wesen der Wissenschaft fremd und unenthüllt geblieben; was sofort zu Tage kam, wenn man schwierigere Partieen zu betrachten hatte, wie die Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen, die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe, die Lagrange'sche Umkehrungsformel, die Theorie der besonderen Auflösungen. Nicht so bei den Schülern, mit denen der andere Weg eingeschlagen war. Diese hatten gewöhnlich klarere Vorstellungen und richtigere Ansichten von dem eigentlichen Wesen der Wissenschaft als die Ersteren, waren zuweilen sogar im Stande, über diese oder jene Aufgabe einige neue Aufschlüsse zu ertheilen, welche man von den Anderen zu erhalten vergebens sich bemüht hatte. Was uns aber insbesondere Interesse und ein inniges Vergnügen gewährte, war die jugendliche Begeisterung, mit welcher wir die Schüler der Wissenschaft sich hingeben sahen, in der sie so ziemlich in's Reine gekommen waren, und zu der sie sobald Zutrauen gefaßt hatten, während wir diese freudige Hingebung bei Denjenigen nicht finden konnten, welche zu keiner so völlig klaren Einsicht der Sache zu gelangen vermochten. Es war uns dies ein deutlicher Fingerzeig, daß

wir die Wissenschaft nach den ihr inwohnenden und von ihr selber geforderten Gesetzen zu betreiben haben, wenn wir in der Schule allen Ernstes voranzukommen Willens sind.

An die Differentialrechnung von Francoeur mich fernerhin nicht mehr zu binden und dafür einen anderen angemessenen gründlich abgefaßten gedruckten Leitfaden in die Hände meiner Schüler zu legen, hatte ich somit hinreichend Ursache. Dem wiederholt ausgesprochenen Wunsche derselben, wo möglich die über diesen Zweig der Mathematik von mir ausgearbeiteten Hefte ihnen zu überlassen, geschieht theilweise hiermit Genüge, indem ich die Differential- und Integralrechnung sammt deren Anwendung auf die Geometrie in der Ebene in einem Bande zusammengefaßt dem Drucke übergebe, hoffend, daß Gott mir Kraft und Gesundheit verleihen werde, um die analytische Geometrie im Raum mit Bezugnahme auf die höhere Analysis nebst der Integration der Differentialfunctionen und der Differentialgleichungen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen in einem folgenden Bande zusammengedrängt dereinst dem mathematischen Publikum vorlegen zu können.

So viel über die Entstehung des vorliegenden Buches. Was nun die Bearbeitung des Werkes selbst anlangt, so war ich ernstlich bemüht klar und zugleich gründlich zu sein, ohne mich deswegen in zu weit gehende philosophische Untersuchungen zu verlieren. Gleichwie der Geometer an dem Begriffe des Raumes festhält, wie ihn die reine Anschauung ihm darbietet; gleichwie der Mechaniker die Begriffe der Zeit und Kraft auffaßt, wie solche aus einer unmittelbaren Betrachtung der Dinge sich ergeben: ebenso dachte ich, thut der Analytiker gut daran, wenn er sich mit der Idee des Unendlichen und Stetigen zu befassen hat, daß er sich nämlich nicht vergebens

abmüht, die innere Natur dieser Dinge ergründen zu wollen: ihm mag es genügen, daß die Idee des Unendlichen und Stetigen in dem menschlichen Geiste unverkennbar vorhanden ist.

Wenn es einerseits dem Analytiker vergönnt ist, bei dem philosophischen Theile der Wissenschaft weniger sich aufzuhalten; so wird andererseits mit desto größerem Fug und Recht verlangt, daß er auf dem ihm mehr angehörigen Gebiete an dem nöthigen Fleiße und der erforderlichen Sorgfalt es nicht fehlen lasse. In seinem Lehrbuche müssen darum die Gegenstände in einer möglichst natürlichen Ordnung abgehandelt und willkührliche Verknüpfungen so viel als thunlich vermieden werden, damit der Leser den inneren Zusammenhang der vorgeführten Wahrheiten jederzeit klar einsehe und dessen Verstand an den geordneten und geregelten Gedankenverbindungen seine Freude habe. Dieser Anforderung nachzukommen war ich gleichfalls bestrebt, obschon bei dem Gebrauche des Buches der didaktische Gang eine andere Ordnung vorschreiben kann. So z. B. nehme ich nicht den geringsten Anstand nach Erledigung des einen oder des anderen Kapitels rein analytischen Inhalts die betreffenden geometrischen Anwendungen unmittelbar daran zu reihen: die analytischen Prozesse gewinnen auf diese Weise ungemein an Klarheit und Durchsichtigkeit, daß man in der That Unrecht hätte, wenn man sich eines solch trefflichen Mittels berauben wollte. Ebenso übergehe ich beim ersten Unterrichte diesen oder jenen Abschnitt, wie unter Anderem das Cauchy'sche Theorem in Bezug auf die Anwendbarkeit der Maclaurin'schen Reihe und die Lagrange'sche Reversionsformel, um entweder später, wenn der Schüler mit der Wissenschaft vertrauter geworden ist, das Uebergangene nöthigenfalls nachzuholen oder unter Umständen es auch ganz bei Seite liegen zu lassen. Im Buche sind übrigens dergleichen Abschnitte so gestellt, daß der Lehrer in

einer derartigen freieren Bewegung möglichst wenig gehindert ist.

Eine weitere Bedingung, welche bei meiner Arbeit zu erfüllen ich bemüht gewesen bin, war, dieselbe dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft so viel als möglich anzupassen und mit deren neuesten Forderungen in Einklang zu bringen. Ich mußte darum vor allen Dingen die trefflichen Untersuchungen von Cauchy sorgfältig zu Rathe ziehen, die besonders hervortretenden Punkte in dessen Werken als die sichersten Merkzeichen im Auge behalten, nach denen ich meinen Gang einzurichten hatte. Verdanken wir doch hauptsächlich den rastlosen Forschungen und Bemühungen dieses Mannes die wichtigen und einflußreichen Fortschritte, welche in der neueren Zeit, in der mathematischen Analysis gemacht worden sind. Auch ist er es wieder vor allen Anderen, welcher den richtigeren und klareren Vorstellungen und Ansichten über das wahre Wesen der Differentialrechnung den Eingang verschaffte und der einfachen Grenzmethode den Sieg über die gekünstelte Functionenrechnung für immer erringen half.

Indem ich so vorzugsweise Cauchy zu meinem Führer wählte, habe ich jedoch nicht unterlassen die Schriften anderer neuerer Mathematiker wie Navier, Cournot, Grunert und Schlömilch bei der Bearbeitung des Buches zu benutzen. In einem Lehrbuche Alle zu nennen, von welchen die Wissenschaft mit Erfolg bearbeitet worden ist, geht nicht wohl an. Wir denken, daß die von den Wissenschaftsmännern zu Tage gebrachte Wahrheit ein schätzbares Gemeingut der Menschheit ist. Bei solchen Gedanken wissen wir doch zugleich die Gefühle der Dankbarkeit in uns gegen Diejenigen rege zu erhalten, welche ihre beste Thätigkeit auf die Ausbildung der Wissenschaft und Verbreitung des Wahren zusammengezogen haben.

Nach diesen allgemeinen Auseinandersetzungen will ich mir nur ein Paar kurze in's Einzelne gehende Bemerkungen gestatten.

zur Grundlage die Betrachtung der derivirten Function nehmend, von welcher letztern man immer einen bestimmten und deutlichen Begriff hat, wenn man sagt, daß sie die Grenze des Verhältnisses der gleichzeitigen Aenderungen einer Function und ihrer unabhängigen Variabeln ist, ging ich zu den Differentialen über, die ich als unendlich abnehmende Differenzen betrachtete. Die nächste Frage war dann die Differentialquotienten der verschiedenen Functionen auf einfachem und zugleich sicherem Wege zu erhalten. Die Bestimmung der Werthe der drei Ausdrücke

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \frac{\log\ (1+\alpha)}{\alpha}, \quad \frac{\sin\ \alpha}{\alpha}$$

unter der Voraussetzung, daß α fortwährend der Null näher komme, führt uns am schnellsten und zuverlässigsten zum Ziele. Nachdem wir uns mit den Mitteln zur Gewinnung der Differentialquotienten der verschiedenen Functionen bekannt gemacht hatten, lag es uns ob, den zwischen einer Function und ihren Differentialquotienten bestehenden Zusammenhang zu untersuchen. Diesem Zusammenhange, welcher der Kern der gesammten Differential- und Integralrechnung ist, und den aus demselben sich ergebenden Folgerungen und Anwendungen mußte jede mögliche Sorgfalt zugewendet werden; namentlich mußte dies bei dem für die Anwendung so fruchtbaren Theorem von Maclaurin geschehen. Die umständliche Beantwortung der hier in Kürze zusammengestellten Frágen bildet den Gegenstand des ersten Kapitels des Buches.

Der elliptischen Functionen, der Euler'schen und Fourier'schen Integrale wurde in den älteren Elementarlehrbüchern entweder sehr kurz oder gar nicht gedacht. In unserem Buche glaubten wir diese Gegenstände nicht übergehen zu dürfen, da sie theils in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, theils in verschiedenen Zweigen der Physik eine häufige Anwendung finden. In dem zweiten Kapitel des Buches, welches zugleich als Vor-

bereitungsstudium für die Studien der höheren angewandten Mathematik und der mathematischen Physik gelten soll, haben darum die oben genannten Lehren an dem geeigneten Orte ihre Stelle erhalten, ohne gerade dieselbe über die Gebühr auszudehnen.

In den meisten mir bekannten Lehrbüchern werden die verschiedenen Probleme, welche die auf Polarcoordinaten bezogenen krummen Linien angehen, wie Quadratur, Rectification, Osculation dadurch zur Lösung gebracht, daß man die in Bezug auf rechtwinkelige Coordinaten gefundenen Ausdrücke mit Hülfe der Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen auf die durch Polarcoordinaten bestimmten Curven sofort überträgt. In dem dritten Kapitel habe ich am schicklichen Platze die für die letzteren Curven in Frage stehenden Formeln auch auf directem Wege hergeleitet. Ich dachte, daß die genaue Uebereinstimmung der durch ein rein analytisches Verfahren gefundenen Formeln mit den durch eine dem Gegenstande eigenthümlich zukommende geometrische Betrachtungsweise dem Geiste eine gewisse Befriedigung gewähren würde, welche man ihm keineswegs vorenthalten sollte.

Die Integration der Differentialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen Veränderlichen und die Theorie der sogenannten besonderen Auflösungen machen den Inhalt des vierten und letzten Kapitels aus. Obschon derselbe größtentheils meiner Bearbeitung des Francoeur'schen Werkes entlehnt ist, so hat er doch manches Eigenthümliche und Neue. So ist das unterscheidende Merkmal zwischen den besonderen Auflösungen und den besonderen Integralen schärfer bestimmt worden, wie Cauchy gethan hat. Desgleichen sind mehrere neue Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen führen, sammt deren Auflösungen beigefügt worden, einmal, weil dieses Feld insbesondere einer reichen Anwendung fähig ist und dann, weil es vielfältig

Gelegenheit darbietet die richtige Deutung der Analysis in Bezug auf Geometrie zu lernen.

Ueberhaupt habe ich es nicht unterlassen, den einzelnen vorgetragenen Lehren entsprechende Beispiele zur Uebung beizufügen. Denn wollen wir die Mathematik völlig zu unserem Eigenthum machen und diese Wissenschaft aus der Schule in das praktische Berufsleben als treue Gefährtin mitnehmen, so dürfen wir uns mit der alleinigen Kenntniß der Sätze und Theorieen nicht begnügen: das Erkannte muß auch durch die Auflösung von mancherlei Aufgaben tüchtig geübt werden, das Erlernte durch Anwendung und Gebrauch, Festigkeit und Leben erhalten. Die in dem Buch aufgeführten Beispiele sind theils aus meiner Bearbeitung der Differential- und Integralrechnung von Francoeur, theils aus den Werken anderer Schriftsteller, theils aus eigenen Arbeiten ausgewählt. Leser, welche nach einem größeren Vorrath von Beispielen und Aufgaben über die Lehren der höheren Analysis und deren Anwendung verlangen, verweisen wir auf die Beispielsammlungen von Prof. Strauch, Prof. Sohnke, Prof. Rogner und Dr. Schnuse.

Endlich habe ich noch die Sorgfalt dankend anzuerkennen, welche Herr Ph. Waibler und Herr Dr. Zehfuß, zwei ehemalige Schüler von mir, auf die Correctur des Werkes und auf die Ausführung der dazu gehörigen Figurentafel verwendeten. Zur angenehmen Pflicht gereicht es mir hier öffentlich aussprechen zu können, daß der Erste jetzt volle fünf Jahre hindurch mit vielem Erfolg an der hiesigen höheren technischen Lehranstalt den Unterricht in dem Maschinenbau und in der Elementarmechanik besorgt, und der Zweite seit einiger Zeit mit gleichem Erfolge Unterricht in der niederen und höheren Analysis gibt. Namentlich gewährt es mir ein großes Vergnügen an dieser Stelle zu bemerken, daß die in dem Buch aufgenommene Beweisführung des Cauchy'schen Theorems für die Anwendung des Satzes von Maclaurin dem Letzteren der beiden

jungen Männer ganz und gar angehört. — Die alternden, nachlassenden Kräfte durch jugendliche, wachsende Kräfte auf eine bestimmtere und wirksamere Weise als seither an unserer Schule nunmehr in Kürze ersetzt zu sehen, ist mir eine tiefgefühlte Freude, welche sicherlich Jeder einigermaßen theilen wird, der an allem Fortschritt zum Besseren ein Wohlgefallen hat.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Differentiation der Functionen von einer und mehreren Veränderlichen.

		Seite
I.	Functionen im Allgemeinen. Derivirte Functionen und Differentiale .	1
II.	Differentiation der Functionen einer Veränderlichen	10
III.	Derivirte Functionen und Differentiale der höheren Ordnungen . .	30
IV.	Anwendung der Differentialrechnung auf verschiedene analytische Aufgaben, in denen nur eine unabhängige Veränderliche vorkommt .	57
	1) Untersuchung der unter einer unbestimmten Form erscheinenden Ausdrücke	57
	2) Maxima und Minima der Functionen einer Veränderlichen . .	64
	3) Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe	74
	4) Die Maclaurin'sche und Taylor'sche Reihe für eine imaginäre Veränderliche	84
V.	Differentiale imaginärer Functionen und der Cauchy'sche Satz in Bezug auf die Gültigkeit der Maclaurin'schen Reihe	88
VI.	Differentiation der Functionen von mehreren Veränderlichen . .	111
VII.	Differentiale höherer Ordnungen für die Functionen von mehreren Veränderlichen	116
VIII.	Anwendung der Differentialrechnung auf verschiedene analytische Aufgaben, welche mehrere unabhängige Veränderliche enthalten . . .	131
	1) Die unbestimmten Formen der Functionen von mehreren Veränderlichen	131
	2) Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen .	133
	3) Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Formel für die Functionen von mehreren Veränderlichen	151
	4) Das Lagrange'sche Theorem	154

Zweites Kapitel.

Integration der expliciten Function von einer Veränderlichen.

I. Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integralrechnung.
II. Integration der algebraischen Differentiale.
III. Integration der transcendenten Differentiale.
IV. Die bestimmten Integrale.

Drittes Kapitel.

Anwendung auf die Geometrie in der Ebene.

I. Berührung ebener Curven.
II. Krümmung ebener Curven.
III. Besondere Punkte der ebenen Curven.
IV. Flächeninhalt und Bogenlänge der ebenen Curven.

Viertes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen.

I. Integration der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung.
II. Von den besonderen Auflösungen.
III. Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnungen.
IV. Geometrische Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen führen.

Seite

II. Verschiedene Eigenschaften der ebenen Curven 413
1) Der Lauf ebener Curven 413
2) Besondere Punkte ebener Curven 417
3) Differential der Fläche einer Curve 426
4) Differential des Bogens 430
III. Weitere Untersuchungen über ebene Curven 435
1) Krümmung ebener Curven 435
2) Von den Evoluten 447
3) Von den Brennlinien durch Zurückwerfung 457
4) Von den Brennlinien durch Brechung 462
IV. Berechnnng des Flächeninhalts und der Bogenlänge ebener Curven 469
1) Quadratur ebener Curven 469
2) Näherungsweise Quadratur und Quadratur in Polarcoordinaten 476
3) Bogenlänge der ebenen Curven 482
4) Rectificationen mittelst elliptischer Integrale 490

Vierte Abtheilung. (Viertes Kapitel.)

Integration der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen.

I. Integration der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung . 497
1) Unmittelbare Integration. — Trennung der Veränderlichen . 497
2) Integration einiger der merkwürdigeren Differentialgleichungen der ersten Ordnung 507
3) Vom integrirenden Factor 515
4) Differentialgleichungen mit höheren Potenzen der Differentiale . 524
II. Integration der Differentialgleichungen der höheren Ordnungen . 530
1) Allgemeine Principien 530
2) Integration der einfachsten Differentialgleichungen von der zweiten und von höherer Ordnung 535
3) Integration der linearen Differentialgleichungen . . . 547
4) Integration nicht linearer Differentialgleichungen . . . 570
III. Von der Integration der Differentialgleichungen durch Reihen und bestimmte Integrale und von den singulären Integralen . . 590
1) Integration der Differentialgleichungen durch Reihen . . 590
2) Integration der Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale 599
3) Singuläre Integrale der Differentialgleichungen der ersten Ordnung 609
4) Singuläre Integrale der Differentialgleichungen höherer Ordnung 624
IV. Geometrische Anwendungen der Integration der Differentialgleichungen mit zwei veränderlichen Größen 644

Sei

1) Von den ebenen Umhüllungslinien 64

2) Von den Trajectorien ebener Curven 65

3) Verschiedene Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen erster Ordnung führen 65

4) Verschiedene Aufgaben, bei denen man auf Differentialgleichungen höherer Ordnung gelangt 66

Erstes Kapitel.

Differentiation der Functionen von einer und mehreren Veränderlichen.

I. Functionen im Allgemeinen. Derivirte Functionen und Differentiale.

§. 1. **Functionen.** Wenn zwei veränderliche Größen vermöge einer zwischen ihnen bestehenden Gleichung so von einander abhängen, daß die Aenderung der Einen die Aenderung der Andern zur Folge hat; so nennen wir die eine Größe eine Function der Andern. Von den beiden veränderlichen Größen wird Diejenige, deren Bestimmung willkürlich ist, die unabhängige Veränderliche genannt, während die Andere, deren Werth sich dann aus der vorliegenden Gleichung ergibt, die abhängige Veränderliche heißt. In der Folge soll, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt wird, die unabhängige Veränderliche durch x und die abhängige Veränderliche durch y dargestellt werden. Im Allgemeinen bedient man sich der Bezeichnung $y = f(x)$, oder $y = F(x)$, oder $y = \varphi(x)$, oder $y = \psi(x)$, u. s. w., um auszudrücken, daß die Größe y eine Function der Größe x ist. Die Buchstaben f, F, φ, ψ und ähnliche heißen, wenn von ihnen ein derartiger Gebrauch gemacht wird, Functionszeichen; dieselben müssen verschieden von einander sein, wenn sie Functionen angehören, welche hinsichtlich ihrer Form von einander unterschieden sind.

Die Function wird eine algebraische genannt, wenn die darin vorkommenden veränderlichen Größen bloß algebraischen Operationen unterworfen sind, worunter man die Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenzerhebung und die Wurzelausziehung versteht. Die algebraischen Functionen werden ihrerseits wieder in ganze, gebrochene, rationale und irrationale unterschieden. Dergleichen Functionen sind beziehungsweise folgende:

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

$$y = ax^2 + bx + c;\ y = \frac{x^3 - 3ax^2 + bx + c}{2ax^2 - b};$$

$$y = a + \sqrt{b^2 - x^2};\ y = \frac{x^4 - 4a\sqrt{x} - 3b\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{x} - c\sqrt[4]{x^3}},$$

wo die Buchstaben a, b, c beständige Größe bedeuten.

Dagegen heißt jede Function eine transcendente, in welcher irgend eine der veränderlichen Größen einer transcendenten Operation unterworfen ist. Mit diesem Namen werden alle übrigen analytischen Operationen bezeichnet, die nicht unter den vorhin genannten algebraischen enthalten sind. Die einfachen transcendenten Functionen einer veränderlichen Größe sind die folgenden vier: $y = a^x$; $y = \log x$; $y = \sin x$; $y = \text{arc}(\sin = x)$ oder nach einer andern Schreibart $y = \text{arc}\sin x$. Die Erste, wo a eine Constante darstellt, heißt Exponentialfunction; die Zweite eine logarithmische Function für eine beliebige Basis; die Dritte, in welcher x den Sinus des veränderlichen Bogens in einem Kreise bezeichnet, dessen Halbmesser der Einheit gleich ist, heißt goniometrische Function; die Vierte endlich ist eine sogenannte cyclometrische Function und stellt den Kreisbogen dar, dessen Sinus die veränderliche Größe ist, für einen mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreis. Zu der Klasse der goniometrischen Functionen gehören auch die Functionen $\cos x$, $\text{tang}\, x$ und ähnliche; zu jener der cyclometrischen die Functionen $\text{arc}(\cos = x)$, $\text{arc}(\text{tang} = x)$ und andere ähnlicher Art.

Außerdem werden die mathematischen Functionen in entwickelte (explicite) und unentwickelte (implicite) unterschieden. Die entwickelten sind Diejenigen, bei welchen die zwischen der Function und der unabhängig veränderlichen Größe bestehende Gleichung auf die Form $y = f(x)$ gebracht ist. Unter unentwickelten Functionen hingegen versteht man solche, bei denen die Function y auf irgend welche Weise mit der Veränderlichen x noch verknüpft in einer Gleichung vorkommt. So z. B. ist die Function y, welche durch eine der Gleichungen:

$$yx^3 - ax^2y^2 - bxy + c = o;\ a^xy - y^2x^3 + bx = o;$$
$$yx + a = \log x;\ \sin y = y\cos x,$$

bestimmt wird, eine unentwickelte Function von x. Ein derartiger zwischen der unabhängig Veränderlichen x und der Function y stattfindender Zusammenhang wird durch eine Gleichung von der Form: $F(x, y) = o$ ausgedrückt.

§. 2. **Derivirte Functionen.** Eine der bemerkenswerthesten Fragen, welche man sich bei der Untersuchung über die Beschaffenheit

einer gegebenen Function $y = f(x)$ vorlegen kann, ist die Frage über den Grad der Schnelligkeit, mit welcher die Function sich ändert, im Vergleich zu der Aenderung der unabhängigen Veränderlichen. Um die Ideen mehr zu fixiren, wollen wir vorerst die besondere Gleichung

$$y = ax^3 + bx^2 + c$$

ins Auge fassen. Man denke sich in derselben dem x einen bestimmten Werth beigelegt, welchem ein ebenfalls bestimmter Werth von y zugehört. Alsdann lasse man, von gedachtem Werthe ausgehend, x um eine beliebige Größe $\varDelta x$ wachsen, wo der Buchstabe $\varDelta$ nur ein Zeichen und keine Größe ist. In Folge dieses Zuwachses $\varDelta x$ wird die Function y sich um eine gewisse Größe ändern, welche entsprechend durch $\varDelta y$ dargestellt werden mag. Man hat hiernach

$$y + \varDelta y = a(x + \varDelta x)^3 + b(x + \varDelta x)^2 + c;$$

oder nach geschehener Entwickelung und nach Abzug der Gleichung:

$$y = ax^3 + bx^2 + c,$$

das Resultat:

$$\varDelta y = (3ax^2 + 2bx)\varDelta x + (3ax + b)\varDelta x^2 + a\varDelta x^3.$$

Daraus ergibt sich für das Verhältniß $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ der Aenderung der Function zu derjenigen der unabhängigen Veränderlichen der Ausdruck:

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = (3ax^2 + 2bx) + (3ax + b)\varDelta x + a\varDelta x^2.$$

Dieser Ausdruck besteht, wie wir sehen, aus zwei Theilen, wovon der eine von dem besonderen Werthe des Zuwachses $\varDelta x$ unabhängig, der andere aber von demselben abhängig ist. Lassen wir nun $\varDelta x$ ohne Aufhören abnehmen und der Null immer näher rücken, so wird sich der Werth des Verhältnisses $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ dem von dem besonderen Werthe des Zuwachses $\varDelta x$ unabhängigen Theile stets nähern, welcher sonach die Grenze jenes Verhältnisses ist.

Betrachten wir noch die besondere Function $y = \frac{a}{x}$. Man erhält auf ähnliche Weise für dieselbe: $y + \varDelta y = \frac{a}{x + \varDelta x}$; woraus

$$\varDelta y = \frac{a}{x + \varDelta x} - \frac{a}{x} = -\frac{a\varDelta x}{x^2 + x\varDelta x},$$

wenn man auf der rechten Seite der Gleichung die Glieder auf einerlei Benennung bringt. Man erhält daraus:

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = -\frac{a}{x^2 + x\varDelta x}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{x^2} + \frac{a\Delta x}{x^3 + x^2\Delta x},$$

indem man die auf der zweiten Seite der Gleichung angezeigte Division zum Theil ausführt. Die Größe $-\frac{a}{x^2}$ ist also hier die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, d. h. der Werth, welchem sich dieses Verhältniß desto mehr nähert, je kleiner Δx angenommen wird. Das negative Zeichen, mit welchem im vorliegenden Falle die Grenze des in Frage stehenden Verhältnisses behaftet ist, weist darauf hin, daß die Zunahme von x eine Abnahme von y nach sich zieht, was hier leicht vorauszusehen war.

Versuchen wir das bei den hier betrachteten zwei speciellen Functionen eingehaltene Verfahren zu verallgemeinern und auf irgend eine andere beliebige Function $y = f(x)$ anzuwenden. Wir hätten also mit der betreffenden Function drei verschiedene Geschäfte des Calculs vorzunehmen: nämlich zuvörderst der unabhängigen Veränderlichen x einen Zuwachs Δx zu ertheilen; hierauf die dadurch entstandene Aenderung der Function durch den Zuwachs der unabhängigen Veränderlichen zu dividiren; und endlich zur Grenze des daraus hervorgegangenen Verhältnisses bei dem unausgesetzten Kleinerwerden gedachten Zuwachses überzugehen. In der mathematischen Zeichensprache ausgedrückt, führt uns das eingehaltene Verfahren auf folgende Gleichungen:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

wenn wir den Grenzwerth durch die vorgeschriebene Silbe lim bezeichnen und mit Lagrange durch $f'(x)$ die auf solche Weise gewonnene Function darstellen. Diese aus der vorgelegten Function hergeleitete Function wird das Gepräge derselben an sich tragen nnd ihr allein zukommen: da sie durch bestimmte Operationen aus der ursprünglichen (primitiven) Function hervorgeht, so wird sie die abgeleitete (derivirte) Function genannt. Diese Function wird auch durch y' dargestellt.

Ist nun $f(x)$ eine lineare Function, d. h. ist $y = ax + b$, so bekommt man $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$. Daraus folgt, daß in diesem Falle gleichen Aenderungen von x auch gleiche Aenderungen von y entsprechen und

daß die Letzteren der Größe a proportional sind; diese Zahl wird mithin das natürliche Maß für die Schnelligkeit abgeben, mit welcher sich die Function y im Vergleich zu der gleichförmigen Aenderung der unabhängigen Veränderlichen x ändert. Ist jedoch $y = f(x)$ keine lineare Function, so ziehen gleiche Veränderungen von x keine gleiche Veränderungen von y mehr nach sich. An den verschiedenen, durch die speciellen Werthe von x bestimmten Stellen ändert sich dann die Function mit verschiedenen Schnelligkeiten. Die in Folge des der unabhängigen Veränderlichen x ertheilten Zuwachses Δx entstandene Aenderung Δy der Function y wird daher einerseits von dem besonderen Werthe der Veränderlichen x und anderseits von der Größe des Betrags, welcher dem Zuwachse Δx beigelegt worden ist, abhängig sein. Läßt man nun den Zuwachs Δx, mithin auch die dazu gehörige Aenderung Δy beständig abnehmen und der Null stets näher kommen, so wird sich das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gedachter Aenderungen im Allgemeinen einem endlichen und bestimmten Grenzwerthe nähern; oder mit anderen Worten, die Aenderungen der Function von einem bestimmten Werthe aus werden den entsprechenden Aenderungen der unabhängigen Veränderlichen mehr und mehr proportional werden, in dem Maße diese Aenderungen kleiner werden. Der Grenzwerth des in Frage stehenden Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird daher als das wahre Maß der oben zur Sprache gebrachten Eigenthümlichkeit angesehen werden müssen, nämlich als das Maß der Schnelligkeit, mit welcher die ursprüngliche Function $y = f(x)$ zu- oder abnimmt, wenn die unabhängige Veränderliche eine Aenderung erleidet.

§. 3. **Unendlich kleine Größen.** In den vorhin angestellten Betrachtungen haben wir den Zuwachs Δx der unabhängigen Veränderlichen unausgesetzt abnehmen lassen, oder demselben einen unbestimmten Werth beigelegt, der kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl werden kann. Dieser ohne Ende gegen Null convergirende Zuwachs Δx wird eine *unendlich kleine* Größe genannt. Die correspondirende Aenderung Δy hat dann im Allgemeinen ebenfalls einen unbestimmten Werth, der kleiner als jede gegebene kleine Größe werden kann, d. h. einen unendlich kleinen Werth, welcher jedoch zu dem unendlich kleinen Zuwachs Δx in einem bestimmten Verhältnisse steht. Von diesem Verhältnisse sagen wir nun, daß es sich einer gewissen Grenze nähert, je kleiner Δx angenommen wird, und derselben so nahe gebracht werden kann, als man nur immer will.

Die Aenderungen Δx und Δy werden im Allgemeinen die Differenzen der Veränderlichen x und der Function y genannt. Wenn aber diese Differenzen als unendlich kleine Größen angesehen werden, so heißen sie Differentiale der Veränderlichen x und y. Leibnitz wendet zur Bezeichnung der Differentiale den Buchstaben d an, und schreibt dx und dy. Die Grenze, welcher das Verhältniß oder der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differenzen bei dem steten Abnehmen von Δx sich ohne Ende nähert, wird so mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, und heißt das Differentialverhältniß oder der Differentialquotient. Die Art der Entstehung dieses Quotienten wird durch die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ausgedrückt.

Differentialquotient und derivirte Function bilden mithin zwei verschiedene Ansichten für eine und dieselbe Sache. Der Differentialquotient ist nämlich die im Einzelnen angedeutete Grenze des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differenzen, während die derivirte Function $f'(x)$ der thatsächlich bestimmte Werth jener Grenze ist. Auf der linken Seite der Gleichung

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x)$$

ist so zu sagen angegeben, welche Operationen man auszuführen hat, während auf der rechten Seite das Resultat enthalten ist, welches man nach Vollendung jener Operationen bekommt.

Kurz von einer Gleichung wie:

$$\frac{d\,(ax^2 + bx)}{dx} = 2ax + b$$

werden wir einmal sagen: das Verhältniß zwischen dem Zuwachse von x und der dadurch entstandenen Aenderung von $ax^2 + bx$ nähert sich bei unausgesetztem Abnehmen dieser Aenderungen gegen die Grenze $2ax + b$ bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit hin. Von dieser Gleichung werden wir weiter sagen: Die Aenderung der Größe $ax^2 + bx$ wird dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen der Aenderung der unabhängigen Veränderlichen haben, je nachdem die Grenze $2ax + b$ positiv oder negativ ausfällt, in welchem ersteren Falle die Größe $ax + b$ im Zunehmen, im anderen dagegen im Abnehmen begriffen ist.

§. 4. **Differentialquotient.** Statt den Werth des Differentialquotienten mit Hülfe der derivirten Function anzugeben, bedient man sich häufig einer sogenannten Differentialgleichung unter folgender Form:

$$dy = y' dx, \text{ oder } dy = f'(x)\, dx, \text{ oder } dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

in welcher letzteren Gleichung man nicht vergessen darf, daß $\frac{dy}{dx}$ den angedeuteten Grenzwerth des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ darstellt. Man hat also den zwischen dem Multiplicanden dx und dem Divisor obwaltenden Unterschied wohl in Acht zu nehmen. In Folge der Differentialgleichung sagt man: Das Differential der Function ist gleich dem Differential der unabhängigen Veränderlichen x multiplicirt mit dem Grenzwerthe $\frac{dy}{dx}$ des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der correspondirenden Aenderungen der beiden Veränderlichen. Der Grenzwerth $\frac{dy}{dx}$, welcher in der Differentialgleichung als Coefficient erscheint, wird deßhalb auch Differentialcoefficient genannt.

In der Differentialgleichung liegt eine wichtige Eigenschaft der dem Gesetz der Stetigkeit genügenden mathematischen Functionen zu Tage, eine Eigenschaft, der vorhin schon gelegentlich Erwähnung geschehen ist, nämlich die, daß die Aenderungen der abhängigen Veränderlichen denen der unabhängigen Variabeln fast proportional sind, wenn gedachte Aenderungen hinlänglich klein angenommen werden. Dieses Princip kommt schon bei dem Gebrauch der Proportionaltheile der Logarithmentafeln in Anwendung. Um es mehr hervorzuheben, wollen wir die algebraische Function:

$$y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$$

als besonderes Beispiel wählen.

Wir erhalten daraus:

		Differenzen Δy
für $x = 1$, den Werth	$y = +\,0{,}00000$;	
für $x = 1{,}01$	$y = +\,0{,}00555$;	$\Delta y = 0{,}00555$
für $x = 1{,}02$	$y = +\,0{,}01109$;	$\Delta y = 0{,}00554$
für $x = 1{,}03$	$y = +\,0{,}01662$;	$\Delta y = 0{,}00553$
		u. s. w.

Das Gesetz der Proportionalität zeigt sich schon mit einer großen Annäherung, obschon der Werth von x nur um $\frac{1}{100}$ zugenommen hat,

und würde sich noch mit einer weit größeren Annäherung herausgestellt haben, wenn der Zuwachs von x noch kleiner, z. B. gleich 0,00001 angenommen worden wäre.

Wenn man die Variable x allmählig dergestalt wachsen läßt, daß jeder Werth derselben den unmittelbar Vorhergehenden um eine unendlich kleine Größe dx übertrifft, so kann man auf diese Weise von einem Werthe a von x durch eine Reihe von Zwischengliedern zu einem Werthe a′ von x gelangen. Bei einem derartigen Gange steht es uns frei, den Zuwachs dx constant oder veränderlich anzunehmen. Das Einfachste ist jedoch, wenn es sich um die unabhängige Veränderliche x handelt, den unendlich kleinen Betrag dx derselben als constant anzusehen. Indem man von dem Werthe a von x durch eine unendliche Anzahl von Zwischengliedern, welche um das constante Intervall dx von einander unterschieden sind, zu dem Werthe a′ von x übergeht, wird man gleichzeitig von dem zu $x = a$ gehörigen Werthe b der Function zu dem $x = a'$ entsprechenden Werthe b′ derselben gelangen. Dabei wird, wenn x um das Differential dx wächst, die Function y sich um das entsprechende Differential dy ändern. Das Letztere kann positiv oder negativ sein und wird, wenn x und dx bestimmt sind, von der Natur der Function abhängen. Man wird seinen Werth kennen lernen, wenn man den Grenzwerth $\frac{dy}{dx}$ des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Function von x ermittelt hat, weil immer $dy = \frac{dy}{dx}\, dx$ ist.

Wir dürfen nie vergessen, daß die Differentiale dx und dy stets Größen derselben Gattung bedeuten, wie diejenigen sind, zu welcher die Veränderlichen x und y gehören. Das Differential dx bezeichnet also eine Linie oder Fläche, wenn x eine Linie oder Fläche darstellt. Die Differentiale sind keine Größen, welche gleich Null sind, sondern Größen, welche Null zur Grenze haben. Eine solche Annahme ändert aber keineswegs die Natur dieser Größen, die immer auf diejenige Einheit, welche den Werthen der Veränderlichen zu Grunde liegt, bezogen werden müssen.

§. 5. **Fluxionen.** Die abgeleitete Function $y' = f'(x)$ oder der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ gibt, wie wir gesehen haben, das Maß für die Schnelligkeit ab, mit welcher sich die ursprüngliche Function $y = f(x)$ in Vergleich zu der Aenderung der unabhängigen Variabeln ändert. Bezeichnet nun aber die Variable t die von irgend einem Augenblick an gezählte Zeit und nehmen wir an, daß die Größen

x und y in Folge der beiden Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ mit der Zeit sich ändern, so werden die Derivirten $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ von x und y, oder die Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die Geschwindigkeit der Veränderungen von x und y messen, und zwar dies gewissermaßen in einem absoluten Sinne, während es bei der derivirten Function $y' = f'(x)$ in einem mehr relativen Sinne geschieht: denn der Natur der Sache nach ist die Zeit nothwendigerweise eine unabhängig veränderliche Größe, die sich immer gleichförmig ändert. Newton, welcher gleichzeitig mit Leibnitz die Differentialrechnung erfunden hat, nennt die Größen x, y, welche Functionen der Zeit sind, Fluenten, und die Derivirten $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, welche im Allgemeinen Functionen von t sind und die Schnelligkeit der Aenderungen von x und y messen, Fluxionen. Um die Fluxionen anzudeuten, setzt Newton über die Fluente einen Punkt. Es bezeichnen so $\dot{x}$, $\dot{y}$ die Fluxionen von x und y, oder die Derivirten $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$.

Die Functionen, welche wir Derivirte oder Abgeleitete genannt haben, können stets vermittelst der Fluxionen ausgedrückt werden. Denn bestehen gleichzeitig die beiden Gleichungen: $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$, und ist $y = f(x)$ die unmittelbare Gleichung zwischen x und y, wie sich dieselbe durch die Elimination von t zwischen den beiden ersten Gleichungen ergeben würde, wenn diese Elimination ausführbar wäre; so haben wir, wenn t, x, y; $t + \Delta t$, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ zwei Systeme zusammengehöriger Werthe dieser drei Veränderlichen vorstellen, offenbar die Gleichung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Daraus ergibt sich, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\psi'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t), \text{ oder } \dot{y} = f'(x) \cdot \dot{x};$$

woraus

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Sind x und y keine Functionen der Zeit, so hindert uns Nichts daran, die Variable x gleichförmig mit der Zeit sich ändern zu lassen, dergestalt, daß x als das Maß von t gelten kann. Unter dieser Voraussetzung werden die Functionen $\psi(t)$ und $f(x)$ alsdann identisch und die Fluxion $\dot{y}$ fällt mit der Derivirten y' zusammen. Die Methode der Fluxionen ist sonach nichts anders, als die unter einem andern Gesichtspunkt dargestellte Methode der Grenzen.

Die beiden eben genannten Methoden wie die Methode der Derivationen und die der unendlich kleinen Größen streben nach einem und

demselben Ziele hin, nämlich das Gesetz der Stetigkeit, welches die Größen bei ihrer Aenderung befolgen, auf angemessene Weise darzustellen. Zu Erreichung des erwähnten Zieles bietet die Methode der unendlich kleinen Größen oder der Differentiale die meisten Vorzüge dar und ist die von Leibnitz angewendete Schreibart die bequemste. Wir werden darum vorzugsweise jene Methode und diese Schreibart in Anwendung bringen, nicht unterlassend in vorkommenden Fällen, wo eine oder die andere Methode vortheilhafter sein und ein anderer Algorithmus mehr Bequemlichkeit haben sollte, den geeigneten Gebrauch davon zu machen.

II. Differentiation der Functionen einer Veränderlichen.

§. 6. **Differentiiren.** Eine Function $y = f(x)$ differentiiren heißt das Differential dy dieser Function aufsuchen. Der erste Gegenstand der Differentialrechnung ist es nun, das Differential von jedweder Function zu bestimmen. Nach dem vorhin Gesagten wird sich dies im Allgemeinen durch eine zwiefache Verfahrungsweise bewerkstelligen lassen. Man sucht nämlich aus der Beschaffenheit der gegebenen Function $f(x)$ unmittelbar die Grenze, welcher sich der Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

bei dem unausgesetzten Abnehmen von Δx ohne Ende nähert, und multiplicirt dann die so erhaltene Grenze mit dx. Oder man entwickelt $f(x + \Delta x) - f(x)$ nach den Potenzen von Δx und behält nach der Vertauschung von Δx mit dx bloß jene Glieder der Entwickelung bei, in welchen dx auf der ersten Potenz erscheint.

Geht man dagegen von einer gegebenen Differentialgleichung $dy = f'(x)\, dx$ aus, um deren ursprüngliche Function $y = f(x)$, oder, wie man auch sagt, das Integral des vorgelegten Differentials zu ermitteln; so ist dies eine Aufgabe der Integralrechnung, welche somit als das Umgekehrte der Differentialrechnung angesehen werden kann. Die beiden Arten von Calcül, welche sich etwa wie Potenzerhebung und Wurzelausziehung zu einander verhalten, führen zusammengenommen den Namen: Infinitesimalrechnung oder Analysis des Unendlichen.

Das Nächste, was wir zu thun hätten, wäre also, allgemeine Regeln aufzufinden, nach welchen man das Differential einer beliebig zusammengesetzten Function vermittelst der Differentiale ihrer einzelnen Bestandfunctionen darstellen könne. Es entsteht hiernach als erste Aufgabe, die Differentiale der einfachen Elementarfunctionen, wie $y = x^m$;

$y = \log x$; $y = a^x$; $y = \sin x$ zu bestimmen; woran sich unmittelbar als zweites Problem anreiht, das Differential einer Summe, einer Differenz, eines Productes und eines Quotienten von Functionen aufzufinden.

Ehe wir zur Auseinandersetzung dieser besonderen Regeln schreiten, wollen wir noch bemerken, daß eine Differentiation nur bei veränderlichen Größen möglich ist. Denn bei einer constanten oder beständigen Größe kann von einer Annäherung an eine Gränze oder von einem Differential nicht die Rede sein.

§. 7. **Grundformel.** Um die Differentiale der Elementarfunctionen zu erhalten, bestimmen wir zuvor nach Cauchy die Grenze des Ausdruckes $(1 + \alpha)^{1/\alpha}$ unter der Voraussetzung, daß α der Null fortwährend näher rücke. Wir nehmen zu diesem Behuf vorerst die Größe α positiv und von der Form $\frac{1}{u}$ an, wo u eine ganze Zahl darstellt, die im beständigen Wachsen begriffen ist. Der in Frage stehende Ausdruck $(1 + \alpha)^{1/\alpha}$ verwandelt sich dann in $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$. Mit Hülfe der Binomialformel bekommen wir:

$$\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$$

$$= 1 + u \cdot \frac{1}{u} + \frac{u(u-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{u(u-1)(u-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{u^3} + \text{ꝛc.}$$

oder $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{u}\right) + \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe, deren Glieder sämmtlich positiv und in dem Maße größer werden, als u wächst, ist offenbar zwischen den beiden Summen:

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

und $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{ꝛc.} = 3$

enthalten. Der Werth der obigen Reihe wird mithin bei dem beständigen Wachsen von u sich mehr und mehr einer zwischen 2 und 3 liegenden bestimmten Zahl nähern. Man pflegt diese Zahl mit dem besonderen Buchstaben e zu bezeichnen und die Nepersche Zahl zu nennen, wie dieß in der niedern oder algebraischen Analysis an seinem

Orte gelegentlich schon erwähnt wurde. Die Rechnung liefert den angenäherten Werth dieser irrationalen Zahl $e = 2{,}718281828459\ldots$.

Ist die positive Größe $\alpha = \frac{1}{u}$ von solcher Beschaffenheit, daß u immer eine zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen

$$n \text{ und } n' = n + 1$$

liegende Größe bezeichnet; so können wir setzen $u = n + \beta$ und $u = n' - \delta$, wo β und δ ächte Brüche sind. Offenbar ist dann

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{u}, \text{ und } 1 + \frac{1}{u} > 1 + \frac{1}{n'};$$

mithin liegt die Größe $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$ zwischen den beiden Größen

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \beta} \text{ und } \left(1 + \frac{1}{n'}\right)^{n' - \delta}$$

oder, was das Nämliche ist, zwischen den beiden Größen

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^{1 + \frac{\beta}{n}} \text{ und } \left\{\left(1 + \frac{1}{n'}\right)^{n'}\right\}^{1 - \frac{\delta}{n'}}.$$

Lassen wir nun α ohne Ende kleiner werden, oder u ins Unendliche zunehmen, so sind n und n′ fortwährend im Steigen begriffen. Die Größen

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ und } \left(1 + \frac{1}{n'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

haben daher beide die Zahl e zur Grenze, und zugleich rücken die zwei Exponenten $1 + \frac{\beta}{n}$ und $1 - \frac{\delta}{n'}$ der gemeinsamen Grenze Eins unaufhörlich näher. Daraus folgt nothwendigerweise, daß die zwischen gedachten zwei Ausdrücken liegende Größe $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$ ebenfalls die Zahl e zur Grenze hat, oder daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e, \text{ und } \lim\, (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$$

wo u irgend eine positive ins Unendliche fortlaufende Zahl bezeichnet.

Wäre α negativ, so setze man $1 + \alpha = \frac{1}{1 + \beta}$, wo β eine positive Größe darstellt. Es wird dadurch

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}} = \left\{(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right\}^{1+\beta}.$$

Wenn zu den Grenzen übergegangen wird, ergibt sich

$$\lim\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\lim\,(1+\beta)} = e, \text{ weil } \lim\,(1+\beta) = 1.$$

Es besteht also für jedes nach irgend einem Gesetze ins Unendliche wachsende u die Gleichung:

$$\lim\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e;$$

oder für die unausgesetzte Abnahme von α die Gleichung:

$$\lim\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Es lassen sich nun auch leicht die Grenzwerthe von $(1+a\,\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ und von $\frac{\log\,(1+\alpha)}{\alpha}$ herleiten, in welchem ersteren Ausdrucke die Größe a constant ist und im zweiten das Zeichen log den Logarithmen für eine beliebige Basis darstellt. Es ist nämlich einmal

$$(1+a\,\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left\{(1+a\,\alpha)^{\frac{1}{a\alpha}}\right\}^{a}.$$

Da die Größe a α mit α bis zur Null abnimmt, so bekommt man bei dem Uebergange zu den Grenzen:

$$\lim\,(1+a\,\alpha)^{\frac{1}{a\alpha}} = e;$$

$$\text{mithin } \lim\,(1+a\,\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{a}.$$

Es ist ferner $\frac{\log\,(1+\alpha)}{\alpha} = \log\left\{1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$;

folglich für die unbegrenzte Abnahme von α:

$$\lim\,\frac{\log\,(1+\alpha)}{\alpha} = \log\,e.$$

Daraus entspringt für das natürliche Logarithmensystem, dessen Logarithmen mit einem bloßen l bezeichnet werden mögen:

$$\lim\,\frac{l\,(1+\alpha)}{\alpha} = 1,$$

weil le = 1 ist.

§. 8. **Differential der algebraischen Function.** Dieß vorausgeschickt gehen wir nunmehr zu der Elementarfunction $y = x^m$ über,

wo m eine beliebige constante Größe bedeutet. Wir haben für diese Function:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot x^{m-1},$$

oder, wenn der Abkürzung halber $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ gesetzt wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha} \cdot x^{m-1}.$$

Lassen wir nun Δx, mithin auch $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ ins Unendliche abnehmen, so erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha} \cdot x^{m-1}.$$

Wir dürfen setzen $(1 + \alpha)^m = 1 + \beta$, wodurch entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\beta}{\alpha} \cdot x^{m-1}.$$

Die Aufgabe wäre demnach den Grenzwerth des Verhältnisses der unendlich kleinen Größen α und β, welche durch die Relation

$$(1 + \alpha)^m = 1 + \beta$$

mit einander verknüpft sind, zu bestimmen. Aus dieser Relation entspringt, wenn wir darin die Logarithmen in dem natürlichen System nehmen:

$$m \cdot l\,(1 + \alpha) = l\,(1 + \beta).$$

Daraus ergibt sich:

$$m\alpha\,(1 + \gamma) = \beta\,(1 + \delta)$$

$$\text{oder } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\,(1 + \gamma)}{1 + \delta},$$

wenn wir die vorhin erwiesene Relation

$$\lim \frac{l\,(1 + \alpha)}{\alpha} = 1$$

berücksichtigen, in Folge deren

$$\frac{l\,(1 + \alpha)}{\alpha} = 1 + \gamma \text{ und } \frac{l\,(1 + \beta)}{\beta} = 1 + \delta \text{ ist},$$

wo γ und δ unendlich kleine Größen bedeuten. — Lassen wir nun in der daraus entstehenden Gleichung

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\,(1 + \gamma)}{1 + \delta}$$

die kleinen Größen der Grenze Null zueilen, so ergibt sich:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = m.$$

Für das Differential der Function $y = x^m$ finden wir also die Formel: $dy = mx^{m-1} dx$. Das heißt: das Differential von x^m, mag m eine positive, negative, ganze, gebrochene, oder irrationale Zahl sein, ist gleich dem Product von dx mit dem Exponenten und mit der um eine Einheit verminderten Potenz der Veränderlichen. Als besondere Fälle, welche häufig gebraucht werden, mögen die beiden folgenden hervorgehoben werden.

1) Für $m = \frac{1}{2}$ gibt die Formel:

$$d \cdot \sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

2) Für $m = -1$ gibt dieselbe:

$$d \cdot \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$$

§. 9. **Differential der logarithmischen Function.** Zur Bestimmung des Differentials der transcendenten Elementarfunction $y = \log x$, wobei die Basis des logarithmischen Systems eine beliebige ist, haben wir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Setzen wir $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha}.$$

Da der zweite Factor auf der rechten Seite für unbegrenzt abnehmende Werthe von α die Zahl e zu seiner Grenze hat, so bekommen wir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e, \text{ und } dy = \frac{1}{x} \cdot \log e \cdot dx.$$

Das heißt: das Differential des Logarithmen einer Größe ist gleich dem Differential der Größe dividirt durch dieselbe und multiplicirt mit dem Logarithmen von e im vorliegenden System genommen.

Statt des künstlichen Logarithmen der Basis des natürlichen Systems können wir auch den natürlichen Logarithmen der Basis des betreffenden künstlichen Systems einführen, wenn wir erwägen, daß für die Basis b dieses künstlichen Systems die Relation

$$b^{\log e} = e$$

besteht. Aus derselben entspringt, wenn beiderseits die natürlichen Logarithmen genommen werden:

$$\log e = \frac{1}{lb} = M,$$

insofern wir den Modul des künstlichen Systems, wie üblich ist, durch M darstellen. Wir erhalten hiernach:

$$dy = d \cdot \log x = \frac{M}{x} dx.$$

Machen wir M = 1, d. h. wählen wir das System, dessen Basis die Zahl e ist, so wird

$$dy = d \cdot lx = \frac{dx}{x}.$$

Das heißt: das Differential des natürlichen Logarithmen einer Größe ist gleich dem Differential dieser Größe dividirt durch dieselbe.

§. 10. **Differential der Exponentialfunction.** Für die Function $y = a^x$ erhalten wir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Setzen wir $\Delta x = \alpha$ und nehmen

$$a^\alpha = 1 + \beta,$$

wo β wie α eine unendlich kleine Größe bedeutet; so wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot a^x.$$

Es handelt sich mithin nur um die Bestimmung des Grenzverhältnisses der unendlich kleinen Größen β und α, welche durch die Relation

$$a^\alpha = 1 + \beta$$

mit einander verknüpft sind.

Aus dieser Relation ergibt sich bei dem Uebergange zu den Logarithmen für ein beliebiges System:

$$\alpha \log a = \log (1 + \beta), \text{ woraus}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \log a \cdot \frac{1}{\frac{\log (1 + \beta)}{\beta}}.$$

Folglich, wenn wir zu den Grenzen übergehen:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\log a}{\log e}.$$

Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = \frac{\log a}{\log e} \cdot a^x \text{ und}$$

$$dy = da^x = \frac{\log a}{\log e} \cdot a^x\, dx.$$

Nehmen wir die natürlichen Logarithmen, so entsteht die einfachere Gleichung:

$$dy = la \cdot a^x dx.$$

Machen wir überdieß $a = e$, so kommt $dy = e^x dx$. Die Function $y = e^x$ hat demnach die charakteristische Eigenschaft, daß ihre derivirte Function oder ihr Differentialverhältniß mit der ursprünglichen Function identisch ist.

§. 11. **Differentiale goniometrischer Functionen.** Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Differentiale der goniometrischen Functionen über. Zu diesem Behufe wollen wir zuvor die Grenze des Quotienten $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ermitteln, für den Fall, daß α der Grenze Null zueilt. Wir bemerken deßhalb, daß $\alpha > \sin \alpha$, mithin $1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha}$; ferner, daß $\tan \alpha > \alpha$, folglich

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} \text{ oder } \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha.$$

Lassen wir nun α gegen Null convergiren, so rücken die Größen 1 und $\cos \alpha$, zwischen denen der fragliche Quotient $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ enthalten ist, immer näher aneinander und fallen für $\alpha = 0$ zusammen. Hieraus folgt, daß $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ die Einheit zur Grenze hat.

Aus der Function $y = \sin x$ entsteht:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

wenn wir die bekannte trigonometrische Formel

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{1}{2} (a - b) \cos \frac{1}{2} (a + b)$$

zu Hülfe nehmen. Setzen wir $\frac{1}{2} \Delta x = \alpha$, so verwandelt sich die obige Gleichung in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos (x + \alpha).$$

Daraus folgt, wenn wir erwägen, daß der Factor $\cos (x + \alpha)$ für unendlich abnehmende α gegen die Grenze $\cos x$ convergirt:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \text{ oder } dy = d \sin x = \cos x \, dx.$$

Ebenso ergibt sich aus der Function $y = \cos x$ die Gleichung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos (x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

unter Anwendung der trigonometrischen Formel:

$$\cos a - \cos b = - 2 \sin \frac{1}{2} (a - b) \sin \frac{1}{2} (a + b).$$

Folglich durch Uebergang zur Grenze für unendlich abnehmende Δx:

$$\frac{dy}{dx} = - \sin x, \text{ oder } dy = d \cos x = - \sin x \, dx.$$

Aus dem Differential des Sinus und Cosinus lassen sich nun leicht die Differentiale für Tangente und Cotangente entwickeln.

Für $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ hat man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\sin (x + \Delta x)}{\cos (x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} \right\}; \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos (x + \Delta x)}.$$

Daraus entspringt, wenn Δx sich unablässig der Null nähert:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ oder } dy = d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Für $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ bekommt man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\cos (x + \Delta x)}{\sin (x + \Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x} \right\}; \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sin x \sin (x + \Delta x)}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sin^2 x} \text{ und } dy = d \cot x = - \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Die Differentiale der Secante und Cosecante lassen sich auf ähnliche Weise ableiten.

Für $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos x}\right\}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \frac{\sin\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)}{\cos x \cos(x + \Delta x)}; \text{ woraus}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \text{ und } dy = d \sec x = \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}.$$

Für $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{\sin(x + \Delta x)} - \frac{1}{\sin x}\right\}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \frac{\cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)}{\sin x \sin(x + \Delta x)}, \text{ woraus}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \text{ und } dy = d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}.$$

§. 12. **Differentiale cyclometrischer Functionen.** Wir gehen nun zur Aufsuchung der Differentiale der cyclometrischen Functionen über.

Für $y = \operatorname{arc}(\sin = x)$ wird $x = \sin y$.

Aus der letzten Gleichung gewinnen wir:

$$\Delta x = \sin(y + \Delta y) - \sin y, \text{ oder}$$

$$\Delta x = 2 \sin\frac{\Delta y}{2} \cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right). \text{ Folglich}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{2 \sin\frac{\Delta y}{2} \cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin\frac{\Delta y}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)}.$$

Durch den Uebergang zur Grenze entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y},\ \text{und}\ dy = d\ \mathrm{arc}\ (\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

weil $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ ist.

Für $y = \mathrm{arc}\ (\cos = x)$ findet man auf ähnliche Weise:

$$dy = d\ \mathrm{arc}\ (\cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Für $y = \mathrm{arc}\ (\mathrm{tang} = x)$ wird $x = \mathrm{tang}\ y$.

Aus der letzten Gleichung bekommen wir:

$$\Delta x = \frac{\sin (y + \Delta y)}{\cos (y + \Delta y)} - \frac{\sin y}{\cos y},\ \text{oder}$$

$$\Delta x = \frac{\sin \Delta y}{\cos y \cos (y + \Delta y)}.\ \text{Mithin}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\sin \Delta y} \cos y \cos (y + \Delta y).$$

Hieraus folgt durch Uebergang zur Grenze:

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y,\ \text{und}\ dy = d\ \mathrm{arc}\ (\mathrm{tang} = x) = \frac{dx}{1 + x^2},$$

weil $\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$ ist.

Für $y = \mathrm{arc}\ (\cot = x)$ erhält man ähnlicherweise:

$$dy = d\ \mathrm{arc}\ (\cot = x) = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Wir hätten die cyclometrischen Differentiale auch auf eine mehr directe Weise herleiten können, ohne gerade auf die umgekehrten Functionen zurückzugehen. Es mag genügen, das Verfahren an der Function $y = \mathrm{arc}\ (\mathrm{tang} = x)$ zu zeigen. Man hat für dieselbe:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{arc}\ (\mathrm{tang} = x + \Delta x) - \mathrm{arc}\ (\mathrm{tang} = x)}{\Delta x},\ \text{oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}\right)}{\Delta x},$$

wenn die trigonometrische Formel

$$\mathrm{arc}\ (\mathrm{tang} = a) - \mathrm{arc}\ (\mathrm{tang} = b) = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{a - b}{1 + ab}\right)$$

benutzt wird. Setzt man

$$\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)} = \alpha,$$

so verwandelt sich obige Formel in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc}\,(\text{tang} = \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\Delta x}{1 + x\,(x + \Delta x)}}{\Delta x}, \text{ oder in:}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc}\,(\text{tang} = \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + x\,(x + \Delta x)}.$$

Setzt man $\alpha = \text{tang}\,\beta$, also $\beta = \text{arc}\,(\text{tang} = \alpha)$; so ist:

$$\lim \frac{\text{arc}\,(\text{tang} = \alpha)}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\text{tang}\,\beta} = \lim \frac{\beta}{\sin \beta} \cdot \cos \beta = 1.$$

Demnach folgt aus der vorhergehenden Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}; \text{ also } dy = d\,\text{arc}\,(\text{tang} = x) = \frac{dx}{1 + x^2},$$

wie oben.

§. 13. **Allgemeine Regeln der Differentiation.** Nachdem wir unsere erste Aufgabe gelöst, nämlich die Differentialausdrücke für die einfachen Functionen gefunden haben, kommen wir an das zweite Problem, nämlich allgemeine Regeln aufzustellen, durch deren Hülfe die Aufsuchung des Differentials einer irgendwie zusammengesetzten Function auf die Aufsuchung der Differentiale ihrer Bestandtheile zurückgeführt werden könne. Die Aufstellung solcher allgemeinen Regeln bildet den Gegenstand dieses und des folgenden Paragraphen.

Es sei zunächst $y = u + v$, wo u und v zwei beliebige Functionen von x sind. Man erhält durch die Substitution von $x + \Delta x$ für x:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v; \text{ woraus}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Indem man zur Grenze für unendlich kleine Δx übergeht, entsteht: $y' = u' + v'$, oder wenn man statt der derivirten Functionen die gleichgeltenden Differentialquotienten schreibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},$$

wofür man die Differentialgleichung setzen kann:

$$dy = du + dv.$$

Durch eine ähnliche Rechnung wird man für $y = u - v$ finden: $dy = du - dv$.

Aus diesen für die Addition und Subtraction zweier Functionen geltenden Regeln kann man sofort folgende allgemeinere herleiten:

Das Differential einer algebraischen Summe von Functionen ist gleich der mit denselben Zeichen zu nehmenden Summe der Differentiale jeder einzelnen Function.

Es sei ferner $y = u \cdot v$, wo u und v wieder zwei Functionen von x sind. Wir erhalten

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + (u + \Delta u)\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Daraus erwächst, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

wofür man die Differentialgleichung $dy = v\,du + u\,dv$ setzen kann. Es ist leicht auch das Differential eines Productes aus drei und mehreren Functionen von x zu finden und hieraus die gemeinsame Regel zu entnehmen: Das Differential eines Productes von n Functionen ist gleich der Summe der Producte aus den Differentialen der n einzeln genommenen Functionen in die übrigen $n - 1$ Functionen selbst. Ist $y = av$, wo a eine constante Größe bedeutet, so hat man $dy = a\,dv$, d. h. man kann die bei einer Differentiation vorkommenden constanten Factoren sofort vor das Differentialzeichen setzen.

Es sei noch $y = \frac{u}{v}$. Daraus entspringt

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Bei dem Uebergange zur Grenze entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

wofür man die Differentialgleichung $dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ setzen kann:

d. h.: das Differential aus dem Quotienten zweier Functionen ist gleich dem Unterschiede des Products aus dem Divisor in das Differential des Dividenden und des Products aus dem Dividend in das Differential des Divisors, dividirt durch das Quadrat des Divisors.

Wenden wir diese Regel auf die zwei Functionen $y = \cot x$ und $y = \sec x$ an.

Für die erste haben wir

$$dy = d \cot x = d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x \; d \cos x - \cos x \; d \sin x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Für die zweite erhalten wir

$$dy = d \sec x = d \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x \; dx}{\cos^2 x}.$$

§. 14. **Die Ableitung der Function von Functionen.** Mit den oben angegebenen Regeln stehen im engsten Zusammenhange die in diesem Paragraphen vorkommenden zwei Lehrsätze, von denen jene Regeln gleichsam nur als specielle Fälle gelten können. Es sei erstens $y = f(u)$, wo u eine beliebige Function von x bezeichnet. Erhält nun x den Zuwachs Δx, so wird, wenn Δu die Aenderung von u bezeichnet, welche der Zunahme Δx entspricht:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x},$$

welche Gleichung man in folgender Form

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

darstellen kann. Läßt man nun Δx der Null sich unablässig nähern, so wird

$$\lim \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \frac{dy}{du} \text{ und } \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}.$$

Es ist folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ und } dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} dx.$$

Um also einen Ausdruck wie $y = f(u)$, wo u irgend eine Function von x ist, zu differentiiren, suche man zunächst das Differentialverhältniß $\frac{dy}{du}$, als wenn u die unabhängige Veränderliche wäre, und multiplicire sodann das Resultat mit dem Differential der Function u in Bezug auf die Unabhängige x.

Wie leicht die Anwendung dieser Regel ist, werden folgende Beispiele zeigen.

1) Es sei $y = l \sin x$. Man setze $\sin x = u$, mithin $y = lu$. Es ist dann

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ und } \frac{du}{dx} = \cos x.$$

Folglich nach der gegebenen Regel:

$$dy = dl \sin x = \cot x \, dx.$$

2) Es sei $y = a^{b^x}$. Man setze $b^x = u$, also $y = a^u$. Es wird dann $\frac{dy}{du} = a^u \cdot la$; ferner $\frac{du}{dx} = b^x \, lb$. Folglich mittelst der gefundenen Regel:

$$dy = d\,a^{b^x} = a^{b^x} \, b^x \, la \cdot lb \, dx.$$

Nach derselben Regel wird man finden:

3) Für $y = e^{\sin x}$ das Differential $dy = e^{\sin x} \cos x \, dx$.

4) Für $y = l \tang x$ das Differential $dy = \frac{2\,dx}{\sin 2x}$.

Mittelst dieser Regel läßt sich auch leicht die Untersuchung der cyclometrischen Functionen auf die der goniometrischen, und das Differential der Exponentialfunction a^x auf das der logarithmischen Function $\log x$ zurückführen, wenn wir erwägen, daß die Derivirten von zwei einander gleichen Functionen ebenfalls einander gleich sind. Für $y = \text{arc}\,(\sin = x)$ hat man $\sin y = x$.

Die letztere Gleichung liefert, wenn man auf beiden Seiten die Differentialquotienten nimmt:

$$\frac{dy}{dx} \cos y = 1; \text{ woraus } dy = d \,\text{arc}\,(\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\text{weil } \cos y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Für $y = a^x$ erhält man $\log y = x \log a$; woraus folgt

$$\log e \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log a; \text{ mithin } dy = da^x = \frac{\log a}{\log e} \cdot a^x \, dx.$$

Es sei zweitens $y = f\,(u, v)$, wo u und v zwei Functionen von x bezeichnen. Wächst nun x um Δx, so ergibt sich zunächst:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(u + \Delta u, v + \Delta v) - f\,(u, v)}{\Delta x},$$

wofür, wenn man die Function $f\,(u, v + \Delta v)$ dem Zähler der rechten Seite zusetzt und davon wegnimmt, geschrieben werden kann:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(u + \Delta u, v + \Delta v) - f\,(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+ \frac{f\,(u, v + \Delta v) - f\,(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Läßt man nun Δx ohne Ende sich vermindern, wobei zugleich Δv und Δu ins Unendliche abnehmen; so gehen die Quotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$

und $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ in $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dx}$ über. Dabei nähert sich der Quotient $\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$ der derivirten Function $\frac{d f(u, v)}{dv}$, d. h. derjenigen Function, welche man erhält, wenn man in f (u, v) die Größe v als einzige unabhängige Veränderliche, u aber in Bezug auf die Aenderung von v als constant ansieht. Was die Grenze des Quotienten

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u}$$

betrifft, so ist dieselbe offenbar einerlei mit der von

$$\frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} \text{ oder mit } \frac{d f(u, v)}{du},$$

d. h. mit der derivirten Function von f (u, v), welche man bekommt, wenn v als constant und u als einzige unabhängige Veränderliche betrachtet wird. Man hat also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}; \text{ oder}$$

$$dy = \left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}\right) dx;$$

wofür man auch setzen kann:

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv.$$

Es hält nicht schwer, diesen Satz weiter auszudehnen und folgende praktische Regel für das Differentiiren herzuleiten: Das Differential einer Function von mehreren Veränderlichen, welche alle von einer einzigen Veränderlichen abhängen, wird gefunden, wenn man die Summe der einzelnen Differentiale nimmt, welche dadurch entstehen, daß man der Reihe nach jede der abhängigen Variabeln als unabhängig ansieht und differentiirt, als wenn die übrigen veränderlichen Größen constant wären. In der Summe dieser einzelnen Differentiale sind hernach für die abhängigen Variabeln und deren Differentiale, ihre Werthe, ausgedrückt durch die unabhängige Veränderliche, zu setzen.

Zur Erläuterung wollen wir die zwei folgenden Beispiele wählen:

1) Es sei $y = \frac{a + bx}{(1 - x)^2}$ Man hat, wenn $v = a + bx$ und $u = 1 - x$ gesetzt wird: $y = \frac{v}{u^2}$. Daraus entspringt $\frac{dv}{dx} = b$ und $\frac{du}{dx} = -1$. Die Derivirte in Bezug auf v ist $\frac{1}{u^2}$; jene in

Bezug auf u ist $-\frac{2v}{u^3}$. Folglich $dy = \left(\frac{b}{u^2} + \frac{2v}{u^3}\right) dx$, oder

$$dy = \frac{b + bx + 2a}{(1-x)^3} dx.$$

2) Es sei ferner $y = \frac{(1-x^2)^2 - (3-2x)x}{4-5x}$.

Daraus, wenn man setzt:

$$z = 1 - x^2,\ u = 3x - 2x^2,\ v = 4 - 5x:$$

die Gleichung $y = \frac{z^2 - u}{v}$. Es ist

$$\frac{dz}{dx} = -2x;\ \frac{du}{dx} = 3 - 4x;\ \frac{dv}{dx} = -5;$$

$$\text{ferner } \frac{dy}{dz} = \frac{2z}{v};\ \frac{dy}{du} = -\frac{1}{v};\ \frac{dy}{dv} = -\frac{(z^2-u)}{v^2}.$$

$$\text{Folglich } dy = \left(-\frac{2z}{v}\cdot 2x - \frac{(3-4x)}{v} + 5\frac{(z^2-u)}{v^2}\right)dx$$

$$\text{oder } dy = \frac{16x^3 - 15x^4 - 7}{(4-5x)^2} dx.$$

Wenn die den Veränderlichen u, v . . . gleichzusetzenden Werthe nicht zu verwickelt sind, so zieht man vor, die Rechnung ohne Hülfe dieser Transformationen zu bewerkstelligen, indem solche stillschweigend dabei unterlegt sind. Auf diese Art geben die nachstehenden Beispiele sofort:

3) $y = (a - 2x + x^3)^3$

das Differential $dy = 3(a - 2x + x^3)^2 (3x^2 - 2) dx$.

4) $y = (ax - x^2)\sqrt[4]{b - cx^3}$

das Differential $dy = (a - 2x)\sqrt[4]{b - cx^3}\cdot dx - \frac{3cx^2 (ax - x^2) dx}{4\sqrt[4]{(b - cx^3)^3}}$.

§. 15. **Differentiale zusammengesetzter Functionen.** Die Differentiation der zusammengesetzten algebraischen wie transcendenten entwickelten Functionen hat jetzt nicht die geringste Schwierigkeit mehr. Zur Uebung mögen die untenstehenden Beispiele dienen, von welchen bloß die Resultate angegeben werden sollen. Diesen Uebungsbeispielen hat man noch die beiden einfachen cyclometrischen Functionen $y = \text{arc}(\sec = x)$ und $y = \text{arc}(\text{cosec} = x)$ beigefügt, da deren Differentiale in dem Vorhergehenden unbeachtet geblieben sind.

1) $y = x\,(a^2 - x^2)\,\sqrt{a^2 + x^2}$ gibt $dy = \dfrac{a^4 - a^2\,x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx.$

2) $y = \dfrac{ax}{x + (a + x^2)^{\frac{1}{2}}}$ gibt $dy = \dfrac{a^2}{(a + x^2)^{\frac{1}{2}}\,(x + \sqrt{a + x^2})^2}\,dx.$

3) $y = a^{\sqrt{2x+1}}$ gibt $dy = a^{\sqrt{2x+1}} \cdot \dfrac{la}{\sqrt{2x+1}}\,dx.$

4) $y = e^x\,(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$ gibt $dy = e^x\,x^3\,dx.$

5) $y = \log \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ liefert $dy = \dfrac{M}{x\,(1 + x^2)}\,dx.$

6) $y = \log\,(x + \sqrt{1 + x^2})$ liefert $dy = \dfrac{M\,dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$

7) $y = l\,\sqrt{\dfrac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2} - x}}$ gibt $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$

8) $y = l\,\dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$ gibt $dy = \dfrac{-\,dx}{x\sqrt{1 - x^2}}.$

9) $y = z^t$, wo z und t Functionen von x sind,

$$\text{gibt } dy = z^t\left(\frac{tz'}{z} + t'\,lz\right)dx.$$

10) $y = z^{t^u}$ gibt $dy = z^{t^u} \cdot t^u\left(\dfrac{z'}{z} + u' \cdot lt \cdot lz + \dfrac{ut' \cdot lz}{t}\right)dx.$

11) $y = \cos\,(lx)$ gibt $dy = -\,\dfrac{\sin\,(lx)}{x}\,dx.$

12) $y = (\cos x)^{\sin x}$ liefert $dy = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot l\cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)dx.$

13) $y = \sqrt[3]{3e^x - \dfrac{x^2}{\sin x}}$

liefert $dy = \dfrac{3e^x \sin x - 2x + x^2 \cot x}{3 \sin x\left(3e^x - \dfrac{x^2}{\sin x}\right)^{\frac{2}{3}}}\,dx.$

14) $y = \operatorname{arc}\left(\cos = \dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right)$ gibt $dy = \dfrac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{a + b\cos x}\,dx.$

15) Für $y = \text{arc}\,(\sec = x)$ wird $dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

16) Für $y = \text{arc}\,(\text{cosec} = x)$ wird $dy = - \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

§. 16. **Differentiale impliciter Functionen.** Nachdem wir nunmehr im Stande sind, jedwede entwickelte Function einer Veränderlichen zu differentiiren, entsteht die Frage, wie diese Operation bei den unentwickelten Gleichungen mit zwei Veränderlichen x und y zu bewerkstelligen sei. Wir nehmen deßhalb die beliebige Gleichung $f(x, y) = 0$.

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\Delta x} = 0,$$

wo Δy die dem Zuwachs Δx entsprechende Aenderung der Function y bezeichnet. Durch Anwendung der im Paragraphen 14 aufgestellten Regel auf die letzte Gleichung, welche eigentlich nur ein specieller Fall der dort behandelten allgemeineren ist, da die Function u hier mit x zusammenfällt, erhält man:

$$\frac{df(x, y)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{df(x, y)}{dx} dx + \frac{df(x, y)}{dy} y' dx = 0.$$

Daraus bekommt man für den Ausdruck des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ oder der derivirten Function y' die Gleichung:

$$\frac{dx}{dy} = y' = - \frac{\frac{df(x, y)}{dx}}{\frac{df(x, y)}{dy}}.$$

Um also den Differentialquotienten der in der Gleichung $f(x, y) = 0$ enthaltenen Function y zu bestimmen, braucht man bloß die aus dieser Gleichung hergeleiteten Differentialquotienten durch einander zu dividiren und das Zeichen des Quotienten zu wechseln.

Dieser Differentialquotient y' wird im Allgemeinen durch die beiden Veränderlichen x und y ausgedrückt sein, und nicht durch die unabhängige Veränderliche x allein, wie wir dieß bei den expliciten Functionen gefunden haben. Um y' durch x allein dargestellt zu erhalten, muß man y zwischen den beiden Gleichungen $f(x, y) = 0$ und

$$\frac{df(x, y)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} y' = 0$$

eliminiren. Diese Elimination, welche selten von Nutzen ist, wird y′ auf eine höhere Potenz bringen, deren Grad im Allgemeinen der Nämliche ist, wie der von y in der vorgelegten Gleichung, so daß einem speciellen Zahlenwerthe von x im Allgemeinen ebensoviele Werthe von y′ entsprechen, als deren die Function y zuläßt. Im Uebrigen werden die einem solchen speciellen Zahlenwerthe von x zugehörigen Werthe von y′ gefunden, wenn man vorerst die verschiedenen Werthe von y in der dann zu einer numerisch gewordenen Gleichung f (x, y) = 0 berechnet und hierauf gedachte specielle Zahlenwerth von x nach und nach mit den so erhaltenen Werthen von y in die Gleichung

$$\frac{df(x, y)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} y' = 0$$

substituirt.

Um das Gesagte deutlicher zu machen, wollen wir ein paar Beispiele nehmen. Es sei zuerst die Gleichung:

$$y^2 - 2bx\, y + x^2 - a^2 = 0.$$

Dieselbe liefert;

$$\frac{df(x, y)}{dx} = 2(x - by); \text{ und}$$

$$\frac{df(x, y)}{dy} = 2(y - bx); \text{ mithin}$$

$$y' = \frac{by - x}{y - bx.}$$

Soll nun y′ durch x allein ausgedrückt werden, so müssen wir in der letzten Gleichung für y dessen Werth, nämlich $bx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + b^2 x^2}$ substituiren, wodurch wir bekommen:

$$y' = b \pm \frac{b^2 x - x}{\sqrt{a^2 - x^2 + b^2 x^2}},$$

welches Resultat mit demjenigen übereinstimmt, das aus der durch Auflösung entstandenen Geichung $y = bx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + b^2 x^2}$ durch die unmittelbare Differentiation sich ergibt. — Sucht man hingegen den Werth von y aus der Gleichung $y' = \frac{by - x}{y - bx}$, um ihn in die gegebene Gleichung $y^2 - 2bxy + x^2 - a^2 = 0$ einzuführen; so erhält man nach geschehener Reduction die Gleichung

$$y'^2 - 2by' + \frac{x^2 - b^2 x^2 - a^2 b^2}{x^2 - a^2 - b^2 x^2} = 0,$$

aus welcher für y′ sich die zwei Werthe wie oben ergeben.

Es sei zweitens die Gleichung

$$y^5 x^3 - 2y^4 x^2 + 3y - 6x = 0.$$

Aus derselben entsteht:

$$\frac{d\,f\,(x,\,y)}{dx} = 3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6;$$

und $$\frac{d\,f\,(x,\,y)}{dy} = 5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3;$$

also $$y' = -\frac{3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6}{5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3}.$$

Für $x = 1$ z. B. verwandelt sich die gegebene Gleichung in:

$$y^5 - 2y^4 + 3y - 6 = 0,$$

welche nur die einzige reelle Wurzel $= 2$ besitzt, wonach sich für y' der einzige reelle Werth $= -\frac{26}{19}$ herausstellt.

Zwei andere Beispiele geben die Gleichungen:

$$x^4 + 2ax^2 y - ay^3 = 0, \text{ und}$$
$$y^3 - 3a\,xy + x^3 = 0;$$

aus deren ersteren

$$y' = \frac{4x^3 + 4axy}{3ay^2 - 2ax^2},$$

und zweiten

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

sich ergibt.

III. Die derivirten Functionen und Differentiale höherer Ordnungen.

§. 17. **Successive Differentationen.** In der Gleichung $y = f\,(x)$, wo x die unabhängige Veränderliche und y die davon abhängige Function ist, wollen wir die Größe x nach gleichen Differenzen Δx wachsen lassen, so daß sie nach und nach die Werthe x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$ . . . erhalte. Die denselben entsprechenden Werthe der Function y sollen durch $y, y_1, y_2, y_3 \cdots$ dargestellt werden. Indem man jede einzelne der letzteren Größen von der unmittelbar darauf folgenden abzieht, entsteht:

$y_1 - y = \Delta y$; $y_2 - y_1 = \Delta y_1$; $y_3 - y_2 = \Delta y_2$ u. s. w., wo das Zeichen Δ wie früher andeutet, daß der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden Werthen der Function y genommen wor-

den ist. Die Größen Δy, Δy_1, $\Delta y_2 \ldots$ heißen die ersten Differenzen oder die Differenzen der ersten Ordnung der Function y. Verfährt man nun mit diesen Differenzen wie mit den Werthen der ursprünglichen Function y, d. h. nimmt man den Unterschied zwischen jeder und der darauf unmittelbar folgenden gedachter Differenzen; so hat man:

$$\Delta y_1 - \Delta y = \Delta\Delta y = \Delta^2 y;$$
$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta\Delta y_1 = \Delta^2 y_1;$$

wo der Analogie nach die Differenz von $\Delta y_1 - \Delta y$ mit $\Delta\Delta y$ oder mit $\Delta^2 y$ bezeichnet wird. Diese Größe $\Delta^2 y$ heißt die zweite Differenz oder die Differenz der zweiten Ordnung der Function y. Auf dieselbe Art fortfahrend, wird man zu den Differenzen der dritten, vierten — . . . Ordnung gelangen. Der bequemeren Uebersicht halber mögen die verschiedenen Größen, welche aus vier nach gleichen Differenzen wachsenden Werthen von x in der angegebenen Weise entstehen, in folgender Tabelle zusammengestellt sein:

Werthe von x	Correspondirende Werthe von y.	Erste Differenzen.	Zweite Differenzen.	Dritte Differenzen.
x	y			
$x + \Delta x$	y_1	$\Delta y = y_1 - y$	$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$	$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$
$x + 2\Delta x$	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
$x + 3\Delta x$	y_3	$\Delta^2 y_1 = y_3 - y_2$		

Nehmen wir nun wieder an, daß Δx fortwährend sich vermindere und der Null immer näher rücke, so werden die Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y \ldots$ ebenfalls sehr klein werden. Bemerkenswerth ist jedoch dabei, daß die erste Differenz Δy viel weniger rasch abnimmt als die zweite Differenz $\Delta^2 y$, die ihrerseits von der dritten Differenz $\Delta^3 y$ hinsichtlich eines schnelleren Abnehmens bedeutend übertroffen wird, so daß, wenn Δx und Δy sehr klein werden in Vergleich zur Einheit, die Verhältnisse von $\Delta^2 y$ zu Δy, von $\Delta^3 y$ zu $\Delta^2 y \ldots$ selbst sehr klein geworden sind. Eine derartige Größensubordination zwischen den Differenzen der verschiedenen Ordnungen der Function wird sich in dem Maße bestimmter herausstellen, je kleiner die Differenz Δx wird. Dieses Resultat ergibt sich aus nachstehenden Betrachtungen, die noch zu anderen beachtungswerthen Ergebnissen führen.

Es ist in der That

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \Delta x;$$

daraus folgt bei dem fortwährenden Kleinerwerden von Δx mit unbeschränkter Annäherung:

$$\Delta^2 y = \left\{ f'(x + \Delta x) - f'(x) \right\} \Delta x.$$

Der Werth von $\Delta^2 y$ ist also aus zwei Factoren zusammengesetzt, deren jeder ohne Ende abnimmt; was zur nothwendigen Folge hat, daß dieser Werth selbst sehr klein ist in Vergleich zu jedem der beiden sehr klein gewordenen Factoren. Der vorhergehende auf die Form:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

gebrachte Ausdruck liefert, wenn Δx ohne Aufhören abnimmt:

$$\lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \lim \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Derselbe verwandelt sich, wenn man mit $d^2 y$ dasjenige bezeichnet, was aus $\Delta^2 y$ bei dem Uebergange von Δx in dx wird, und nach Lagrange durch $f''(x)$ die derivirte Function von $f'(x)$ darstellt, in:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d\, f'(x)}{dx} = f''(x).$$

Die Function $\frac{dy}{dx}$ ist das Differentialverhältniß oder der Differentialquotient der ersten Ordnung der Function y, und $\frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx}$ oder $\frac{d^2 y}{dx^2}$ das Differentialverhältniß oder der Differentialquotient der zweiten Ordnung derselben Function. Die derivirte Function $f''(x)$, welche man auch mit y'' bezeichnet, wird die derivirte Function der zweiten Ordnung der Function $y = f(x)$ genannt, während y' oder $f'(x)$ die derivirte Function der ersten Ordnung der Function y heißt. — Der Ausdruck

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\, \frac{dy}{dx}}{dx} = f''(x)$$

kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$d^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}\, dx^2 = f''(x)\, dx^2.$$

Man sagt dann von ihm: das Differential der zweiten Ordnung der Function y ist gleich dem Producte aus der zweiten Potenz von dx und dem Differentialquotienten der zweiten Ordnung von der

betreffenden Function; oder gleich dem Producte aus dem Quadrat von dx und derjenigen Function, welche man erhält, wenn man die Derivirte von der abgeleiteten Function f' (x) nach den gegebenen Differentiationsregeln nimmt. In diesen Worten liegt der Grund, warum dem Differentialverhältniß der zweiten Ordnung auch der Name Differentialcoefficient dieser Ordnung beigelegt wird. Man sieht überdem bald ein, daß das Differential der zweiten Ordnung einer gegebenen Function gefunden wird, wenn man dieselbe zweimal nach einander differentiirt und bei der zweiten Differentiation das Differential dx als constant betrachtet.

Es besteht ferner die Gleichung:

$$\Delta^3 y = \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) \Delta x^2,$$

aus welcher sich für sehr kleine Werthe von Δx mit unbeschränkter Annäherung sich ergibt:

$$\Delta^3 y = \{ f''(x + \Delta x) - f''(x) \} \Delta x^2.$$

Der Werth $\Delta^3 y$ ist demnach aus drei Factoren zusammengesetzt, während der von $\Delta^2 y$ nur zwei solcher Factoren enthält: woraus nothwendigerweise folgt, daß der Werth von $\Delta^3 y$ schneller als der von $\Delta^2 y$ abnimmt. — Bringt man den vorhergehenden Ausdruck unter die Form:

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{f''(x + \Delta x) - f''(x)}{\Delta x},$$

so entsteht, wenn Δx in dx übergeht:

$$\lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \lim \frac{f''(x + \Delta x) - f''(x)}{\Delta x}.$$

Derselbe erhält, wenn man der Analogie nach mit $d^3 y$ dasjenige bezeichnet, was aus $\Delta^3 y$ wird, indem Δx sich in dx verwandelt, und durch $f'''(x)$ die derivirte Function von $f''(x)$ darstellt, folgende Form:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d\,\dfrac{d^2 y}{dx^2}}{dx} = f'''(x),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$d^3 y = \frac{d^3 y}{dx^3}\, dx^3 = f'''(x)\, dx^3.$$

Man nennt die Function $\frac{d^3 y}{dx^3}$ das Differentialverhältniß oder den Differentialquotienten der dritten Ordnung der Function y und die demselben gleichgeltende Function $f'''(x)$, welche man

auch durch y''' darstellt, die derivirte Function der dritten Ordnung. — Die Größe d^3y heißt das Differential der dritten Ordnung der Function y und ist gleich dem Producte aus der dritten Potenz von dx und dem Differentialquotienten der dritten Ordnung, welcher deßhalb auch Differentialcoefficient der dritten Ordnung genannt wird. Das Differential der dritten Ordnung einer vorgelegten Function wird folglich erhalten, wenn man diese Function dreimal nach einander differentiirt und dabei das Differential dx bei der zweiten wie der dritten Differentiation als constant ansieht.

§. 18. **Unendliche Größen verschiedener Ordnung.** Wie diese Rechnung fortgesetzt und so zu den Differentialen höherer Ordnungen aufgestiegen werden kann, ist unschwer einzusehen. Bei einem derartigen Verfahren dient jede Function $y = f(x)$ als der Ausgangspunkt einer beliebig weit fortlaufenden Reihe von Differentialen, wie: $dy = f'(x)\,dx$; $d^2y = f''(x)\,dx^2$; $d^3y = f'''(x)\,dx^3 \ldots d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n$, deren jedes aus dem Vorhergehenden auf ähnliche Weise, wie das erste aus der ursprünglichen Function, nämlich durch die Operation des Differentiirens sich herleiten läßt.

Die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x) \ldots f^{(n)}(x)$, welche im Allgemeinen endliche Functionen der Veränderlichen x sind, bilden beziehungsweise die Grenzen, gegen welche die Verhältnisse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2},\ \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \ldots \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

convergiren, unter der Voraussetzung, daß Δx unabläßig gegen die Null hineilt. Insofern diese endlichen Verhältnisse mit immer höheren Potenzen der unendlich kleinen Größen dx multiplicirt werden müssen, um zu höheren Differentialen dy, d^2y, $d^3y \ldots d^ny$ aufzusteigen, liegt die Unterordnung der letzteren Größen sofort zu Tage. Dieselben sind unendlich kleine Größen von solcher Beschaffenheit, daß das Verhältniß einer jeden von ihnen zu der vorhergehenden sich ebenfalls auf einen unendlich kleinen Bruch reducirt.

Die Reihe der Potenzen eines sehr kleinen Bruches trägt das Gepräge einer derartigen Anordnung deutlich an sich. Ist nämlich α eine unendlich kleine Größe und stellen k_1, $k_2 \ldots k_n$ endliche Zahlen dar; so besteht die Reihe

$$k_1\alpha,\ k_2\alpha^2,\ k_3\alpha^3 \ldots k_n\alpha^n$$

aus Gliedern, deren jedes unendlich klein im Vergleich zu dem Vorhergehenden wird, da ihr Verhältniß sich offenbar als eine unendlich kleine Größe herausstellt. Nennen wir nun die unendlich kleinen Brüche α und $k_1\alpha$ unendlich kleine Größen der ersten Ordnung, so wird die hier zur Sprache gebrachte Unterordnung kürzer ausge-

drückt, indem wir sagen, daß die unendlich kleinen Brüche $k_2 \alpha^2$, $k_3 \alpha^3$, ... $k_n \alpha^n$ unendlich kleine Größen der zweiten, dritten,... der nten Ordnung sind. Wir werden also sagen, die Differentiale dy, d^2y, d^3y .... d^ny sind unendlich kleine Größen der ersten, zweiten, dritten .... nten Ordnung, da sie mit den Größen dx, dx^2, dx^3, ... dx^n beziehungsweise zu einerlei Ordnung gehören.

Wie eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung α unendlich groß im Vergleich zu einer unendlich kleinen Größe der zweiten Ordnung α^2 ist, ebenso wird eine unendlich große Größe A unendlich klein in Bezug auf die unendlich große Größe A^2 sein, indem der Quotient der ersteren durch die zweite $= \frac{1}{A}$, d. h. eine unendlich kleine Größe ist. A^2 wird sonach eine unendlich große Größe der zweiten Ordnung und A^3 eine unendlich große Größe der dritten Ordnung sein, und so fort. Dieser Bemerkung zufolge sind wir also dahin geführt, die unendlichen Größen, die unendlich kleinen sowohl wie unendlich großen, in verschiedene Ordnungen zu unterscheiden und zwei dergleichen unendliche Größen als zu derselben Ordnung gehörig zu betrachten, sobald der Quotient jener beiden Größen sich als endliche Größe herausstellt.

§. 19. **Höhere Differentiale der einfachen Functionen.** Wir wollen nun die Abgeleiteten und Differentiale höherer Ordnungen der einfachen Functionen angeben.

1) Für die Function $y = x^m$ findet man:

$$d^ny = m\,(m-1)\;....\;(m-n+1)\;x^{m-n}\,dx^n.$$

Dieses Differential geht ohne Ende fort, wenn m eine gebrochene Zahl oder eine negative Größe ist, und reducirt sich, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet, auf die Constante $m\,(m-1)\,....\,3\cdot2\cdot1$, wenn $n = m$ wird, so daß die folgenden Differentiale sämmtlich Null sind. Für $m = -1$ und $m = -\frac{1}{2}$ findet man die Abgeleiteten:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{x^{n+1}}.$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{x^n}}\right)}{dx^n} = (-1)^n\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots 2n-1}{2^n x^n \sqrt{x}}.$$

2) Für die Function $y = \log x$ bekommt man

$$d^ny = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\log e}{x^n}\;dx^n$$

Für das Nepersche System wird:

$$\frac{d^n\,(l\,x)}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-1}}.$$

3) Die Function $y = a^x$ liefert

$$d^n a^x = a^x\,(l\,a)^n\,dx^n.$$

4) Wenn $a = e$ ist, entsteht $\frac{d^n\;e^x}{dx^n} = e^x$. Die Function e^x hat, wie schon früher bemerkt wurde, die Eigenschaft, daß die Differentiation sie beständig wieder hervorbringt.

5) Für die goniometrische Function $y = \sin x$ findet man leicht

$$\frac{d\,\sin x}{dx} = \cos x;$$

$$\frac{d^2\,\sin x}{dx^2} = -\sin x;$$

$$\frac{d^3\,\sin x}{dx^3} = -\cos x;$$

$$\frac{d^4\,\sin x}{dx^4} = \sin x.$$

Die Abgeleiteten von $\sin x$ haben also vier verschiedene Werthe, welche periodisch wiederkehren.

6) Für $y = \cos x$ hat man ähnlich

$$\frac{d\,\cos x}{dx} = -\sin x;$$

$$\frac{d^2\,\cos x}{dx^2} = -\cos x;$$

$$\frac{d^3\,\cos x}{dx^3} = \sin x;$$

$$\frac{d^4\,\cos x}{dx^4} = \cos x.$$

Die Derivirten dieser Function haben also auch vier verschiedene Werthe, die periodisch wiederkehren, wie es zu erwarten war.

Die Differentiation der cyclometrischen Functionen reducirt sich auf die Differentiation algebraischer Ausdrücke.

7) Für $y = \text{arc}\,(\sin = x)$ bekommt man:

$$\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};\; \frac{d^2y}{dx^2} = x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ u. s. w.}$$

8) Für $y = \text{arc}(\cos = x)$ erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ u. s. f.}$$

§. 20. **Höhere Differentiale der zusammengesetzten Functionen.** Wie früher zur Auffindung der ersten Differentiale zusammengesetzter Functionen allgemeine Regeln aufgestellt wurden, so lassen sich ebenfalls dergleichen Regeln zur Bestimmung der höheren Differentiale solcher Functionen bilden. Die Mittheilung einiger dahin einschlagenden Regeln macht den Gegenstand dieses Paragraphen aus.

1) Es sei $y = u + v$, wo u und v Functionen von x bedeuten. Man hat

$$dy = du + dv;$$

ferner

$$d^2y = d^2u + d^2v;$$

und ganz allgemein

$$d^ny = d^nu + d^nv; \text{ und}$$
$$y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}.$$

Diesen Regeln zufolge ist

$$d^n(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n a dx^n.$$

Und wird

$$\frac{d^n\left\{\frac{1}{a^2 - b^2x^2}\right\}}{dx^n} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{a+bx} - \frac{1}{bx-a}\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}\left\{\frac{d^n}{dx^n} \cdot \frac{1}{a+bx} - \frac{d^n}{dx^n} \cdot \frac{1}{bx-a}\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}\left\{(-1)^n \frac{1 \cdot 2 \ldots n b^n}{(a+bx)^{n+1}} - (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \ldots nb^n}{(bx-a)^{n+1}}\right\}$$

$$= (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \ldots nb^n}{2a}\left\{\frac{1}{(a+bx)^{n+1}} - \frac{1}{(bx-a)^{n+1}}\right\}.$$

2) Aus $y = uv$ ergibt sich

$$dy = udv + vdu.$$

Daraus erwächst durch eine abermalige Differentiation:

$$d^2y = ud^2v + 2dudv + vd^2u.$$

Hieraus folgt durch eine weitere Differentiation:

$$d^3y = ud^3v + 3dud^2v + 3d^2udv + vd^3u.$$

Indem man so weiter geht, findet man für das nte Differential:

$$d^ny = ud^nv + \frac{n}{1}dud^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}d^2ud^{n-2}v \ldots + \frac{n}{1}d^{n-1}udv + vd^nu;$$

und für die nte Abgeleitete

$$y^{(n)} = uv^{(n)} + \frac{n}{1} u' v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u'' v^{(n-1)} \ldots + \frac{n}{1} u^{(n-1)} v' + vu^n;$$

in welchen Entwickelungen die Coefficienten der einzelnen Glieder mit den Binomialcoefficienten identisch sind.

Vermittelst dieser Formeln erhält man für die Function $y = e^{ax} x^m$ den Ausdruck:

$$d^n \frac{e^{ax} x^m}{dx^n} = e^{ax} \left\{ a^n x^m + n m a^{n-1} x^{m-1} + \frac{n(n-1)m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^{m-2} + \ldots \right\}$$

3) Die vorhergehenden Formeln lassen sich zuweilen leicht auf Functionen von der Form $y = \frac{u}{v}$ in Anwendung bringen. Setzt man nämlich $\frac{1}{v} = w$, so wird $y = uw$. Kann man nun im betreffenden Falle die höheren Differentiale von w herleiten, so erhält man mit Hülfe der obigen Formeln die höheren Differentiale oder Differentialquotienten des Productes uw oder des Quotienten $\frac{u}{v}$. Für die Function $y = \frac{e^x}{x}$ bekommt man so:

$$d^n \cdot \frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)}{dx^n} = e^x \left\{ \frac{1}{x} - \frac{n}{x^2} + \frac{n(n-1)}{x^3} \ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{x^n} \right\}.$$

4) Es sei endlich $y = f(u)$, wo u wieder eine Function von x ist. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Eine zweite Differentiation gibt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(u)}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \text{ oder}$$

$$d^2y = \frac{d^2f(u)}{du^2} \cdot du^2 + \frac{df(u)}{du} d^2u.$$

Eine dritte Differentiation würde geben:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3f(u)}{du^3} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3 \frac{d^2f(u)}{du^2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{d^3u}{dx^3}; \text{ oder}$$

$$d^3y = \frac{d^3f(u)}{du^3} du^3 + 3 \frac{d^2f(u)}{du^2} d^2u\, du + \frac{df(u)}{du} d^3u.$$

Es ist leicht ersichtlich, wie sich dieses Verfahren weiter fortsetzen läßt, obschon es seine Schwierigkeit hat, im Allgemeinen das Gesetz aufzu-

stellen, nach welchem ein beliebig höherer Differentialquotient oder höheres Differential unabhängig von ihren Vorhergehenden hingeschrieben werden könnte. Ueberhaupt kommt man in den meisten Fällen, wo es sich um die Bestimmung der Differentiale und Derivirten höherer Ordnungen handelt, am schnellsten zum Ziel, wenn man durch successive Anwendung der im vorigen Abschnitte gegebenen Differentiationsregeln aus dem Differential oder Differentialquotienten der ersten Ordnung jene der zweiten, aus diesen die der dritten, u. s. w. ableitet, bis man zu dem in Frage stehenden Differential oder Differentialquotienten gelangt ist. Als Belege mögen folgende vier Beispiele dienen.

1) Für $y = l \sin x$ findet man:

$$dy = \frac{\cos x \, dx}{\sin x} \text{ dann } d^2y = -\frac{dx^2}{\sin^2 x};$$

$$\text{ferner } d^3y = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} dx^3.$$

2) Für $y = x^x$ erhält man:

$$y' = x^x (1 + lx);$$

$$y'' = x^x \left\{ \frac{1}{x} + (1 + lx)^2 \right\};$$

$$y''' = x^x \left\{ (1 + lx)^3 + 3 \frac{(1 + lx)}{x} - \frac{1}{x^2} \right\}.$$

3) Für $y = e^{a^2 + b^2 x^2}$ erwächst:

$$dy = 2b \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot bx \, dx;$$

$$d^2y = 2b^2 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} (2b^2 x^2 + 1) \, dx^2;$$

$$d^3y = 4b^3 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} (2b^3 x^3 + 3bx) \, dx^3;$$

$$d^4y = 4b^4 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} (4b^4 x^4 + 12b^2 x^2 + 3) \, dx^4.$$

4) Für $y = \log (a^2 - b^2 x^2)$ wird

$$y' = -\frac{2b^2 x}{a^2 - b^2 x^2};$$

$$y'' = -\frac{2b^2 (b^2 x^2 + a^2)}{(a^2 - b^2 x^2)^2};$$

$$y''' = -\frac{4b^3 (b^3 x^3 + 3a^2 bx)}{(a^2 - b^2 x^2)^3}.$$

§. 21. **Höhere Differentiale der impliciten Functionen.** Die Aufsuchung der höheren Abgeleiteten oder Differentiale einer impli-

citen Function y bietet keine weitere Schwierigkeiten dar. Hat man nämlich:

$$f(x, y) = 0,$$

so erhält man durch eine erste Differentiation die Differentialgleichung der ersten Ordnung:

$$\frac{df(x, y)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

wofür man einfacher schreiben kann:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

insofern man die gegebene Function f(x, y) bloß durch den Buchstaben f darstellt. Differentiirt man noch einmal und erwägt, daß die Functionen $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$ im Allgemeinen noch beide Veränderliche x und y enthalten und daß y und $\frac{dy}{dx}$ Functionen von x sind, so bekommt man folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

aus welcher sich der Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$ ergibt.

Um $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu bestimmen, müßte man die vorige Gleichung differentiiren, wodurch man erhielte:

$$\frac{d^3f}{dx^3} + 3\frac{d^3f}{dx^2dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{3d^3f}{dx\,dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^3f}{dy^3} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

$$+ 3\frac{d^2f}{dx\,dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{d^2f}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

insofern berücksichtigt wird, daß

$$\frac{d^3f}{dx\,dy^2} = \frac{d^3f}{dy^2\,dx} = \frac{d^3f}{dy\,dx\,dy}, \text{ und}$$

$$\frac{d^3f}{dy\,dx^2} = \frac{d^3f}{dx^2\,dy} = \frac{d^3f}{dx\,dy\,dx} \text{ ist,}$$

was wir in der Folge beweisen werden.

Es ist nicht schwer, diese Rechnung weiter fortzusetzen und zu der Gleichung aufzusteigen, welche den Werth von $\frac{d^ny}{dx^n}$ oder $y^{(n)}$ gibt.

Zur Anwendung wollen wir die zwei letzten am Schlusse des Paragraphen 16 gegebenen Beispiele nehmen. Das erste derselben, nämlich

$$x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0,$$

gab als erste Differentialgleichung:

$$(2ax^2 - 3ay^2)\, y' + 4x^3 + 4axy = 0.$$

Wird diese Gleichung differentiirt, wobei y und y' als Functionen von x angesehen werden; so bekommt man folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(2ax^2 - 3ay^2)\, y'' + 12x^2 + 4ay + 8axy' - 6ayy'^2 = 0,$$

welche, wenn man für y' seinen Werth

$$\frac{4x^3 + 4axy}{3ay^2 - 2ax^2}$$

setzt, sich in folgende umwandelt:

$$a^2 (2x^2 - 3y^2)^3\, y'' + 36ay^4 (ay - 3x^2) - 16ax^4 (x^2 + 3ay)$$
$$- 48ax^2 y^2 (ay + 5x^2) - 96x^6y = 0,$$

welche den Werth von y'' in x und y ausdrückt.

Ebenso gab das zweite Beispiel

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

die Differentialgleichung der ersten Ordnung:

$$y^2y' - axy' - ay + x^2 = 0,$$

aus welcher die Differentialgleichung der zweiten Ordnung entspringt:

$$(y^2 - ax)\, y'' + 2yy'^2 - 2ay' + 2x = 0.$$

Substituirt man für y' seinen Werth

$$\frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

so erhält man nach geschehener Reduction und mit Berücksichtigung der gegebenen Gleichung folgendes Resultat:

$$(y^2 - ax)^3\, y'' + 2a^3xy = 0,$$

durch welches der Werth von y'' in x und y ausgedrückt ist. Vermittelst der primitiven Gleichung ließe sich noch y wegschaffen, so daß y'' als Function von x allein erschiene.

§. 22. **Entfernung der Constanten.** Wenn man die Gleichung

$$f(x, y) = a,$$

worin a eine Constante bedeutet, differentiirt; so drückt die Differentialgleichung der ersten Ordnung:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\, y' = 0$$

eine Relation zwischen x, y und y' aus, welche sich nicht ändert, welchen Werth auch a in der primitiven Gleichung annehmen mag. Be-

trachtet man die letztere als einer Reihe von Curven angehörig, welche sich nur durch die verschiedenen Werthe jener Constanten von einander unterscheiden, so ist die obige Differentialgleichung der Ausdruck einer diesen Curven gemeinsamen Eigenschaft. Hat man so die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

welche einem Kreise von einem beliebigen Halbmesser a angehört, so ist die daraus gewonnene Differentialgleichung

$$x + yy' = 0,$$

von der constanten Größe a unabhängig und drückt eine allen diesen concentrischen Kreisen gemeinschaftliche Eigenschaft aus. Wenn dagegen die constante Größe mit den Veränderlichen x und y auf irgend eine Weise in der Gleichung

$$f(x, y, a) = 0$$

verbunden erscheint, so kommt jene Constante im Allgemeinen in der Differentialgleichung

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0$$

auch noch vor. Sie kann aber zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen eliminirt werden, so daß man eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, y') = 0$$

erhält, die eine gemeinsame Eigenschaft aller derjenigen Curven ausdrücken wird, welche die Gleichung

$$f(x, y, a) = 0$$

darstellt, wenn der Constanten a nach und nach verschiedene Werthe beigelegt werden. So z. B. erhält man aus der Gleichung:

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2,$$

die Differentialgleichung der ersten Ordnung:

$$(y - a) y' + x = 0.$$

Wird der Werth von a aus der letzteren genommen und in die erste eingeführt, so kommt die Differentialgleichung

$$(x^2 - 2y^2) y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0$$

zum Vorschein, welche eine gemeinsame Eigenschaft sämmtlicher durch die Gleichung

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2$$

dargestellten Kreise ausdrückt.

Es sei

$$f(x, y, a, b) = 0,$$

worin a und b zwei Constanten bezeichnen. Wenn man diese Gleichung zweimal hintereinander differentiirt, erhält man die Differentialgleichungen der ersten und zweiten Ordnung:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0;$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2 \frac{d^2f}{dx\,dy} y' + \frac{d^2f}{dy^2} y'^2 + \frac{df}{dy} \cdot y'' = 0;$$

welche im Allgemeinen die Constanten a und b ebenfalls enthalten werden. Eliminirt man dieselben zwischen den drei vorstehenden Gleichungen, so wird das daraus entstehende Resultat

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

eine gemeinsame Eigenschaft aller derjenigen Curven ausdrücken, welche durch die Gleichung

$$f(x, y, a, b) = 0$$

dargestellt werden. Ist z. B.

$$y^2 = a - bx^2$$

die vorgelegte Gleichung, so erhält man nach der ersten Differentiation:

$$yy' = - bx;$$

und nach der zweiten Differentiation:

$$yy'' + y'^2 = - b.$$

Durch die Elimination von b aus den beiden letztern Gleichungen entspringt die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$yy' = (yy'' + y'^2)\,x,$$

die eine der vorgelegten Gleichung angehörige Eigenschaft ausdrückt, welche Werthe die Constanten a und b auch haben mögen.

Aus dem hier eingehaltenen Verfahren geht hervor, daß eine dreimalige Differentiation erforderlich sein wird, um mit Hülfe der dadurch gewonnenen Gleichungen drei Constanten aus der primitiven Gleichung zu eliminiren, und daß überhaupt die n ersten Differentialgleichungen dieser Gleichung nöthig sein werden, um n Constanten aus der Letztern zu entfernen. Auch ergibt sich zugleich daraus, daß in jeder aus der primitiven Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

hergeleiteten Differentialgleichung von der nten Ordnung die Derivirte $y^{(n)}$ nur auf der ersten Potenz vorkommt; und daß, wenn die Sache sich anders verhält, die fragliche Differentialgleichung nicht durch unmittelbare Differentiation entstanden ist, sondern dadurch, daß irgend eine Constante oder eine von den zwei Veränderlichen aus der vorgelegten und den daraus hergeleiteten Differentialgleichungen eliminirt worden ist. Wir können also zu den Differentialgleichungen, welche eine allgemeinere Bedeutung haben, als die ihnen zum Grunde liegenden primitiven, auf zweierlei Art gelangen. Einmal durch unmittelbare Differentiation der Primitiven: solche Resultate mögen unmittel=

bare Differentialgleichungen heißen; zweitens durch die Elimination einer Constanten zwischen der primitiven und ihrer Differentialgleichung: dergleichen Resultate wollen wir mittelbare Differentialgleichungen nennen.

Im Uebrigen ist es gleichgültig, ob man zuerst die n Differentialgleichungen aufstellt und dann zur Elimination der n Constanten schreitet, oder ob man aus der primitiven Gleichung und der daraus gewonnenen ersten Differentialgleichung eine der Constanten eliminirt und die daraus entspringende Differentialgleichung wieder differentiirt und darauf die Entfernung einer zweiten Constante vornimmt und auf diese Art die Elimination fortsetzt.

Es sei z. B. die Gleichung:

$$ax - by = xy.$$

Die unmittelbare Differentialgleichung ist:

$$a - by' = xy' + y.$$

Durch die aus beiden Gleichungen nach einander vorgenommene Elimination von a und b bekommt man die beiden mittelbaren Differentialgleichungen:

$$by = x^2y' + bxy' \text{ und } ay - y^2 = axy'.$$

Eliminirt man aus jeder dieser Gleichungen und ihrem Differential die darin vorkommende Constante, so erhält man die Gleichung:

$$2xy'^2 - 2yy' = xyy'',$$

welche die mittelbare Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der primitiven Gleichung

$$ax - by = xy$$

ist. — Es sei ferner die Gleichung

$$x^2 - ax - by = 0.$$

Durch Differentiation entsteht:

$$2x - a - by' = 0.$$

Eliminirt man die Constante aus diesen beiden Gleichungen, so kommt

$$x^2 + by - bxy' = 0,$$

welche Gleichung differentiirt gibt

$$x\,(2 - by'') = 0.$$

Entfernt man aus den beiden letztern Gleichungen die zweite Constante b, so gelangt man zu der Gleichung:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Zu dieser Finalgleichung würde man auch gekommen sein, wenn man zwischen der primitiven Gleichung und deren unmittelbaren Differentialgleichung die Constante b eliminirt, hierauf das Resultat der Elimination differentiirt, und endlich zwischen den beiden letzten Resultaten die Constante a entfernt hätte. Wir sehen hieraus, daß die primitive

Gleichung mit zwei Constanten zwei mittelbare Differentialgleichungen der ersten und eine der zweiten Ordnung ergibt. Auf dieselbe Weise hat eine primitive Gleichung mit drei Constanten drei verschiedene mittelbare Differentialgleichungen der ersten Ordnung, von denen jede zwei Constanten enthält, ferner drei verschiedene mittelbare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, von denen jede eine Constante enthält, und endlich eine mittelbare Differentialgleichung der dritten Ordnung, welche von den drei Constanten unabhängig ist. Ueberhaupt läßt sich bei einigem Nachdenken bald finden, daß die Anzahl der mittelbaren Differentialgleichungen der verschiedenen Ordnungen von einer primitiven Gleichung mit n Constanten nach einander durch die Binomialcoefficienten der nten Potenz angegeben wird. Woraus umgekehrt wieder geschlossen werden kann, daß die zu einer gegebenen Differentialgleichung der nten Ordnung gehörige definitive ursprüngliche Gleichung zwischen x und y im Allgemeinen mit n willkürlichen Constanten behaftet anzusehen ist.

§. 23. **Continuität der derivirten Functionen.** Nachdem die Regeln aufgestellt sind, welche man zu beobachten hat, um die Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen einer beliebigen Function zu erhalten, wollen wir nunmehr zu der Untersuchung der Relation, welche zwischen jenen Derivirten und der Stammfunction stattfinden können, übergehen. Eine der interessanteren derartigen Beziehungen ist das Vorhandensein der Continuität der primitiven Function zwischen zwei Grenzen, wenn die Abgeleitete innerhalb derselben Grenzen continuirlich ist. Wir sagen nämlich von einer Function f (x), wenn sie innerhalb zweier Grenzen von x, die beliebig nahe oder entfernt von einander liegen, um unendlich kleine Werthe sich ändert, sobald x um unendlich wenig wächst, daß die Function zwischen jenen Grenzen continuirlich, im entgegengesetzten Falle aber discontinuirlich, ist. So z. B. ist die Function $\frac{1}{x}$ zwischen $x = + a$ und $x = + b$ continuirlich, weil, wenn x um unendlich wenig zunimmt, auch $\frac{1}{x}$ um unendlich wenig sich ändert und gedachter Werth von $\frac{1}{x}$ zwischen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ zu liegen kommt. Diese Function ist dagegen discontinuirlich zwischen $x = + a$ und $x = - b$, weil für den Werth von $x = 0$, welcher zwischen $+ a$ und $- b$ liegt, $\frac{1}{x}$ unendlich groß wird. — Ebenso ist sin x eine continuirliche Function zwischen

$x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$: dieselbe kann nämlich alle zwischen 0 und 1 liegende denkbare Werthe annehmen, ohne sich sprungweise zu ändern.

Es sei nun $f(x)$ eine zwischen a und $a + h$ continuirliche Function, welche innerhalb dieser Grenzen immer zu- oder abnimmt. Für dieselbe besteht sonach die Gleichung:

$$\frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha} = f'(x),$$

wo α eine unendlich kleine Größe bedeutet, so wie die Gleichung:

$$\frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha} = f'(x) + \varepsilon,$$

$$\text{oder } f(x + \alpha) - f(x) = \alpha\,[f'(x) + \varepsilon],$$

in welcher ε ebenfalls eine unendlich kleine Größe bezeichnet. Läßt man nun in der letzteren Gleichung x in a übergehen und die Variable um die unendlich kleine Größe α zunehmen, so entstehen folgende Gleichungen:

$$f(a + \alpha) - f(a) = \alpha\,[f'(a) + \varepsilon_1];$$
$$f(a + 2\alpha) - f(a + \alpha) = \alpha\,[f'(a + \alpha) + \varepsilon_2];$$
$$f(a + 3\alpha) - f(a + 2\alpha) = \alpha\,[f'(a + 2\alpha) + \varepsilon_3];$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f(a + n\alpha) - f[a + (n-1)\,\alpha] = \alpha\,[f'(a + [n-1]\,\alpha) + \varepsilon_n],$$

in denen die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ dieselbe Bedeutung wie ε haben. Addirt man vorstehende Gleichungen, so ergibt sich, wenn wir $n\alpha = h$ setzen:

$$f(a + h) - f(a) = \alpha \left\{ f'(a) + f'(a + \alpha) \ldots . + f'[a + (n-1)]\alpha \right\}$$
$$+ \alpha\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n).$$

Bezeichnet nun γ die größte und k die kleinste unter den Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_n$; so ist offenbar $\alpha(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) < h\gamma$ und $> hk$.

Hieraus folgt, wenn α bis zur Null abnimmt nnd n zugleich wächst, dergestalt, daß stets $n\alpha = h$ bleibt:

$$\lim \alpha\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 0, \text{ und}$$

$$f(a + h) - f(a) = \lim \cdot \alpha \left\{ f'(a) + f'(a + \alpha) \ldots + f'[a + (n-1)\alpha] \right\}.$$

Betrachten wir jetzt die letztere Formel etwas genauer. In derselben durchläuft die Veränderliche x, wenn α hinlänglich klein genommen wird, in der Function $f'(x)$ continuirlich das Intervall von $x = a$ bis $x = a + h$. Ist nun $f'(g)$ der größte und $f'(k)$ der kleinste der so entstehenden Werthe von $f(x)$, so wird offenbar:

$$f(a + h) - f(a) < n\alpha f'(g) < h\, f'(g),$$
$$\text{und } f(a + h) - f(a) > n\alpha f'(k) > h\, f'(k);$$

oder $f(a + h) - f(a) - hf'(g)$ negativ
und $f(a + h) - f(a) - hf'(k)$ positiv sein.

Wir folgern daraus, daß zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = a + h$ zwei Werthe g und k existiren, von denen der eine den Ausdruck

$$f(a + h) - f(a) - hf'(x)$$

negativ, der andere dagegen ihn positiv macht. Ist nun $f'(x)$ eine continuirliche Function innerhalb gedachten Intervalls, so kann der erwähnte Ausdruck vom Negativen nur durch Null zum Positiven übergehen. Es gibt daher immer zwischen a und $a + h$ einen Werth $a + \vartheta h$, wo ϑ als ein positiver echter Bruch aufzufassen ist, für welchen

$$f(a + h) - f(a) - h f'(a + \vartheta h) = 0 \text{ oder}$$
$$f(a + h) = f(a) + h f'(a + \vartheta h)$$

wird. Da der Werth dieses Bruches im Allgemeinen nicht zu ermitteln ist, so läßt sich auch der Werth von $f(x + h)$ für ein bestimmtes x und h durch diese Mittel noch nicht angeben.

Wählen wir α hinlänglich klein, damit in den Gleichungen

$$f(a + \alpha) - f(a) = \alpha\,[f'(a) + \varepsilon_1],$$
$$f(a + 2\alpha) - f(a + \alpha) = \alpha\,[f'(a + \alpha) + \varepsilon_2],$$
$$f(a + 3\alpha) - f(a + 2\alpha) = \alpha\,[f'(a + 2\alpha) + \varepsilon_3],$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(a + n\alpha) - f[a + (n-1)\alpha] = \alpha\,[f'(a + \alpha[n-1] + \varepsilon_n)]$$

rechterseits das Vorzeichen jedesmal mit dem des ersten Gliedes übereinstimmend ist, so müssen die Ausdrücke auf der linken Seite, wenn α positiv ist und gedachte erste Glieder sämmtlich positiv sind, gleichfalls durchgängig positiv sein: das heißt, es ist dann

$$f(a + \alpha) > f(a),$$
$$f(a + 2\alpha) > f(a + \alpha),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(a + n\alpha) > f[a + (n - 1)\alpha].$$

Sind hingegen die Größen $f'(a)$, $f'(a + \alpha) \dots$ negativ, so wird dann:

$$f(a) > f(a + \alpha),$$
$$f(a + \alpha) > f(a + 2\alpha),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f[a + (n - 1)\alpha] > f(a + n\alpha).$$

Lassen wir nun α unausgesetzt abnehmen und n zugleich wachsen, in der Weise, daß $n\alpha = h$ bleibt, so drücken die Größen

$$f'(a),\ f'(a + \alpha) \dots f'[a + (n - 1)\alpha], \text{ und}$$
$$f(a),\ f(a + \alpha) \dots f[a + (n - 1)\alpha]$$

den stetigen Fortgang der Functionen $f'(x)$ und $f(x)$ zwischen den

Grenzen $x = a$ und $x = a + h$ aus. Wir wären hiernach berechtigt, zu sagen: Eine beliebige Function nimmt zwischen zwei Grenzen beliebig zu oder ab, je nachdem ihr Differentialquotient innerhalb derselben Grenzen positiv oder negativ bleibt. Im Paragraphen 3 wurde des eben ausgesprochenen Satzes schon beiläufig Erwähnung gethan; wir hielten es jedoch für nöthig, denselben in eine bestimmtere Form einzukleiden. Wie wir es denn auch uns nicht versagen konnten, die hier aufgestellte Relation in ihrer Erweiterung nach Cauchy in dem folgenden Paragraphen mitzutheilen.

§. 24. **Erweiterung der aufgefundenen Relationen.** Wenn $F(x)$ und $f(x)$ zwei nebst ihren ersten Differentialquotienten innerhalb der Grenzen von $x = a$ bis $x = a + h$ continuirliche Functionen sind, auch der Differentialquotient $f'(x)$ zwischen jenen Grenzen sein Zeichen nicht ändert; so ist

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{f(a+h) - f(a)} = \frac{F'(a + \vartheta_1 h)}{f'(a + \vartheta_1 h)},$$

wo man ϑ_1 wieder als einen positiven echten Bruch aufzufassen hat. Ist nämlich K der kleinste und G der größte von den Werthen, welche das Verhältniß $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ innerhalb jener Grenzen annehmen kann; so werden die beiden Differenzen

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} - K \text{ und } \frac{F'(x)}{f'(x)} - G$$

oder die beiden Differenzen

$$F'(x) - K f'(x) \text{ und } F'(x) - G f'(x)$$

verschiedene Vorzeichen haben, weil laut der Voraussetzung $f'(x)$ innerhalb gedachter Grenzen sein Zeichen nicht ändern soll. Da nun diese beiden Größen beziehungsweise die Differentialquotienten der Functionen

$$F(x) - K f(x) \text{ und } F(x) - G f(x)$$

sind, so wird in dem Intervall von $x = a + h$ die eine dieser beiden Functionen stets wachsen, die andere dagegen stets abnehmen. Hieraus geht unzweideutig hervor, daß von den beiden Differenzen

$$F(a+h) - F(a) - K\{f(a+h) - f(a)\}, \text{ und}$$

$$F(a+h) - F(a) - G\{f(a+h) - f(a)\}$$

jederzeit die eine > 0, die andere < 0 ist. Weil aber der gemachten Voraussetzung zu Folge die Größe $f(a+h) - f(a)$ stets positiv oder stets negativ ist, so werden offenbar die beiden Differenzen

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{f(a+h) - f(a)} - K \text{ und } \frac{F(a+h) - F(a)}{f(a+h) - f(a)} - G$$

verschiedene Vorzeichen haben, oder der Werth von

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{f(a+h)-f(a)}$$

zwischen dem größten und kleinsten Werthe von $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ enthalten sein, wenn man x das Intervall von a bis $a+h$ stetig durchlaufen läßt. Da nun die Functionen $F'(x)$ und $f'(x)$ nach der gemachten Voraussetzung innerhalb gedachten Zwischenraums continuirlich sind, so wird die Größe $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ eine wenigstens innerhalb dieses Intervalls stetige Function von x bilden, oder mit anderen Worten: es wird zwischen den Grenzen a und $a+h$ ein Werth $a+\vartheta_1 h$ liegen, für welchen

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{f(a+h)-f(a)}=\frac{F'(a+\vartheta_1 h)}{f'(a+\vartheta_1 h)}$$

ist. — Im Fall die beiden Functionen $F(x)$ und $f(x)$ für $x=a$ verschwinden, geht die letztere Formel in folgende

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F'(a+\vartheta_1 h)}{f'(a+\vartheta_1 h)}$$

über.

Der in der vorigen Gleichung ausgesprochene Satz läßt sich leicht erweitern. Sind nämlich die Functionen $F(x)$ und $f(x)$ nebst ihren ersten Differentialquotienten bis zu denen von der $(n-1)$ten Ordnung inclusive innerhalb des Intervalls von $x=a$ bis $x=a+h$ continuirlich, und behalten ferner die Differentialquotienten von $f(x)$ während dieses Intervalles dasselbe Vorzeichen; so kann man auf die nämliche Weise nachstehende Gleichungen herleiten:

$$\frac{F'(a+\vartheta_1 h)-F'(a)}{f'(a+\vartheta_1 h)-f'(a)}=\frac{F''(a+\vartheta_2 h)}{f''(a+\vartheta_2 h)};$$

$$\frac{F''(a+\vartheta_2 h)-F''(a)}{f''(a+\vartheta_2 h)-f''(a)}=\frac{F'''(a+\vartheta_3 h)}{f'''(a+\vartheta_3 h)};$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{F^{(n-1)}(a+\vartheta_{n-1} h)-F^{(n-1)}(a)}{f^{(n-1)}(a+\vartheta_{n-1} h)-f^{(n-1)}(a)}=\frac{F^{(n)}(a+\vartheta_n h)}{f^{(n)}(a+\vartheta_n h)},$$

in denen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \ldots \vartheta_n$ positive ächte Brüche bedeuten. Sind die Differentialquotienten von solcher Beschaffenheit, daß gleichzeitig

$$F'(a)=F''(a)=F'''(a)=\ldots\ldots=F^{(n-1)}(a)=0, \text{ und}$$

$$f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\ldots\ldots=f^{(n-1)}(a)=0;$$

so besteht die Gleichung

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{f(a+h)-f(a)}=\frac{F^{(n)}(a+\vartheta_n h)}{f^{(n)}(a+\vartheta_n h)}.$$

Nehmen wir $f(x) = (x - a)^n$, eine Function, bei welcher sämmtliche Differentialquotienten bis zum $(n-1)$ten inclusive für $x = a$ verschwinden; so gibt uns die vorige Gleichung, weil $f^{(n)}(x) = f^n(a + \vartheta_n h) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ ist:

$$\frac{F(a + h) - F(a)}{h^n} = \frac{F^{(n)}(a + \vartheta_n h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

$$\text{oder } F(a + h) = F(a) + h^n \cdot \frac{F^{(n)}(a + \vartheta_n h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

wobei die Functionen $F(x), F'(x) \ldots F^{(n)}(x)$ innerhalb des Intervalls von $x = a$ verschwinden müssen.

Annullirt sich die Function $F(x)$ nebst ihren Differentialquotienten bis zum $(n-1)$ten inclusive für $x = 0$, so erhält man, wenn $a = 0$ angenommen und h mit x vertauscht wird, folgende Formel:

$$F(x) = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} F^{(n)}(\vartheta_n x),$$

von welcher wir mehrfach Gebrauch machen werden.

§. 25. **Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.** Bei den analytischen Operationen, welche die Differentialrechnung ausmachen, muß man den Unterschied zwischen den unabhängigen und abhängigen Veränderlichen fest im Auge behalten: denn bei den wiederholten Differentiationen gilt das Differential der unabhängigen Veränderlichen als constanter Factor, während die Differentiale der abhängigen Veränderlichen selbst wieder als veränderlich betrachtet werden. Man kann zwar nach Belieben die eine oder die andere der Veränderlichen zur Unabhängigen wählen; ist die Wahl aber einmal getroffen, so bringt die Natur der Rechnung es mit sich, in dieser Hinsicht bei dem Gange der Operationen keine Aenderung eintreten zu lassen. Sollte man jedoch im Verlaufe einer analytischen Untersuchung es für nöthig erachten, der als unabhängig angesehenen Variabelen das Gepräge der unabhängigen Veränderlichkeit zu nehmen und es auf eine andere schon vorhandene oder noch neu einzuführende Veränderliche zu übertragen; so kann man übrigens eine derartige Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen mit Hülfe besonderer Umformungen bewerkstelligen. So z. B. könnte bei der Untersuchung einer Curve, deren Abscissen x, Ordinaten y und Bogen s sind, es nöthig werden, nicht die Abscisse x, sondern die Ordinate y oder den Bogen s als unabhängige Veränderliche anzusehen; oder es könnte sich selbst ereignen, die Coordinaten x, y und den Bogen s einer durch continuirliche Bewegung entstandenen Curve als Functionen der Zeit t zu betrachten,

welche während der Bewegung verfließt, wie dieß häufig in der Mechanik der Fall ist.

Um sich von dergleichen Umformungen einen richtigen Begriff zu bilden, wollen wir annehmen, eine mittelst der Differentialrechnung behandelte Aufgabe habe auf einen Ausdruck von der Form:

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

geführt, in welchem x als unabhängige Veränderliche und y als Function von x betrachtet ward. Soll nun x aufhören als unabhängige Veränderliche zu gelten und selbst als Function einer neuen Veränderlichen t angesehen werden, dabei jedoch die ursprünglich aufgestellte Abhängigkeit zwischen den beiden Veränderlichen x und y keineswegs verloren gehen; so ist die Frage, was anstatt der Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

gesetzt, oder wie der Ausdruck ψ umgeformt werden muß, wenn derselbe auf die Größe t als unabhängige Veränderliche bezogen werden soll. Um die Frage zu beantworten, erwägen wir, daß, wenn y als eine Function von x betrachtet wird, das seinerseits wieder eine Function von t ist, die Relation:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

besteht. Daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Aus diesem Ausdrucke lassen sich nun auch diejenigen für die Differentialquotienten der höheren Ordnungen ableiten. Differentiirt man nämlich auf beiden Seiten der letzten Gleichung in Bezug auf t, wo mithin dt constant ist, dx und dy hingegen von t abhängig sind; so kommt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2};$$

woraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Aus diesem Ausdrucke findet man auf gleiche Weise, wenn man in Bezug auf t differentiirt und dann durch $\frac{dx}{dt}$ dividirt:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}.$$

und so weiter.

Nehmen wir $t = y$, womit festgestellt wird, daß nunmehr y als unabhängige Veränderliche gelten soll; so ist

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5};$$

und so fort.

Wenn man also in einer Gleichung zwischen x und y, in welcher y als Function von x betrachtet wurde, umgekehrt x als Function von y ansehen will; so muß man in ihr statt der Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}\ldots$$

die vorhergehenden Ausdrücke substituiren. So verwandelt sich der Ausdruck

$$\varrho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wenn y zur unabhängigen Veränderlichen werden soll, in folgenden:

$$\varrho=-\frac{\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$$

Unter derselben Bedingung geht die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x - \varepsilon^y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

$$\text{in } \frac{d^2x}{dy^2} + x - \varepsilon^y = 0$$

über.

Die so eben aufgestellten Formeln können auch dazu dienen, das Differential einer umgekehrten Function aus dem der gegebenen Function f(x) herzuleiten. Man versteht nämlich unter umgekehrter Function diejenige Function von y, welche man erhält, wenn man die Gleichung $y = f(x)$ in Bezug auf x auflöst. So ist $x = \varepsilon^y$ die umgekehrte Function von $y = lx$; und $x = arc\,(\sin = y)$ die umgekehrte Function von $y = \sin x$. — Die Gleichung $y = lx$ gibt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, wo x als unabhängige Variabele gilt. Soll y als solche angesehen werden, so hat man zu setzen:

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x} \text{ oder } \frac{dx}{dy} = x;$$

$$\text{d. h. } \frac{d \cdot \varepsilon^y}{dy} = x = \varepsilon^y.$$

Die Gleichung $y = \sin x$ liefert $\frac{dy}{dx} = \cos x$, wo x die unabhängige Veränderliche ist. Will man y dazu machen, so hat man zu setzen:

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos x \text{ oder } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x};$$

$$\text{d. h. } \frac{d\, arc\,(\sin = y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

§. 26. Die Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen kommt öfters bei geometrischen Untersuchungen vor, sobald man von einem Coordinatensystem zu einem andern übergeht. Will man z. B. das rechtwinklige Coordinatensystem, dessen Coordinaten x und y sind, ändern und statt x den Winkel t, welchen der Radiusvector r mit der Achse der x einschließt, als unabhängige Veränderliche einführen; so muß man setzen:

$$x = r \cos t \text{ und } y = r \sin t.$$

Die in Bezug auf t vorgenommenen Differentiationen geben:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos t - r \sin t; \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin t + r \cos t;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cos t - 2 \frac{dr}{dt} \sin t - r \cos t;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \sin t + 2 \frac{dr}{dt} \cos t - r \sin t; \text{ u. s. w.}$$

Setzt man diese Werthe in die aufgestellten allgemeinen Formeln des vorhergehenden Paragraphen, so erhält man die Werthe von

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots.$$

ausgedrückt durch

$$t, r, \frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2} \ldots.,$$

durch deren Substitution in den vorgelegten Ausdruck:

$$\psi \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \right) = 0$$

nur noch t, r, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2} \ldots$ vorkommen werden, welche bekannte Functionen von t sind, wenn man die gegebene Gleichung $r = f(t)$ in Erwägung zieht.

Es sei der Ausdruck

$$w = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{y \frac{dy}{dx} + x},$$

wo x die unabhängige Veränderliche ist. Derselbe geht, wenn x selbst als eine Function einer andern Veränderlichen t angesehen wird, in

$$w = \frac{\frac{dy}{dt} x - \frac{dx}{dt} y}{y \frac{dy}{dt} + x \frac{dx}{dt}}$$

über. Dieser allgemeinere Ausdruck verwandelt sich, wenn man die oben angegebenen Werthe von $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dx}{dt}$ in t, r, $\frac{dr}{dt}$ ausgedrückt substituirt, in folgenden speciellen:

$$w = \frac{r}{\frac{dr}{dt}}.$$

Es sei ferner die Gleichung:

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wo x die unabhängige Veränderliche ist. Es entsteht daraus, wenn x wieder als eine Function von t betrachtet wird, folgende:

$$\varrho = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}.$$

Führt man in die Letztere abermals die Werthe von

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2}$$

ausgedrückt durch r, t, $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d^2r}{dt^2}$ ein; so findet man

$$\varrho = \frac{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich für den besonderen Fall, daß $r = a^t$ ist, auf:

$$\varrho = r\sqrt{1 + (la)^2}$$

§. 27. Die bei der Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen in Frage stehenden Rechnungen bieten auch nicht die geringsten Schwierigkeiten dar, wenn es sich darum handelt, irgend einen aus ersten Differentialen zusammengesetzten Ausdruck, wie z. B. $y\,dx = dt$ oder $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$ u. s. w. als constant anzunehmen. — Es seien die Gleichungen $y = \varphi(t)$ und $y = \frac{dt}{dx}$ wo das Differential dx constant ist. Soll das Differential dt constant angenommen werden, so muß man vorerst die Gleichung $y = \frac{dt}{dx}$ unter einen allgemeinen Gesichtspunkt bringen, in der Weise, daß die beliebige Variable u als unabhängige Veränderliche erscheint. Man bewerkstelligt dieß dadurch, daß man $\frac{\frac{dt}{du}}{\frac{dx}{du}}$ für $\frac{dt}{dx}$ schreibt. Setzt man hierauf in

$y = \frac{\frac{dt}{du}}{\frac{dx}{du}}$ fest, daß u = t ist, was t zur unabhängigen Veränderlichen macht; so kommt $y = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$: woraus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\frac{dy}{dt}}{y^2}, \text{ u. s. w.}$$

Für den Ausdruck

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

hat man zuvor den unter einen allgemeineren Gesichtspunkt gebrachten Ausdruck:

$$\varrho = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}}.$$

Derselbe geht, wenn man darin die eben gefundenen Werthe von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ einführt, in folgenden über:

$$\varrho = \frac{\left\{1 + y^2 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{y\left[y\,\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]}.$$

Die Größe ϱ wäre hiernach durch t ausgedrückt, weil die Derivirten $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ aus der Gleichung $y = \varphi(t)$ hergeleitet werden können: für jeden Werth von t ist folglich ϱ bekannt.

Es seien noch die Gleichungen $y = \varphi(s)$ und

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

wo die Differentiale sich auf x beziehen. Sollen sie auf die unabhängige Veränderliche s übertragen werden, so muß man statt der zweiten Gleichung setzen:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1;$$

woraus durch Differentiation entspringt:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = 0.$$

Für den mehrfach betrachteten Ausdruck

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

erhält man hiernach:

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}{\frac{d^2y}{ds^2}}. = \frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{d^2y}{ds^2}}$$

Um die Größe ϱ durch s allein dargestellt zu erhalten, braucht man bloß die Derivirten $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{d^2y}{ds^2}$ aus der Gleichung $y = \varphi(s)$ herzuleiten und die Substitution in dem Werthe von ϱ auszuführen.

IV. Anwendung der Differentialrechnung auf verschiedene analytische Aufgaben, in denen nur eine unabhängige Veränderliche vorkommt.

1. Untersuchung der unter einer unbestimmten Form erscheinenden Ausdrücke.

§. 28. **Unbestimmte Form** $\frac{0}{0}$. — Wenn Zähler und Nenner einer Bruchfunction $\varphi(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ für einen speciellen Werth $x = a$ zugleich verschwinden, so erscheint dieselbe unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, obschon sie nichts desto weniger einen wahren Werth hat. Dieser wahre Werth würde sich nach Ausscheidung des dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factors herausstellen, welcher für den besonderen Werth $x = a$ beide gleichzeitig annullirt. Die Differentialrechnung gibt nun ein Mittel an die Hand, den in Frage stehenden Werth zu entdecken, da seine Aufsuchung mit jener des

Grenzwerthes zusammenfällt, welchem der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ ohne Aufhören näher rückt, während sich x mehr und mehr dem Werthe a nähert. Dieser Grenzausdruck läßt sich auch vertauschen mit

$$\lim \frac{f(a+h)}{F(a+h)},$$

wo h eine unendlich kleine Größe bedeutet. Nach dem im §. 24 aufgestellten Satze ist aber unter der Voraussetzung, daß die Functionen f(x) und F(x) für x = a gleichzeitig verschwinden und in der Nähe von a continuirlich sind:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a+\vartheta h)}{F'(a+\vartheta h)},$$

woraus für h = 0 entspringt:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)},$$

Sind also f'(a) und F'(a) nicht ebenfalls gleichzeitig Null, so gibt der Bruch $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ den wahren Werth des Quotienten $\frac{f(a)}{F(a)}$ an.

Wären dagegen f'(a) und F'(a) auch zugleich Null, so ließe sich der nämliche Satz auf sie selbst anwenden und es ergäbe sich dann:

$$\frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}; \text{ mithin}$$

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)},$$

wenn f''(x) und F''(x) für x = a auch stetig sind. — Wären f''(a) und F''(a) abermals Null, so bekäme man durch Anwendung des nämlichen Verfahrens:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'''(a)}{F'''(a)}.$$

Ueberhaupt erhält man, wenn die (n — 1) ersten Derivirten von f(x) und F(x) sämmtlich für x = a verschwinden, dagegen $f^{(n)}(x)$ und $F^{(n)}(x)$ für x = a sich nicht gleichzeitig annulliren, den wahren Werth von

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}.$$

Nimmt also eine gebrochene Function einer veränderlichen Größe für einen besonderen Werth der letzteren die Form $\frac{0}{0}$ an, so diffe-

rentiire man Zähler und Nenner der Function gleich oft und so lange hintereinander, bis man zu Derivirten gelangt, welche für gedachten Werth der veränderlichen Größe nicht gleichzeitig sich annulliren. Der Quotient der Werthe, welche diese Derivirten dabei liefern, zeigt den wahren Werth der Bruchfunction in Bezug auf den speciellen Werth der veränderlichen Größe an. Der Werth der Bruchfunction ist Null, wenn $f^{(n)}(a) = 0$ und $F^{(n)}(a)$ von 0 verschieden ist; der Werth derselben wird dagegen unendlich, wenn $F^{(n)}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a)$ von 0 verschieden ist.

Nachstehende Beispiele mögen zur Anwendung der gegebenen Regel dienen.

1) Die Formel $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, welche, wenn n ganz zahlig ist, nichts anders als die Summe der n ersten Glieder der Reihe $1 + x + x^2 \ldots$ ist, wird $\frac{0}{0}$ für $x = 1$. Die Derivirten des Zählers und Nenners sind nx^{n-1} und 1, wonach sich für $x = 1$ die Zahl n als gesuchte Summe gibt, wie es sein muß.

2) Der wahre Werth von $\frac{ax^2 + ac^2 - 2acx}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ für $x = c$ ergibt sich erst nach zwei Differentiationen; derselbe ist gleich $\frac{a}{b}$.

3) $\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x = a$. Nach einmaliger Differentiation des Zählers und Nenners findet man, daß nur der erste noch für $x = a$ verschwindet; der wahre Werth der gegebenen Function ist folglich gleich Null.

4) Die Function $\frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4}$ findet man unendlich für $x = a$.

5) Die transcendente Function $\frac{a^x - b^x}{x}$ wird für $x = 0$ gleich $l\left(\frac{a}{b}\right)$.

6) Den wahren Werth der Function $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ findet man gleich 1 für $x = \frac{\pi}{2}$.

7) Für die Function

$$\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

ergibt sich $\frac{16a}{9}$ als wahrer Werth für $x = a$.

8) Für $\frac{1 - x + lx}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ erhält man -1 als wahren Werth für $x = 1$.

§. 29. **Unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$.** — Die oben angegebene Regel bleibt auch in dem Falle anwendbar, wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ für den Werth $x = a$ unendlich werden, mithin der Quotient alsdann $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheint. Man kann nämlich schreiben

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

wodurch die Aufgabe auf die vorhin behandelte zurückgeführt wird. Man erhält vermittelst der aufgestellten Regel:

$$\frac{\frac{1}{F(a)}}{\frac{1}{f(a)}} = \frac{-\frac{F'(a)}{\{F(a)\}^2}}{-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot \frac{\{f(a)\}^2}{\{F(a)\}^2}; \text{ woraus}$$

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)},$$

so daß der wahre Werth von $\frac{f(a)}{F(a)}$ welcher unter der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$ sich darstellt, mit dem entsprechenden Werthe der Quotienten $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ zusammenfällt.

Wäre $f'(a)$ und $F'(a)$ ebenfalls beide unendlich, so ergäbe sich auf ähnliche Weise

$$\frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}; \text{ mithin}$$

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist einleuchtend, so daß der wahre Werth von $\frac{f(x)}{F(x)}$, wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ nebst deren $(n-1)$ ersten Derivirten für $x = a$ sämmtlich unendlich werden, durch $\frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}$ bestimmt wird, wenn die Derivirten $f^{(n)}(x)$ und $F^{(n)}(x)$ für $x = a$ nicht selbst beide unendlich werden.

Es sei die Function $\frac{a^x}{x}$, in welcher a größer als die Einheit vorausgesetzt wird. Für ins Unendliche wachsende x wächst auch a^x ins Unbegrenzte und die gegebene Function erhält die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$. Es ist aber die erste Derivirte von $a^x = a^x la$ und die von $x = 1$; folglich nimmt die obige Function $\frac{a^x}{x}$ für unendlich wachsende x ins Unbegrenzte zu.

Es sei ferner der Werth der Function $\frac{lx}{x}$ für $x = \infty$ zu bestimmen. Die unmittelbare Substitution gibt die Form $\frac{\infty}{\infty}$. Die Differentiation des Zählers und Nenners liefert aber den Bruch $\frac{1}{x}$, woraus für $x = \infty$ der Werth 0 entspringt.

§. 30. **Unbrauchbarkeit des Verfahrens.** Wenn alle Derivirten von $f(x)$ und $F(x)$ zugleich mit diesen Functionen Null oder unendlich werden, so findet die vorhin aufgestellte Methode der Differentiation keine Anwendung. So z. B. wird man für die Bruchfunction $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}}$, obschon der wahre Werth derselben $(2a)^{\frac{3}{2}}$ ist, wenn $x = a$, dennoch nie zu diesem Werthe durch Differentiation gelangen, da die fraglichen Quotienten der entsprechenden Differentialverhältnisse für $x = a$ entweder $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ werden. In dergleichen Fällen muß man demnach den in Frage stehenden Werth durch andere Verfahrungsweisen zu bestimmen suchen.

Ein allgemeineres Verfahren ist dann folgendes. Man substituire nämlich $a + h$ statt x in die vorgelegte Bruchfunction $\frac{f(x)}{F(x)}$ und entwickele sodann sowohl $f(x)$ als $F(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von h, wobei man gewöhnlich schon bei den ersten Gliedern der Ent-

wickelung stehen bleiben kann. Es verwandelt sich dadurch $\frac{f(x)}{F(x)}$ in:

$$\frac{Ah^m + A'h^{m'} + \text{2c.}}{Bh^n + B'h^{n'} + \text{2c.}},$$

wo A, A', ... B, B' ... bloß a enthalten. In dem letzteren Ausdrucke sind nun die drei Fälle, $m > n$, $m = n$ und $m < n$ zu unterscheiden. Im ersten Falle dividire man Zähler und Nenner durch h^n; man erhält dann:

$$\frac{Ah^{m-n} + A'h^{m'-n} + \text{2c.}}{B + B'h^{n'-n} + \text{2c.}}.$$

Im zweiten Falle dividire man oben und unten durch $h^m = h^n$; man bekommt so:

$$\frac{A + A'h^{m'-m} + \text{2c.}}{B + B'h^{n'-m} + \text{2c.}}.$$

Im dritten Falle dividire man durch h^m; man hat dergestalt:

$$\frac{A + A'h^{m'-m} + \text{2c.}}{Bh^{n-m} + B'h^{n'-m} + \text{2c.}}.$$

Macht man nun in diesen drei Fällen, wie es sein muß, $h = 0$; so findet man im ersten Falle das Resultat Null, im zweiten $\frac{A}{B}$, im dritten unendlich. In den drei Fällen hängt also der wahre Werth von den ersten Gliedern der beiden Reihen ab, welche die Entwickelungen des Zählers und Nenners darbieten, wenn in ihnen $a + h$ statt x gesetzt worden. Die oben angeführte Bruchfunction $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}}$ geht für $x = a + h$ in $\frac{(2ah + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}} = (2a + h)^{\frac{3}{2}}$ über, woraus für $h = 0$ der gesuchte wahre Werth $(2a)^{\frac{3}{2}}$ entspringt.

In der Function

$$\frac{(x - a)\sqrt{x - b} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{2a} - \sqrt{x + a} + \sqrt{x - a}},$$

welche für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, setze man, wie es die Regel vorschreibt, $a + h$ statt x. Man bekommt dadurch

$$\frac{\sqrt{h} + h\sqrt{a - b} + \text{2c.}}{\sqrt{h} - \frac{1}{2}\,h\,(2a)^{-\frac{1}{2}}\ \text{2c.}};$$

woraus, wenn gehörig reducirt und dann $h = 0$ gesetzt worden ist, sich 1 als wahrer Werth herausstellt.

Für die Function

$$\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + x - a}{(1 + x - a)^3 - 1}$$

findet man, nachdem $x = a + h$ gesetzt, dann gehörig reducirt und zuletzt $h = 0$ gemacht worden, $\frac{1}{3}$ als gesuchten wahren Werth, wenn $x = a$ ist.

§. 32. **Sonstige unbestimmte Formen.** Außer den zwei unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ kommen noch andere unbestimmte Formen vor, welche eine gegebene Function für einen speciellen Werth der Veränderlichen annehmen kann; allein dieselben lassen sich immer durch eine angemessene Umwandlung der Function auf die beiden ersteren zurückführen, so daß man gleichfalls im Stande ist, über ihre eigentliche Bedeutung zu urtheilen.

Man habe zwei Functionen, von denen die eine $f(x)$ für $x = a$ Null, die andere $F(x)$ aber unendlich wird; das Produkt $f(x) \cdot F(x)$ erhält dann die Form $0 \cdot \infty$. Um den wahren Werth desselben zu finden, schreibe man statt des Produktes $f(x) \cdot F(x)$ den gleichgeltenden Quotienten $\frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}$, welcher für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, deren wahrer Sinn nach dem Vorhergehenden sich leicht ermitteln läßt. Als Beispiel diene die Function $(1 - x) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, welche für $x = 1$ in $0 \cdot \infty$ übergeht. Allein die Function ist mit dem Quotienten $\frac{1 - x}{\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2}\pi x\right)}$ gleichgeltend, welcher $\frac{0}{0}$ wird für $x = 1$ und dessen wahrer Werth nach der früher angegebenen Regel gleich $\frac{2}{\pi}$ ist.

Es sei der Ausdruck $\{F(x)\}^{f(x)}$, welcher für $x = a$ eine der drei unbestimmten Formen: 0^0, ∞^0, 1^∞ annimmt. Man hat zunächst die identische Gleichung:

$$\{F(x)\}^{f(x)} = e^{lF(x) \cdot f(x)}.$$

Es ist also nichts weiter nöthig, als den Werth des Exponenten $lF(x) \cdot f(x)$, welcher für $x = a$ unter der Form $0 \cdot \infty$ erscheint, zu untersuchen. Ist b der wahre Werth desselben für $x = a$, so ist der Werth der Function selbst $= e^b$.

Zur Uebung folgende Beispiele. Die Function $(ax^2 + bx)^x$ verwandelt sich für $x = 0$ in 0^0. Mit Hülfe der angegebenen Regel findet man 1 als wahren Werth. — Der Ausdruck $\left(\frac{1}{x}\right)^{\tang x}$ erscheint für $x = 0$ unter der Form ∞^0. Es ergibt sich 1 als wahrer Werth des in Frage stehenden Ausdruckes für den speciellen Fall. — Die Function $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ bekommt für $x = 0$ die Form 1^∞; wendet man die gegebene Regel an, so erhält man e als wahren Werth der vorgelegten Function für die besondere Größe der Veränderlichen.

2. Maxima und Minima der Functionen einer Veränderlichen.

§. 32. **Kennzeichen des Maximums und Minimums.** Wenn eine Function $f(x)$, während sich die ihr zu Grunde liegende veränderliche Größe stets in demselben Sinne ändert, aus dem Zustand des Wachsens in jenen des Abnehmens übergeht; so existirt ein gewisser Werth a von x, für welchen $f(x)$ sowohl $> f(a + h)$ als auch $> f(a - h)$ ist, wie klein man auch h nehmen mag: man sagt in diesem Falle, die Function $f(x)$ wird für $x = a$ ein Größtes oder Maximum. Geht hingegen die Function $f(x)$ aus dem Zustand des Abnehmens in jenen des Wachsens über, so existirt ebenfalls ein Werth a von x, für welchen bei gehöriger Kleinheit von h sowohl $f(a) < f(a + h)$ als auch $f(a) < f(a - h)$ ist: für diesen Werth a von x heißt dann die Function $f(x)$ ein Kleinstes oder Minimum. Im Zustand des Maximums wird also die Function größer und im Zustand des Minimums kleiner als ihre unmittelbar vorangehenden und unmittelbar nachfolgenden Werthe oder ihre angrenzenden Nachbarwerthe nach beiden Seiten hin. Da eine Function in ihrem Verlaufe mehrmals aus dem Wachsen in das Abnehmen und umgekehrt aus dem Abnehmen in das Wachsen übergehen kann, so sind auch mehrere Maxima oder Minima derselben möglich. Es versteht sich, daß hier bloß von relativen größten und kleinsten Werthen der Function die Rede ist. Sind sämmtliche relative Maxima oder Minima einer Function bekannt, so wird sich aus denselben leicht ihr absolutes Maximum oder Minimum ausscheiden lassen.

Ob nun dergleichen Maxima oder Minima eine gegebene Function zuläßt oder nicht, darüber können wir mit Hülfe eines im Paragraphen 23 mitgetheilten Satzes entscheiden, demzufolge die Function $f(x)$ im Wachsen oder Abnehmen begriffen ist, je nachdem die Derivirte $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Die in dem Intervalle von $x - h$ bis $x + h$ stetige Function $f'(x)$ kann aber innerhalb gedachten Intervalles ihr Vorzeichen ändern, wenn sie innerhalb desselben durch Null geht oder verschwindet: d. h. man findet die in Frage stehenden Werthe von x, für welche die Function $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum werden kann, dadurch, daß man die Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ sucht.

Um zu entscheiden, ob ein dergestalt gefundener Werth a von x einem Maximum oder Minimum entspricht, nehmen wir nach §. 24 die beiden Ausdrücke:

$$f(a - h) = f(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a - \vartheta h),$$

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a + \vartheta_1 h),$$

in denen ϑ und ϑ_1 positive ächte Brüche bezeichnen, zu Hülfe. Ist nun $f''(a)$ nicht Null, so kann man, wegen des unbegrenzten Kleinerwerdens von h, $f''(a - \vartheta h)$ und $f''(a + \vartheta_1 h)$ mit denselben Vorzeichen wie $f''(a)$ behaftet ansehen. Folglich ist, wenn $f''(a)$ positiv ausfällt, $f(a - h) > f(a)$ und ebenso $f(a + h) > f(a)$: d. h. $f(a)$ ist in diesem Falle ein Minimum. — Fällt dagegen $f''(a)$ negativ aus, so ist $f(a - h)$ sowohl wie $f(a + h) < f(a)$; d. h. $f(a)$ wird dann zu einem Maximum.

Wäre aber $f''(a)$ auch Null, so hat man nach §. 24 die beiden Ausdrücke:

$$f(a - h) = f(a) - \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a - \vartheta h),$$

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a + \vartheta_1 h).$$

Ist nun $f'''(a)$ nicht Null, so kann man wieder, wegen des unbestimmten Kleinerwerdens von h, die Größen $f'''(a)$, $f'''(a - \vartheta h)$ und $f'''(a + \vartheta_1 h)$ mit einerlei Vorzeichen behaftet voraussetzen. Für ein positives $f'''(a)$ ist dann:

$$f(a + h) > f(a) \text{ und } f(a - h) < f(a);$$

während für ein negatives $f'''(a)$ wird:

$$f(a + h) < f(a) \text{ und } f(a - h) > f(a).$$

Beide Ungleichheiten führen also zu dem Schlusse, daß in dem Falle

außer $f'(a)$ auch $f''(a)$ verschwindet, $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist, wenn nicht zu gleicher Zeit auch $f'''(a)$ Null wird. Trifft das Letztere aber ein, so ist $f(a)$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f''''(a)$ negativ oder positiv ausfällt. Ueberhaupt kann für einen Werth von x der Bedingungsgleichung $f'(x) = 0$ die Function $f(x)$ nur dann ein Maximum oder Minimum werden, wenn in der Reihe der Differentialquotienten der erste, welcher für jenen Werth nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist; und zwar wird ein Maximum oder Minimum eintreten, je nachdem sich dieser Differentialquotient negativ oder positiv herausstellt.

§. 33. Wie die vorstehende Regel angewendet wird, mögen folgende Beispiele zeigen.

1) Die Werthe von x zu finden, welche die Function

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

zu einem Maximum oder Minimum machen. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 48x + 44.$$

Um die fraglichen Werthe von x zu erhalten, muß man die reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

suchen. Man findet bald, daß die Gleichung die reellen Wurzeln 1, 2, 3 hat. Diese Werthe muß man nun statt x in den zweiten Differentialquotienten oder in die von dem gemeinschaftlichen Factor 4 befreite Größe

$$3x^2 - 12x + 11$$

einführen, um zu sehen, wie sich dieselbe für den einen oder den andern jener Werthe von x herausstellt. Da nun diese Größe für $x = 1, 2, 3$ beziehungsweise die Werthe $2, -1, 2$ erhält; so wird die vorgelegte Function für $x = 1, 2, 3$ bezüglich ein Minimum, Maximum, Minimum. Die den Werthen $x = 1, 2, 3$ zugehörigen Functionswerthe sind 3, 4, 3.

2) Für die Function $y = \frac{x}{1 + x^2}$ erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = -2x \frac{1 + \frac{dy}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Aus der Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ entspringt $x = \pm 1$. Der

zweite Differentialquotient wird für $x = 1$ negativ und für $x = -1$ positiv; es findet daher im ersten Fall ein Maximum, und im zweiten ein Minimum statt.

3) Die Zahl a in zwei Theile x und $(a - x)$ dergestalt zu zerlegen, daß das Produkt

$$y = x^m (a - x)^n$$

ein Maximum oder Minimum wird. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1} (a - x)^{n-1} \left\{ma - x(m + n)\right\}, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{m-2}(a - x)^{n-2}\left\{m(m-1)(a-x)^2 - 2mnx(a-x) + n(n-1)x^2\right\}.$$

Die erste Derivirte gleich Null gesetzt, gibt:

$$x = 0,\ x = a \text{ und } x = \frac{ma}{m + n}.$$

Der zweite Differentialquotient wird für den letzten dieser Werthe negativ; folglich entspricht demselben ein Maximum der Function, welches ist: $m^m\ n^n \left(\frac{a}{m + n}\right)^{m+n}$. — Für die zwei anderen Werthe $x = 0$ und $x = a$ wird der zweite Differentialquotient nur dann nicht verschwinden, wenn $m = 2$ und $n = 2$ ist. In beiden Fällen wird dieser Ausdruck positiv; mithin entsprechen jenen Werthen von x zwei Minima der Function. Das letzte Resultat bleibt überhaupt für alle geraden Werthe von m und n bestehen, weil der erste nicht verschwindende Differentialquotient stets bezüglich von der Ordnung m oder n ist. Bei ungeraden Werthen von m und n hingegen entspricht den Werthen $x = 0$ und $x = a$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

4) Die Zahl x zu finden, für welche die xte Wurzel ein Maximum ist. Man hat $y = x^{\frac{1}{x}}$, woraus

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x} - 2}\ (1 - lx), \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{\frac{1}{x} - 4}\ (1 - lx)^2 - x^{\frac{1}{x} - 3}\ (3 - 2lx).$$

Die erste Derivirte gleich Null gesetzt, gibt den Werth $x = e$. Für diesen Werth nimmt der zweite Differentialquotient den Werth $- e^{\frac{1}{e} - 3}$ an, wird also negativ: die Function $x^{\frac{1}{x}}$ ist folglich ein Maximum für $x = e$.

5) Unter allen Dreiecken, welche dieselbe Basis a und gleichen Umfang 2p haben, dasjenige zu finden, welches den größten Flächeninhalt hat. Es ist, wenn der Inhalt des Dreiecks mit y und eine der unbekannten Seiten mit x bezeichnet wird:

$$y = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}.$$

Die Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ liefert $x = \frac{2p-a}{2}$; das gesuchte Dreieck ist folglich gleichschenklig.

6) Es soll in einen Kreis, dessen Halbmesser = a, dasjenige Rechteck construirt werden, welches den größten Flächeninhalt hat. Ist x die Senkrechte aus dem Mittelpunkt auf die Sehne, d. h. auf die Seite des Rechtecks, so hat man, wenn y den Flächeninhalt desselben darstellt:

$$y = 4x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Man erhält fürs Maximum den Werth $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, woraus folgt, daß das gesuchte Rechteck ein Quadrat ist.

7) Unter allen geraden Cylindern von gegebenem Volumen a denjenigen zu finden, für welchen die Summe der Seitenfläche und der einen Grundfläche ein Minimum ist. Ist x der Halbmesser der Grundfläche und y die Größe, welche ein Minimum werden soll; so hat man

$$y = \frac{2a}{x} + \pi x^2.$$

Daraus entspringt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a}{x^2} + 2\pi x, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4a}{x^3} + 2\pi.$$

Die Bedingungsgleichung $-\frac{2a}{x^2} + 2\pi x = 0$ liefert $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$, für welchen Werth der zweite Differentialquotient positiv wird; für den gefundenen Werth von x ist daher die Function ein Minimum.

8) Unter allen Kegeln, die eine bestimmte Seitenlänge a haben, denjenigen zu finden, welcher den größten cubischen Inhalt hat. Ist x der Halbmesser der Grundfläche und y das Volumen, so erhält man

$$y = \frac{\pi x^2}{3}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Man findet fürs Größte den Werth $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

§. 34. **Ausnahmsfälle.** Es kann sich ereignen, daß der aus der Bedingungsgleichung $f'(x) = 0$ entnommene Werth a von x den Differentialquotienten der zweiten Ordnung nebst den folgenden unendlich groß macht, und es unentschieden bleibt, ob das Unendliche positiv oder negativ sei $\left(\frac{1}{+0} \text{ oder } \frac{1}{-0}\right)$. In einem solchen Falle ist die oben angegebene Regel unbrauchbar, um über die Existenz des Maximums oder Minimums zu entscheiden; es bleibt hier nichts weiter übrig, als den Lauf der Function an dergleichen Stellen einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen, indem man successive $a + h$ und $a - h$ statt x substituirt und die Entwickelung von $f(a + h)$ und $f(a - h)$ nach Potenzen von h bewerkstelligt. Fällt dann $f(a + h) - f(a)$ sowohl wie $f(a - h) - f(a)$ für ein der Null unendlich nahe kommend gedachtes h negativ aus, so ist $f(a)$ ein Maximum; dasselbe wird dagegen ein Minimum, wenn jene Differenzen bei einer derartigen Voraussetzung beide positiv ausfallen. Haben aber die erwähnten zwei Differenzen verschiedene Vorzeichen, so ist $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum. Daß alles dieß dem Charakter des Maximums und Minimums vollkommen entsprechend ist, fällt sogleich in die Augen.

Für $y = b + (x - a)^{\frac{5}{3}}$ hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}(x - a)^{\frac{2}{3}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{10}{9}(x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Aus $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt $x = a$, wodurch $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich wird. Man findet $f(a + h) - f(x) = + h^{\frac{5}{3}}$ und $f(a - h) - f(a) = - h^{\frac{5}{3}}$; Die gegebene Function wird mithin weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

Für $y = b + (x - a)^{\frac{4}{3}}$ findet man

$$f(a + h) - f(a) = f(a - h) - f(a) = h^{\frac{4}{3}}.$$

Dem Werthe $x = a$ entspricht folglich das Minimum b.

Die früher angegebene Regel läßt gleichfalls keine Anwendung zu, wenn die Derivirte $f'(x)$ ihr Vorzeichen nicht continuirlich mittelst Durchgangs durch die Null ändert, sondern von dem Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven durch das Unendliche übergeht. In diesem Falle muß man dann wieder, um sich über das Vorhanden- oder Nichtvorhandensein des Maximums oder Miuimums

zu vergewissern, auf eine ähnliche Weise, wie vorhin die Functionswerthe an einer solchen besonderen Stelle genauer untersuchen.

Für die Function $y = b + c\,(x - a)^{\frac{2}{3}}$ ist der erste Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\,c\,(x - a)^{-\frac{1}{3}},$$

welcher für $x = a$ unendlich wird. Weil nun

$$f(a - h) - f(a) = f(a + h) - f(a) = c h^{\frac{2}{3}}$$

ist, so wird $f(a)$ ein Minimum oder Maximum sein, je nachdem c positiv oder negativ ist.

§. 35. **Maxima und Minima bei impliciten Functionen.** Hat man die ungesonderte Gleichung $f(x, y) = 0$, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ und}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dy\,dx} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums der Function y liefert:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = 0,$$

wodurch die dritte der obigen drei Gleichungen sich auf:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

reducirt. Mittelst der Gleichungen

$$f(x, y) = 0 \text{ und } \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = 0$$

werden die in Frage stehenden Werthe von x und y bestimmt und dann untersucht, welches Vorzeichen der Werth von

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{d^2f}{dx^2}}{\frac{df}{dy}}$$

für die dergestalt gefundenen Werthe von x und y annimmt. Das Verfahren werden folgende zwei Beispiele erläutern.

1) Es sei $y^2 - 2mxy + x^2 = a^2$. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2m\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1}{y - mx}.$$

Aus $\frac{dy}{dx} = 0$ entspringt $my - x = 0$. Verbindet man diese letztere Gleichung mit der ursprünglich gegebenen, so findet man:

$$x = \frac{\pm ma}{\sqrt{1 - m^2}} \text{ und } y = \frac{\pm a}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

Diese Werthe in den Ausdruck des zweiten Differentialquotienten eingeführt, liefern

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mp 1}{a\sqrt{1 - m^2}}.$$

Mithin ist von den oben für y gefundenen Werthen der eine ein Größtes, der andere ein Kleinstes.

2) Die Gleichung $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ gibt:

$$\frac{dy}{dx}(y^2 - ax) = ay - x^2 \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2}(y^2 - ax) = 2\left[a\frac{dy}{dx} - x - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Aus $\frac{dy}{dx} = 0$ entspringt die Gleichung

$$ay - x^2 = 0,$$

welche mit der ursprünglichen

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

verbunden für x die Werthe

$$x = 0 \text{ und } x = a\sqrt[3]{2},$$

und für y die entsprechenden Werthe

$$y = 0 \text{ und } y = a\sqrt[3]{4}$$

liefert. Substituirt man die zusammengehörigen Werthe

$$x = a\sqrt[3]{2} \text{ und } y = a\sqrt[3]{4}$$

in die Gleichung

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x = 0,$$

auf welche sich der durch zweimaliges Differentiiren erhaltene Ausdruck reducirt, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt wird; so findet man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a},$$

woraus folgt, daß $x = a\sqrt[3]{2}$ die Function y zu einem Maximum

macht. — Setzt man die Werthe $x = 0$ und $y = 0$ in die Gleichung für $\frac{dy}{dx}$, so bekommt man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Indem man aber die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(y^2 - ax) + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

noch einmal differentiirt, entsteht:

$$(y^2 - ax)\frac{d^3y}{dx^3} + \left(6y\frac{dy}{dx} - 3a\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2 = 0,$$

aus welcher für $x = 0$ und $y = 0$ sich ergibt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3a},$$

d. h. für $x = 0$ wird die Function y ein Minimum.

§. 36. **Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.** Es kann vorkommen, daß der Ausdruck $u = f(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht und dabei die Bedingung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllt werden soll. In einem solchen Falle ist eigentlich nur eine unabhängige Veränderliche x vorhanden und es muß für den Bestand des Maximums oder Minimums der Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$ Genüge gethan werden. Dieß gibt in vorliegendem Falle, wo u außer x noch die abhängige Veränderliche y enthält, die Gleichung:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Differentiirt man auch die Bedingungsgleichung $\varphi(x, y) = 0$, so erhält man:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus den beiden letzteren Gleichungen entspringt:

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

welches Resultat in Verbindung mit der Bedingungsgleichung $\varphi(x, y) = 0$ zur Bestimmung der in Frage stehenden Werthe von x und y hinreicht. — Es erübrigt dann noch zu untersuchen, welches Vorzeichen $\frac{d^2u}{dx^2}$ für die dergestalt gefundenen Werthe von x und y bekommt.

Zur Erläuterung des Verfahrens sollen ebenfalls zwei Beispiele gegeben werden:

1) Aus den vier Seiten a, b, c, e das Viereck von größtmöglichem Inhalt zu construiren. Ist x der von a und b, y der von c und e eingeschlossene Winkel, so hat man für die Fläche des Vierecks den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} ab \sin x + \frac{1}{2} ce \sin y,$$

welcher, oder auch das Doppelte desselben, ein Maximum werden soll; man muß daher $u = ab \sin x + ce \sin y$ setzen. Für die Diagonale, welche den Winkeln x und y gegenüber liegt, hat man die beiden Ausdrücke

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos x \text{ und } c^2 + e^2 - 2ce \cos y,$$

woraus die Bedingungsgleichung

$$\varphi(x, y) = a^2 + b^2 - c^2 - e^2 - ab \cos x + 2ce \cos y = 0$$

sich ergibt. Durch Differentiation entsteht nun:

$$\frac{du}{dx} = ab \cos x + ce \operatorname{sos} y \cdot \frac{dy}{dx} \text{ und}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2ab \sin x - 2ce \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Macht man $\frac{du}{dx} = 0$ und eliminirt $\frac{dy}{dx}$, so kommt:

$$2abce (\cos x \sin y + \sin x \cos y) = 0, \text{ d. h.}$$

$$(x + y) = 0 \text{ oder } x + y = \pi,$$

weil x und y die Winkel eines Vierecks sind. Man findet dann weiter, wegen

$$\frac{dy}{dx} = -1, \frac{d^2u}{dx^2} = -(ab \sin x + ce \sin y).$$

Da dieser Ausdruck negativ bleibt, wegen $x < \pi$ und $y < \pi$; so gibt die Gleichung $x + y = \pi$ ein Maximum für die vorliegende Function $u = ab \sin x + ce \sin y$.

2) Es sei $u = 5x + 3y$; man soll, unter der Bedingung $\varphi(x, y) = 4 \sin x - 3 \cos y = 0$, die Werthe für die Bogen x, y (im ersten Quadranten gedacht) finden, für welche der Ausdruck u ein Maximum oder Minimum wird. — Man hat zuerst:

$$\frac{du}{dx} = 5 + 3 \cdot \frac{dy}{dx}$$

dann

$$\frac{d\varphi}{dx} = 4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Macht man $\frac{du}{dx} = 0$ und eliminirt aus vorstehenden Gleichungen den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, so kommt:

$$4 \cos x - 5 \sin y = 0,$$

und hiermit die Bedingung $\varphi(x, y) = 4 \sin x - 3 \cos y = 0$ verbunden, ergibt sich:

$$\sin x = \frac{9}{16}; \cos x = \frac{5\sqrt{7}}{16}; \sin y = \frac{\sqrt{7}}{4}; \cos y = \frac{3}{4}.$$

Um zu entscheiden, ob für diese Werthe der Ausdruck u ein Maximum oder Minimum wird, sucht man

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sin x \cdot \sin^2 y - 4 \cdot \cos^2 x \cdot \cos y}{\sin^3 y}.$$

Setzt man die für sin x, cos x, sin y, cos y gefundenen Werthe in letztere Gleichung, so erhält man:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{16}{\sqrt{7}}.$$

Es liefern also die angegebenen Werthe für u ein Maximum, dessen Größe $= 5 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{9}{16}\right) + 3 \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{3}{4}\right) = 5{,}155$ ist.

3) Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe.

§. 37. **Die Taylor'sche Reihe.** Die Betrachtung der Differentialquotienten von höheren Ordnungen bietet uns ein Mittel dar, die Größe der Veränderung der Function anzugeben, wenn man die Aenderung der ihr zu Grunde gelegten Veränderlichen kennt, oder mit anderen Worten den Werth von $f(x + h)$ mittelst des Werthes von $f(x)$ zu bestimmen, wenn die Natur der Function f nebst den Werthen von x und h bekannt sind. Es besteht nämlich nach §. 23, wenn die Function $f(x)$ nebst ihrer Derivirten $f'(x)$ endlich und stetig bleibt, während x bis auf $x + h$ sich ändert, die Relation:

$$f(x + h) - f(x) = h f'(x + \vartheta h),$$

welche auch in der Form:

$$f(x + h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) = h \left\{ f'(x + \vartheta h) - f' x \right\};$$

oder, wenn

$$h \left\{ f'(x + \vartheta h) - f'(x) \right\} = \varphi(h)$$

gesetzt wird, in der Form:

$$f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) = \varphi(h)$$

dargestellt werden kann. Die Function $\varphi(h)$ ist hier unbekannt; man weiß jedoch von ihr, daß sie wie ihre erste Derivirte $\varphi'(h) = f'(x+h) - f'(x)$ verschwindet, wenn h Null wird, und daß ihre zweite Derivirte $\varphi''(h) = f''(x+h)$ ist. Nach dem Lehrsatz des Paragraphen 24 hat man aber, wenn $\varphi''(h)$ von 0 bis h, oder $f''(x)$ von x bis $x + h$ endlich und continuirlich bleibt:

$$\varphi(h) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x + \vartheta h).$$

Es ist demnach jetzt:

$$f(x+h) - f(x) - h f'(x) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x + \vartheta h)$$

wofür wir schreiben können:

$$f(x+h) - f(x) - h f'(x) - \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} \left\{ f''(x + \vartheta h) - f''(x) \right\}.$$

Setzen wir

$$\frac{h^2}{1 \cdot 2} \left\{ f''(x + \vartheta h) - f''(x) \right\} = \psi(h),$$

so bekommen wir:

$$f(x+h) - f(x) - h f'(x) - \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) = \psi(h).$$

Die Function $\psi(h)$ ist hier wieder unbekannt; nur wissen wir von ihr, daß sie nebst ihren zwei ersten Derivirten verschwindet, wenn h Null wird und daß ihre dritte Derivirte $\psi'''(h) = f'''(x+h)$ ist. Nach dem angeführten Lehrsatze ist dann aber

$$\psi(h) = \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x + \vartheta h),$$

wobei jedoch $\psi'''(h)$ von 0 bis h oder $f'''(x)$ von x bis $x + h$ stetig und endlich bleiben muß. Vermittelst dieses Werthes wird nunmehr:

$$f(x+h) - f(x) - h f'(x) - \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) = \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x + \vartheta h), \text{ oder}$$

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x + \vartheta h).$$

Wie diese Betrachtungen fortzusetzen sind, ist unschwer einzusehen. Man hat in Folge derselben, wenn die Function f(x) nebst ihren Differentialquotienten bis zum nten inclusive in dem Intervalle von x bis $x + h$ stetig und endlich bleibt, die Formel:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) \ldots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(x + \vartheta h).$$

Diese wichtige Formel der Differentialrechnung heißt die Taylor'sche Reihe, weil der Engländer Taylor sie zuerst aufgestellt hat.

Man kann also mittelst der Taylor'schen Reihe den Werth von $f(x+h)$ angeben, wenn die Functionen $f(x), f'(x), f''(x) \ldots f^{(n)}x$ innerhalb des Intervalls von x bis $x+h$ sämmtlich stetig sind. Das letzte Glied der Reihe ist $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$ multiplicirt mit einem gewissen Factor. Dieser Factor stimmt mit einem von den Werthen überein, welchen die Function $\frac{d^n \cdot f(x)}{dx^n}$ innerhalb gedachten Intervalls annehmen muß. Obschon dieser Werth im Allgemeinen unbekannt ist, so erhält man doch eine obere Grenze für $f(x+h)$, wenn man statt $f^{(n)}(x+\vartheta h)$ einen Werth setzt, der größer ist als der größte Werth von $\frac{d^n \cdot f(x)}{dx^n}$ und eine untere Grenze, wenn man statt $f^n(x+\vartheta h)$ einen Werth substituirt, der kleiner ist als der kleinste Werth von $\frac{d^n \cdot f(x)}{dx^n}$ in gedachtem Intervall.

Zugleich ist ersichtlich, vorausgesetzt daß die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von x bis $x+h$ stetig ist, daß die Taylor'sche Reihe nothwendig convergirt und sich immer mehr einer gewissen Grenze $f(x+h)$ nähert, sobald

$$\frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot f^n(x+\vartheta h)$$

kleiner, als jede gegebene kleine Größe wird, wenn man n hinlänglich groß nimmt.

§. 38. **Die Maclaurin'sche Reihe.** Macht man in der Taylor'schen Formel $x = 0$ und setzt dann x statt h; so erhält man:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) \ldots + \frac{x^n \cdot f^{(n)}(\vartheta x)}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

wo ϑ eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl darstellt. Man bekommt eine obere und untere Grenze von $f(x)$, wenn in dem letzten Gliede statt $f^{(n)}(\vartheta x)$ der größte und kleinste Werth gesetzt wird, welchen dieser Differentialquotient in dem Intervall von 0 bis x annehmen kann. Die letzte Formel, welche dazu dient, $f(x)$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe von x zu entwickeln, wenn die Functionen $f(x), f'(x), f''(x) \ldots$ endlich und stetig innerhalb des Intervalles von 0 bis x bleiben, ist unter dem Namen der Maclau-

rin'schen Reihe bekannt, obschon sie bereits früher von Stirling gefunden sein soll.

Setzt man in der Taylor'schen Formel $h = a - x$ und vertauscht hierauf a mit x und x mit a; so findet man

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) \ldots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}[a + \vartheta(x-a)],$$

wo die Function f(x) nebst ihren Differentialquotienten bis zum nten inclusive endlich und stetig von $x = a$ bis $x = a + h$ sein müssen.

Sobald eine beliebige Function f(x) in eine Reihe nach steigenden Potenzen ihrer Variabeln sich entwickeln läßt, so fällt diese Reihe mit der Maclaurin'schen Formel zusammen. Es sei also auf irgend eine Weise $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ gefunden worden, wo A, B, C... constante Coefficienten sind. Wenn nun in demselben Intervall die Maclaurin'sche Reihe

$$f(x) = f(0) + x \frac{f'(0)}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) \text{ ꝛc.}$$

statt haben soll; so gibt der Satz den unbestimmten Coefficienten:

$$A = f(0);\ B = \frac{f'(0)}{1};\ C = \frac{1}{2} f''(0) \text{ u. s. w.}$$

Wenn die Function in eine Reihe nach ganzen steigenden Potenzen von h fortschreitet, so ist diese Reihe mit der Taylor'schen Formel gleichlautend. Wiederum liefert nämlich die vorausgesetzte Gleichheit der Ausdrücke

$$f(x+h) = \psi(x) + h\psi_1(x) + h^2\psi_2(x) + \text{ ꝛc. und}$$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \text{ ꝛc.}$$

durch die Methode der unbestimmten Coefficienten die Gleichungen:

$$\varphi(x) = f(x);\ \varphi_1(x) = \frac{f'(x)}{1};\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2} f''(x) \text{ u. s. w.}$$

§. 39. **Beispiele zu den Theoremen von Taylor und Maclaurin.** Der Taylor'sche Lehrsatz gibt für $(x+h)^m$ den Ausdruck:

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} (x + \vartheta h)^{m-n} h^n.$$

Es liegt der absolute Werth von $x + \vartheta h$ zwischen denen von x und $x + h$, mithin auch der Werth von $(x + \vartheta h)^{m-n}$ zwischen denen von x^{m-n} und $(x+h)^{m-n}$, so oft wenigstens der absolute Werth von h kleiner ist, als derjenige von x. Der Werth von $(x+h)^m$ liegt hiernach zwischen den beiden Werthen, welche diesen zwei Grenzen entsprechen.

Für log(x + h) liefert der Taylor'sche Lehrsatz:

$$\log(x+h) = \log x + \log \varepsilon \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} \cdots \pm \frac{h^n}{n(x+\vartheta h)^n}\right).$$

Es liegt der Rest der Reihe zwischen den beiden Factoren $\frac{h^n}{nx^n}$ und $\frac{h^n}{n(x+h)^n}$ multiplicirt mit $\pm \log \varepsilon$.

Für die Exponentialfunction a^x gibt der Maclaurin'sche Satz:

$$a^x = 1 + x(la) + \frac{x^2(la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3(la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots + \frac{x^n(la)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} a^{\vartheta x}.$$

Die beiden Grenzen, zwischen denen das letzte Glied der Reihe enthalten ist, sind

$$\frac{x^n(la)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \text{ und } \frac{x^n(la)^n a^x}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Für die goniometrischen Functionen sin x und cos x findet man mittelst der Maclaurin'schen Formel:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdots + \frac{x^{n-2} \sin (n-2)\frac{\pi}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)} + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \vartheta x\right) \text{ und}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdots + \frac{x^{n-2} \cos (n-2)\frac{\pi}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)} + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \vartheta x\right).$$

Da der Werth des Sinus und Cosinus eines beliebigen Bogens stets zwischen − 1 und + 1 enthalten ist, so liegen die letzten Glieder dieser zwei Reihen immer zwischen den Grenzen $-\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$ und $+\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$.

§. 40. **Convergenz der Maclaurin'schen und Taylor'schen Reihe.** Die in's Unendliche fortlaufende Maclaurin'sche und Taylor'sche Reihe können nur so lange als übereinstimmend mit einer bestimmten endlichen Function betrachtet werden, als diese Reihen zu der Classe der sogenannten convergirenden Reihen gehören. Es wird darum nöthig sein, daß wir uns vor allen Dingen nach einem Merkmal umsehen, woran man die Convergenz einer Reihe mit Sicherheit erkennen könne. Obschon nun dergleichen Kennzeichen in der algebraischen Analysis angegeben sind, so wollen wir doch dieses Thema wegen seiner

Wichtigkeit ganz unabhängig davon hier noch einmal kurz behandeln, d. h. also, die Convergenzbedingungen für eine gegebene Reihe aufsuchen, oder mit anderen Worten die Bedingungen aufstellen, welche die Reihe erfüllen muß, wenn sie mit einer bestimmten endlichen Function gleichbedeutend sein soll.

Wir betrachten zu diesem Behuf eine Reihe von Größen, wie $u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n \ldots$, die dergestalt beschaffen sind, daß der Werth einer jeden durch ihre Stelle bestimmt wird, oder daß irgend eine von ihnen eine gegebene Function $\varphi(n)$ ihrer Stellenzahl ist. — Um eine erste Bedingung zu erhalten, woran man erkennen könne, ob eine Reihe convergent oder divergent sei, suche man den Grenzwerth, welchem sich der Ausdruck $(\varphi_n)^{\frac{1}{n}}$ für unausgesetzt wachsende n nähert. Die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \ldots\ldots$$

wird dann eine convergente oder divergente sein, je nachdem gedachter Grenzwerth L kleiner oder größer als 1 ist. In dem ersteren Falle, wo $L < 1$, sei α eine zwischen 1 und L eingeschaltete Größe, nämlich $\alpha > L$, aber $\alpha < 1$. Da nun für ein hinlänglich großes n der Ausdruck $(\varphi_n)^{\frac{1}{n}}$ dem Grenzwerth L beliebig nahe gebracht werden kann, mithin von der Größe α übertroffen wird; so hat man

$$(\varphi_n)^{\frac{1}{n}} < \alpha, \text{ oder } u_n = \varphi(n) < \alpha^n.$$

Auf diese Weise werden die Glieder der Reihe

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2} \ldots.$$

beziehungsweise kleiner als die entsprechenden Glieder der geometrischen Progression $\alpha^n, \alpha^{n+1}, \alpha^{n+2} \ldots.$ sein. Die letztere Reihe convergirt aber für $\alpha < 1$, folglich wird dieß auch von der Reihe

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \ldots.$$

gelten. — Im zweiten Fall, wo $L > 1$, sei α eine Größe > 1 aber $< L$. Es ist dann

$$(\varphi_n)^{\frac{1}{n}} > \alpha \text{ oder } u_n = \varphi(n) > \alpha^n.$$

Die geometrische Progression

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} \ldots.$$

divergirt aber, wenn $\alpha > 1$; es wird dieß daher umsomehr mit der Reihe

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \ldots.$$

der Fall sein.

Ein anderweitiges Kennzeichen, mit Hülfe dessen man entscheiden kann, ob eine Reihe convergire oder divergire, besteht darin, daß man

den Grenzwerth G des Quotienten $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ für unausgesetzt wachsende n aufsucht. Die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \ldots$ convergirt oder divergirt alsdann, je nachdem der Grenzwerth G von $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ für unendlich wachsende n weniger oder mehr als die Einheit beträgt. Nähert sich nämlich $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ einer Grenze $G < 1$, so ist für ein hinlänglich großes n dieser Quotient nur wenig von G verschieden, mithin kleiner als eine zwischen G und 1 liegende Zahl $\beta = \frac{\beta^{n+1}}{\beta^n}$: d. h. von einer gewissen Stelle an werden die Glieder der unendlichen Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \ldots.$ beziehungsweise kleiner als die correspondirenden Glieder der geometrischen Progression

$$\beta^n + \beta^{n+1} + \beta^{n+2} + \beta^{n+3} \ldots.$$

ausfallen, welche für $\beta < 1$ convergirend ist. — Ebenso würde für $G > 1$ früher oder später der Quotient $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ nahe an G bleiben, folglich stets mehr betragen als eine zwischen 1 und G liegende Zahl β.

Wir wollen nun die zwei gegebenen Regeln auf die Maclaurin'sche und Taylor'sche Reihe anwenden. Es sei also f(x) eine beliebige Function von x und $\varphi(n)$ der numerische Werth des Ausdruckes

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(0), \text{ oder } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(x),$$

je nachdem die Maclaurin'sche oder Taylor'sche Reihe in Betracht gezogen wird; ferner L die Grenze, gegen welche für unausgesetzt wachsende n der Ausdruck $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ oder der Quotient $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ hineilt. Die beiden fraglichen Reihen werden stets convergiren, wenn x kleiner als $\frac{1}{L}$ ist; dagegen divergiren, wenn der numerische Werth von x die Größe $\frac{1}{L}$ übertrifft. In der That bezeichnet man mit $u_n = \pm \varphi(n) x^n$ das allgemeine Glied dieser Reihen, so ist im ersten Falle

$$\lim (u_n)^{\frac{1}{n}} = Lx < 1 \text{ und } \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lx < 1;$$

und im zweiten Falle

$$\lim (u_n)^{\frac{1}{n}} = Lx > 1 \text{ und } \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lx > 1;$$

aus welchen beiden Sätzen die Richtigkeit der Behauptung sofort erhellt.

§. 41. Es mögen nunmehr die beiden Regeln ihre Anwendung auf die vorhin behandelten Beispiele finden. Für die Function

$$f(x+h) = (x+h)^m$$

hat man

$$f^{(n)} x = m(m-1) \ldots . (m-n+1)\, x^{m-n};$$

ferner abgesehen vom Zeichen

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-m}{n+1} \cdot \frac{h}{x},$$

wo n größer als m ist, ein Fall, der früher oder später immer eintritt. Man findet $L = \frac{h}{x}$; die Formel

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h^2 + \text{2c.}$$

convergirt demnach, so lange an absolutem Werth $h < x$ ist.

Für die Function $f(x+h) = \log(x+h)$ hat man

$$\log(x+h) = \log x + \log \varepsilon \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \text{2c.} \right)$$

Man findet

$$f^{(n)}(x) = \log \varepsilon \cdot (-1)^{n-1}\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, x^{-n};$$

ferner

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{h}{x},$$

woraus $L = \frac{h}{x}$. Die Reihe

$$\log(x+h) = \log x + \log \varepsilon \left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{x^2} + \text{2c.} \right)$$

convergirt also, wenn $\frac{h}{x}$ kleiner als die Einheit ist.

Für die Function $f(x) = \varepsilon^x$ ergibt sich

$$f^{(n)}(0) = 1; \quad \varphi_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n};$$

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{1}{n+1}; \text{ woraus } L = 0.$$

Die Reihe

$$\varepsilon^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \text{2c.}$$

ist demnach convergent für jeden beliebigen Werth von x.

Dasselbe gilt von den beiden Reihen

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \text{ꝛc.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \text{ꝛc.}$$

Dagegen convergirt die Reihe

$$\text{arc}\,(\text{tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

nur so lange als der numerische Werth von x kleiner als 1 ist.

§. 42. **Unbrauchbarkeit der Taylor'schen Formel.** Die Anwendbarkeit der Taylor'schen Reihe gründet sich auf die Voraussetzung, daß die Function $f(x)$ nebst ihren Differentialquotienten $f'(x)$, $f''(x)\ldots$ für denjenigen Werth von x, von welchem aus der mit h bezeichnete Zuwachs gerechnet wird, so wie für die übrigen zwischen x und $x + h$ liegenden Werthe von x nicht unendlich wird, was zur unmittelbaren Folge hat, daß die Reihenentwickelung von $f(x + h)$ nach ganzen positiven Potenzen von h vor sich gehen kann. Wenn dieß nicht mehr der Fall ist, z. B. die Function $f(x)$ oder ihre Differentialquotienten von irgend einer Ordnung an für einen bestimmten dem x beigelegten Werth a unendlich sich herausstellen; so ist die Taylor'sche Reihe nicht mehr anwendbar: die Entwickelung von $f(x + h)$ enthält dann für jenen besonderen, dem x beigelegten Werth a, wenigstens von einem gewissen Gliede an, oft negative oder gebrochene Potenzen von h. In einem solchen Falle muß man daher auf die Taylor'schen Reihe Verzicht leisten und die Entwickelung von $f(a + h)$ auf anderem Wege zu erlangen suchen.

Es sei z. B. $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^m}$, wo m eine positive ganze Zahl ist und $\varphi(x)$ eine Function bezeichnet, welche nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten für $x = a$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth annimmt. Wenn man mittelst des Taylor'schen Satzes die Entwickelung von $f(x + h)$ bewerkstelligt, so werden alle Glieder dieser Reihe unendlich, sobald man in denselben $x = a$ setzt. Demohnerachtet hat die Function $f(a + h)$ einen bestimmten Werth: es ist nämlich

$$f(a + h) = h^{-m}\varphi(a) + h^{-m+1}\frac{\varphi'(a)}{1} + h^{-m+2}\frac{\varphi''(a)}{1\cdot2} + \text{ꝛc.},$$

d. h. einer Reihe gleich, welche wenigstens in den ersteren Gliedern negative Potenzeu von h enthält. — Ebenso werden für

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x-a)^2}, \text{ wo } f'(x) = \frac{3(x-a)(x^2-1) - 2(x^3-3x)}{(x-a)^3},$$

u. s. w. ist, $f(x)$, $f'(x)$ und die übrigen Differentialquotienten unendlich, wenn $x = a$ angenommen wird. Nach der gewöhnlichen Methode findet man

$$f(a+h) = \frac{(a+h)^3 - 3(a+h)}{h^2} = \frac{a^3 - 3a}{h^2} + \frac{3a^2-3}{h} + 3a + h.$$

Die Glieder der Entwickelung von $\log(x+h)$ und $\cot(x+h)$ werden sämmtlich unendlich, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Die Functionen selbst haben aber alsdann einen bestimmten Werth, nämlich $\log h$ und $\cot h$; jedoch können diese Werthe durch keine nach ganzen Potenzen von h fortlaufenden Reihen dargestellt werden, weil $\log h = -\infty$ und $\cot h = +\infty$ wird für $h = 0$.

Die Taylor'sche Reihe liefert auch dann unbestimmte Resultate, wenn die gegebene Function $f(x)$ Wurzelgrößen enthält, welche durch den besonderen, dem x beigelegten Werth sowohl in der Function selbst als auch in deren Differentialquotienten zum Verschwinden kommen. Es sei z. B. $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{x-a}$, wo φ und ψ ganze algebraische Functionen bedeuten, welche für $x = a$ nicht Null werden. Sämmtliche Derivirten von der ersten an werden für $x = a$ unendlich und die Taylor'sche Formel wird unbrauchbar. Durch unmittelbare Substitution von $a + h$ statt x bekommt man

$$f(a+h) = \varphi(a+h) + \psi(a+h)\sqrt{h},$$

d. h. eine Reihe, worin h mit gebrochenen Exponenten erscheint. — Es sei

$$f(x) = c + x + (x-b)(x-a)^{\frac{3}{2}}.$$

Man findet

$$f'(x) = 1 + (x-a)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(x-b)\sqrt{x-a},$$

$$f''(x) = 3\sqrt{x-a} + \frac{3(x-b)}{4\sqrt{x-a}}.$$

für $x = a$ wird $f(x) = c + a$; $f'(x) = 1$ und $f''(x) = \infty$, zum Beweis, daß die Entwickelung $f(a+h)$ nicht nach ganzen Potenzen von h fortschreiten kann. Nach der gewöhnlichen Methode erhält man:

$$f(a+h) = c + a + h + (a-b)\, h^{\frac{3}{2}} + h^{\frac{5}{2}}.$$

Wir wollen übrigens bemerken, daß eine in der Function $f(x)$ vorkommende Wurzelgröße auf zwei verschiedene Arten verschwinden kann, nämlich einmal, indem die unter dem Wurzelzeichen stehende

Größe verschwindet, und dann, indem ein Factor der Wurzelgröße Null wird. Der letzte Fall bietet keine Ausnahme von der Taylor'schen Reihe dar. Es sei z. B. $f(x) = (x - a)^m \sqrt{x - b}$, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet. Mit jeder Differentiation vermindert sich der Exponent um eine Einheit und wird nach m Differentiation Null. Der in den ersten Differentialquotienten für $x = a$ zum Verschwinden gebrachte Factor $\sqrt{x - b}$ erscheint daher in dem mten Differentialquotienten und in allen darauf folgenden wieder. Dadurch erhält man zwei getrennte und von einander verschiedene Entwickelungen der vorgelegten Function, d. h. eben so viele, wie die Wurzelgröße Werthe zuläßt. Die Function erlangt hiernach ihre sämmtliche Werthe wieder, was in dem ersten Falle, wo die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe Null wird, nicht stattfindet. Die Bruchpotenzen von h müssen darum in diesem Falle die verschiedene Werthe zum Vorschein bringen, welche die Function für $x = a$ besitzt.

4) Die Maclaurin'sche und Taylor'sche Reihe für eine imaginäre Veränderliche.

§. 43. Die Maclaurin'sche und Taylor'sche Reihe behalten auch in denjenigen Fällen Gültigkeit, in denen die Variable keinen reellen, sondern einen imaginären Werth annimmt. Denken wir uns zu diesem Behufe $x = (p + q\sqrt{-1})\,z$, wo p und q constant und reell, z aber veränderlich vorausgesetzt werden, auf die Form

$$x = r\,(\cos t + \sqrt{-1}\,\sin t)$$

gebracht, bei welcher der Modulus r die Variable bedeutet und in dem reducirten Ausdruck $\cos t + \sqrt{-1}\,\sin t$ der Bogen t constant ist. Man vergleiche hiermit das sechste Kapitel unserer algebraischen Analysis. Es besteht sonach die Gleichung:

$$f(x) = f\{r(\cos t + \sqrt{-1}\,\sin t)\} = \varphi(r) + \sqrt{-1}\cdot\psi(r),$$

in welcher $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ reelle Functionen von r sind. Eine wiederholte Differentiation dieser Gleichung in Bezug auf r liefert:

$$f'\{r(\cos t+\sqrt{-1}\,\sin t)\}\,(\cos t+\sqrt{-1}\,\sin t)=\varphi'(r)+\sqrt{-1}\cdot\psi' r;$$

$$f''\{r(\cos t+\sqrt{-1}\,\sin t)\}\,(\cos t+\sqrt{-1}\,\sin t)^2=\varphi''(r)+\sqrt{-1}\cdot\psi'' r;$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$f^{(n)}\{r(\cos t+\sqrt{-1}\,\sin t)\}(\cos t+\sqrt{-1}\,\sin t)^n=\varphi^{(n)}(r)+\sqrt{-1}\,\psi^{(n)} r.$$

Daraus entspringt für $r = 0$:

$$f(0) = \varphi(0) + \sqrt{-1}\,\psi(0);$$

$$(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)\,f'(0) = \varphi'(0) + \sqrt{-1}\,\psi'(0);$$

$$(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^2 f''(0) = \varphi''(0) + \sqrt{-1}\,\psi''(0);$$

. . . .

$$(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n f^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(0) + \sqrt{-1}\,\psi^{(n)}(0).$$

Ist nun die Function $f(x)$ nach x continuirlich, so wird sie auch nach r continuirlich sein und diese Eigenthümlichkeit auf die Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ übertragen, dergestalt, daß, wenn $f(x)$ innerhalb der Grenzen

$x_1 = r_1(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$ und $x_2 = r_2(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$

continuirlich ist, die Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ innerhalb dieser Grenzen ebenfalls continuirlich bleiben. Für den Fall also, daß $f(x)$ für $r = 0$ bis $r = r$ continuirlich ist, hat man nach der Maclaurin'schen Formel:

$$\varphi(r) = \varphi(0) + \frac{r}{1}\varphi'(0) + \frac{r^2}{1\cdot 2}\varphi''(0)\ldots + \frac{r^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(\vartheta_1 r),$$

$$\psi(r) = \psi(0) + \frac{r}{1}\psi'(0) + \frac{r^2}{1\cdot 2}\psi''(0)\ldots + \frac{r^n}{1\cdot 2\ldots n}\psi^{(n)}(\vartheta_2 r),$$

wo ϑ_1 und ϑ_2 zwei ächte Bruchzahlen bedeuten. Wird die zweite dieser Gleichungen mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt und dann zur ersten addirt, so kommt:

$$\begin{aligned}\varphi(r) + \sqrt{-1}\,\psi(r) = {} & \varphi(0) + \sqrt{-1}\,\psi(0) \\ & + \frac{r}{1}\left\{\varphi'(0) + \sqrt{-1}\,\psi'(0)\right\} \\ & + \frac{r^2}{1\cdot 2}\left\{\varphi''(0) + \sqrt{-1}\,\psi''(0)\right\} \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \frac{r^n}{1\cdot 2\ldots n}\left\{\varphi^{(n)}(\vartheta_1 r) + \sqrt{-1}\,\psi^{(n)}(\vartheta_2 r)\right\}\end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung der oben aufgestellten Relationen:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)\ldots\ldots$$
$$+ \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left\{\frac{\varphi^{(n)}(\vartheta_1 r) + \sqrt{-1}\,\psi^{(n)}(\vartheta_2 r)}{(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n}\right\}.$$

Das Restglied läßt sich unter eine andere Form bringen, wenn man erwägt, daß

$\varphi^{(n)}(\vartheta_1 r) = \varphi^{(n)}(0) + K_1$ und $\psi^{(n)}(\vartheta_2 r) = \psi^{(n)}(0) + K_2$,

wo K_1 und K_2 Größen sind, welche mit r verschwinden. Hiernach ist

$$\frac{\varphi^{(n)}(\vartheta_1 r) + \sqrt{-1}\,\psi^{(n)}(\vartheta_2 r)}{(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n} = f^{(n)}(0) + K,$$

wo K eine Größe darstellt, welche mit r oder mit x Null wird. Man hat nämlich

$$K = \frac{K_1 + \sqrt{-1}\, K_2}{(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)^n}.$$

oder mittelst der Moivre'schen Formel

$$K = (K_1 + \sqrt{-1}\, K_2)(\cos nt - \sqrt{-1} \sin nt).$$

Folglich ist

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) \ldots + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \left\{ f^n(0) + K \right\}:$$

d. h. die Maclaurin'sche Formel behält auch für eine imaginäre Veränderliche ihre Gültigkeit.

Was endlich die Convergenz dieser Reihe für ein imaginäres x betrifft, so wird sie stattfinden, wenn das allgemeine Glied

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(0)$$

oder dessen stellvertretende Glieder

$$\frac{r^n}{1 \cdot 2\, 3 \ldots n} \varphi^n(0) \text{ und } \frac{r^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \psi^{(n)}(0)$$

den Gesetzen der Convergenz nachkommen.

§. 44. Es bezeichne a einen besonderen imaginären Werth der Variabeln x, ferner seien die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x) \ldots f^{(n)}(x)$$

endlich für diesen speciellen Werth a von x. Setzt man hierauf

$$x - a = z = \varrho (\cos t + \sqrt{-1} \sin t),$$

wo t einen reellen Bogen darstellt; so wird

$$f(x) = f(a + z) = f\{a + \varrho (\cos t + \sqrt{-1} \sin t\}$$
$$= \varphi(\varrho) + \sqrt{-1}\, \psi(\varrho).$$

Mittelst Differentiation nach ϱ bekommt man allgemein:

$$(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)^n \cdot f^{(n)}\{a + \varrho (\cos t + \sqrt{-1} \sin t)\}$$
$$= \varphi^{(n)}(\varrho) + \sqrt{-1}\, \psi^{(n)}(\varrho).$$

Für $\varrho = 0$ ergibt sich:

$$f(a) = \varphi(0) + \sqrt{-1}\, \psi(0);$$

$$(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)\, f'(a) = \varphi'(0) + \sqrt{-1}\, \psi'(0);$$

. . . .

$$(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)^n f^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(0) + \sqrt{-1}\, \psi^{(n)}(0).$$

Nun ist aber:

$$\varphi(\varrho)=\varphi(0)+\frac{\varrho}{1}\varphi'(0)+\frac{\varrho^2}{1\cdot 2}\varphi''(0)\cdots+\frac{\varrho^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\varphi^{(n)}(\vartheta_1\varrho),$$

$$\psi(\varrho)=\psi(0)+\frac{\varrho}{1}\psi'(0)+\frac{\varrho^2}{1\cdot 2}\psi''(0)\cdots+\frac{\varrho^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\psi^{(n)}(\vartheta_2\varrho);$$

folglich

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots$$

$$+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n}\left\{\frac{\varphi^{(n)}(\vartheta_1\varrho)+\sqrt{-1}\,\psi^{(n)}(\vartheta_2\varrho)}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}\right\};$$

oder, wenn man erwägt, daß

$$\frac{\varphi^{(n)}(\vartheta_1\varrho)+\sqrt{-1}\,\psi^{(n)}(\vartheta_2\varrho)}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}=\frac{\varphi^{(n)}(0)+\sqrt{-1}\cdot\psi^{(n)}(0)J_1+J_2\sqrt{-1}}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}$$

$$=f^{(n)}(a)+J,$$

wo J_1, J_2 und J Größen bedeuten, welche mit ϱ verschwinden:

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots.$$

$$+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n}\left\{f^{(n)}(a)+J\right\}.$$

Vertauscht man in der letzteren Gleichung a mit x, nachdem $x-a=h$ gesetzt worden, so kommt:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)\ldots.$$

$$+\frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}\left\{f^{(n)}(x)+J\right\},$$

so daß die Taylor'sche Reihe auch für eine imaginäre Variable gültig bleibt.

Was die Convergenz dieser Reihe für ein imaginäres x anlangt, so wird sie eintreten, wenn die allgemeinen Glieder

$$\frac{\varrho^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi_n(r) \text{ und } \frac{\varrho^n}{1\cdot 2\ldots n}\psi^{(n)}(r)$$

der nach den Potenzen von ϱ entwickelten Reihen $\varphi(r+\varrho)$ und $\psi(r+\varrho)$, für welche die Gleichung

$$f(x+h)=f\{(r+\varrho)(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)\}$$

$$=\varphi(r+\varrho)+\sqrt{-1}\,\psi(r+\varrho)$$

besteht, die Bedingung der Convergenz erfüllen.

Den Convergenzbedingungen geschieht Genüge für die Functionen e^x, sin x, cos x; die Reihen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{ꝛc.},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{ꝛc.}$$

werden hiernach für jeden beliebigen endlichen reellen oder imaginären Werth von x convergiren. Genannte Reihen würden somit als Ausgangspunkte dienen können, den Sinn der Ausdrücke e^x, $\sin x$, $\cos x$ für diejenigen Fälle festzustellen, in denen die Variabele einen imaginären Werth erhält. Auf dieser Grundlage bauend, werden wir so interessante Beziehungen zwischen anscheinend ganz verschiedenen Functionen entdecken und somit Veranlassung finden, den Zusammenhang zwischen den letzteren weiter zu verfolgen.

Von denselben Principien ausgehend, werden wir zugleich im Stande sein, mit Leichtigkeit den Sinn der Ausdrücke

$$a^x,\ \log x,\ x^m$$

für die Fälle bestimmt anzugeben, in welchen x imaginär wird. Auf diese Weise werden wir einerseits zwischen der Exponentialgröße und goniometrischen Functionen, andererseits zwischen dem Logarithmen und den cylometrischen Functionen merkwürdige Relationen erhalten, welche in analytischer Beziehung uns von großer Wichtigkeit sind. Um Wiederholungen zu vermeiden, verweisen wir den Leser auf das sechste Capitel unserer algebraischen Analysis und die Theorie der höheren Gleichungen, und wenn derselbe auf diesen Gegenstand noch weiter einzugehen wünscht, auf Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis und das elfte Kapitel seiner Differentialrechnung.

V. Die Differentiation der imaginären Functionen und der Cauchy'sche Satz für die Anwendbarkeit der Maclaurin'schen Reihe.

§. 45. **Kennzeichen für die Anwendbarkeit der Maclaurin'schen Reihe.** Die Maclaurin'sche Reihe muß, wie die Tay'lor'sche, durch einen Rest ergänzt werden. Es bezeichne $R_n = \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} f^{(n)}(\vartheta x)$ den Rest der bei dem nten Gliede geschlossenen Maclaurin'schen Reihe, so daß man hat

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) \cdots + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + R_n.$$

Im Fall sich R_n für unausgesetzt wachsende n der Null als Grenzwerth nähert, oder $\lim R_n = 0$ ist, besteht die Gleichung

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) \ldots + \text{in inf.},$$

welche Reihe zugleich convergiren muß, weil eine divergente Reihe niemals einer bestimmten Größe f(x) gleich sein kann. Wenn aber $\lim R_n$ von der Null verschieden ausfällt, so dürfen wir $\lim R_n$ nicht mehr weglassen, mithin die letzte Gleichung nicht mehr als eine unmittelbare Folgerung der ersteren ansehen. Streng genommen können also convergente Reihenentwickelungen nur dann gegebene Functionen zu ihren Summen haben, insofern der Rest R_n für schickliche Werthe von n kleiner als jede gegebene Größe werden kann.

Die Untersuchung über $\lim R_n$ hängt nur lediglich von der besonderen Beschaffenheit der Function f(x) ab, was für die Anwendung des so wichtigen Maclaurin'schen Lehrsatzes eine nicht geringe Unbequemlichkeit mit sich führt, indem wir genöthigt sind, bei jeder neuen vorkommenden Function f(x) eigenthümliche Betrachtungen anzustellen, um über den Betrag des Grenzwerthes von R_n den gewünschten Aufschluß zu erhalten. Es wäre daher sehr vortheilhaft, ein ganz allgemeines Kennzeichen zu besitzen, mit Hülfe dessen man bei der fraglichen Function f(x) von vornherein entscheiden könnte, unter welchen Bedingungen der aus ihr hergeleitete Rest R_n sich der Grenze Null nähert oder nicht, oder mit anderen Worten, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, damit die Identität zwischen f(x) und der Reihe

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) \ldots . + \text{in inf.}$$

stattfindet. Ein solches Kennzeichen hat nun Cauchy uns an die Hand gegeben. Die merkwürdige Regel lautet folgendermaßen: Die Maclaurin'sche Reihe fällt mit der Function für jeden reellen oder immaginären Werth

$$r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)$$

von x zusammen, dessen Modulus an absolutem Werthe den kleinsten der Moduli r_0, r_1, r_2 . . . nicht übersteigt, welche mit den entsprechenden reducirten Ausdrücken anstatt x gesetzt, die Function f(x) oder eine ihrer Derivirten unendlich machen. Diese Werthe

$$r_0(\cos t_0 + \sqrt{-1} \sin t_0),\ r_1(\cos t_1 + \sqrt{-1} \sin t_1) \ldots$$

werden reell und positiv oder negativ sein, wenn die positiven oder negativen Zahlen t_0, t_1, t_2 gerade oder ungerade Vielfache von π sind. Was die Moduli r_0, r_1, r_2 . . . anlangt, so können wir dieselben immer positiv annehmen.

Wie nothwendig in der That es sei, diesen Cauchy'schen Satz als Fundamentaltheorem zur Bestimmung der Gültigkeit der Reihenentwickelung einer Function nach ganzen positiven Potenzen der Unabhängigen aufzustellen, wird sich am nachstehenden Beispiele zeigen. Gesetzt wir hätten gefunden:

$$1 - \sqrt[3]{(1-x)^2} = \frac{2}{3}\, x + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6}\, x^2 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9}\, x^3 + \cdots$$

und fragten, wie weit diese Gleichung Gültigkeit behält, so würden wir etwa folgende Antwort geben können. Die Reihe besteht aus lauter positiven Größen, ist daher für positiv zunehmende x eine im Steigen begriffene Function. Anders verhält's sich dagegen mit dem auf der linken Seite stehenden Ausdrucke: derselbe wächst innerhalb der Grenzen von $x = 0$ bis $x = 1$, wo er sein Maximum erreicht, und nimmt fortwährend ab, sobald $x > 1$ wird. Die Gültigkeit der obigen Gleichung kann folglich bei positiven x im höchsten Fall von $x = 0$ bis bis $x = 1$ sich erstrecken.

Wie ferner zuweilen die Summe einer convergenten Reihe nicht mit der gegebenen Function übereinstimmt, sehen wir an einem sehr einfachen Beispiele, wenn wir nämlich

$$f(x) = e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}}$$

setzen. Wir erhalten im vorliegenden Falle eine in's Unendliche fortlaufende convergente Reihe, welche jedoch nicht die Function

$$e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

sondern nur deren erstes Glied e^{-x^2} zur Summe hat, indem die Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ wie alle ihre Derivirten für $x = 0$ verschwinden.

§. 46. **Die Fundamentalformeln der Differentiation von Functionen mit imaginären Veränderlichen.** Da wir seither in den Functionen die Variabeln bloß reell angenommen haben, nunmehr aber auch imaginäre Werthe derselben zulassen wollen; so dürfen wir nicht verabsäumen, die Gültigkeit der früher aufgestellten Differentiationsregeln auch für die Fälle imaginärer Veränderlichen nachzuweisen. Zu diesem Behufe das in dem sechsten Kapitel der algebraischen Analysis Gesagte zum Grunde legend, nehmen wir an, daß in dem unendlich kleinen imaginären Ausdruck

$$\alpha = \beta + \gamma \sqrt{-1} = r\,(\cos t + \sqrt{-1}\, \sin t)$$

die drei reellen Größen β, γ, r unendlich klein sind, die vierte reelle Größe t aber eine endliche positive Größe ist. Wir haben dann

$$\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1\cdot 2}+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots$$

$$=1+\frac{r}{1\cdot 2}(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)+\frac{r^2}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos 2t+\sqrt{-1}\sin 2t)+\ldots;$$

und $\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1-\frac{\alpha^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=1-\frac{r^2}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos 2t+\sqrt{-1}\sin 2t)+\ldots,$

wenn die Moivre'sche Formel zu Hülfe genommen wird. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen ergibt sich, wenn wir γ unausgesetzt abnehmen lassen und zur Grenze übergehen:

$$\lim.\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1 \text{ und } \lim\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Setzen wir in dem ersten dieser Ausdrücke $\alpha\, l(A)$ statt α, so kommt:

$$\lim.\frac{e^{\alpha\, l(A)}-1}{\alpha\, l(A)}=\lim\frac{A^{\alpha}-1}{\alpha\, l(A)}=1;$$

$$\text{mithin } \lim\frac{A^{\alpha}-1}{\alpha}=l(A).$$

Machen wir ferner $l(1+\alpha)=\delta$, so entsteht

$$\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}=\frac{\delta}{e^{\delta}-1}=\left(\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)^{-1},$$

woraus bei dem Uebergange zu den Grenzen:

$$\lim\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}=1 \text{ oder } \lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Aus der Gleichung

$$\log(1+\alpha)=\frac{l(1+\alpha)}{l(A)}$$

entspringt dann bei dem Grenzübergange:

$$\lim\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{l(A)}\lim.\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{l(A)}.$$

§. 47. **Differentiation der imaginären Functionen.** Wenn wir voraussetzen, daß für alle mögliche Werthe von x, auch wenn sie imaginär werden, die Function f(x) immerfort auf die nämliche Art berechnet wird, wie dieß z. B. bei der Function x^m oder bei der Function e^x geschieht; so kann das Resultat der durch

$$\lim.\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

angezeigten Operation, wenn Δx nur immer auf dieselbe Weise gegen die Null zueilt, auch immer nur von der nämlichen Form $f'(x)$ sein.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo Δx irgendwie imaginär wird und vermöge seines immer kleiner werdenden Modul r bis zur Null herabsteigt. Das Resultat der durch

$$\lim . \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

angedeuteten Operation ist alsdann nicht immer unabhängig von dem Bogen t, welcher dem imaginären Zuwachse

$$\Delta x = r (\cos t + \sqrt{-f} \sin t) = re^{t\sqrt{-1}}$$

entspricht. Z. B. für $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ entsteht für $x = 0$ der Ausdruck

$$f'(x) = \lim \frac{(0 + \Delta x)^{\frac{2}{3}} - 0}{\Delta x} = \lim \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \infty \left(\cos \frac{t}{3} - \sqrt{-1} \sin \frac{t}{3}\right),$$

ein Werth, welcher $+ \infty$ und $- \infty$ als besondere Fälle in sich schließt. Soll also der durch den Ausdruck

$$\lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

festgestellte Begriff der derivirten Function eine bestimmte Bedeutung haben; so muß nachgewiesen werden, daß das durch gedachte Operation gewonnene Resultat oder die derivirte Function unverändert bleibt, welches auch der Bogen t in $\Delta x = r (\cos t + \sqrt{-1})$ sein mag, so lange wenigstens $f(x)$ und $f'(x)$ nicht durch einen der Werthe von x oder t unstetig werden.

In der That nehmen wir an, es sei jenes Resultat vom Bogen t abhängig; so könnte man setzen

$$\lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = F(t).$$

Daß F aber unabhängig von t ist, läßt sich folgendermaßen nachweisen. Suchen wir zunächst eine charakterisirende Eigenschaft unserer derivirten Function F(t). Es sei deßhalb φ ein beliebiger Bogen; man hat dann die identische Gleichung:

$$F(t) = \lim \left\{ \frac{f\left(x + re^{t\sqrt{-1}}\right) - f\left(x + re^{\varphi\sqrt{-1}}\right)}{re^{t\sqrt{-1}}} + \frac{f\left(x + re^{\varphi\sqrt{-1}}\right) - f(x)}{re^{t\sqrt{-1}}} \right\}$$

$$=\lim\left\{\frac{f\left(x+re^{\varphi\sqrt{-1}}+r\left[e^{t\sqrt{-1}}-e^{\varphi\sqrt{-1}}\right]\right)-f\left[x+re^{\varphi\sqrt{-1}}\right]}{re^{t\sqrt{-1}}}\right.$$

$$\left.+\frac{f\left(x+re^{\varphi\sqrt{-1}}\right)-f(x)}{re^{\varphi\sqrt{-1}}}\cdot e^{(\varphi-t)\sqrt{-1}}\right\}$$

$$=2\sin\frac{t-\varphi}{2}\cdot e^{\frac{\varphi+t+\pi}{2}\cdot\sqrt{-1}}\cdot\lim\left\{\frac{f\left(x+re^{\varphi\sqrt{-1}}+2r\sin\frac{t-\varphi}{2}\cdot e^{\frac{t+\varphi+\pi}{2}\cdot\sqrt{-1}}\right)}{2r\sin\frac{t-\varphi}{2}\cdot e^{\frac{t+\varphi+\pi}{2}\cdot\sqrt{-1}}}\right.$$

$$\left.-\frac{f(x+re^{\varphi\sqrt{-1}})}{2r\sin\frac{t+\varphi}{2}\cdot e^{\frac{t+\varphi+\pi}{2}\cdot\sqrt{-1}}}\right\}$$

$$+\ e^{(\varphi-t)\sqrt{-1}}\lim\frac{f(x+re^{\varphi\sqrt{-1}})-f(x)}{re^{\varphi\sqrt{-1}}}.$$

Wegen

$$\lim\frac{f\left(x+re^{t\sqrt{-1}}\right)-f(x)}{re^{t\sqrt{-1}}}=F(t)$$

wird sein

$$\lim\frac{f\left(x+re^{\varphi\sqrt{-1}}\right)-f(x)}{re^{\varphi\sqrt{-1}}}=F(\varphi);$$

und der andere Grenzwerth, dessen Modulus

$$2r\sin\frac{t-\varphi}{2}$$

ist, durch

$$F\left(\frac{(t+\varphi+\pi)}{2}\right)$$

dargestellt werden können, insofern wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von F

$$\lim F(x+re^{\varphi\sqrt{-1}})=F(x)$$

gesetzt werden darf. Man hätte mithin die Relation:

$$F(t) = 2\sin\frac{(t-\varphi)}{2} \cdot e^{\frac{\varphi+t+\pi}{2}\cdot\sqrt{-1}} \cdot F\left(\frac{t+\varphi+\pi}{2}\right) + e^{(\varphi-t)\sqrt{-1}} F(\varphi),$$

oder

$$e^{\frac{\varphi+t+\pi}{2}\cdot\sqrt{-1}} F\left(\frac{t+\varphi+\pi}{2}\right) = \frac{e^{t\sqrt{-1}}F(t) - e^{\varphi\sqrt{-1}}F(\varphi)}{2\sin\frac{t-\varphi}{2}},$$

wo t und φ ganz beliebige Bogen sind. —

Setzt man z. B. $\varphi = t + \pi$, so erhält man, da $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$ ist:

$$-e^{t\sqrt{-1}}F(t+\pi) = \frac{e^{t\sqrt{-1}}F(t) + e^{t\sqrt{-1}}F(t+\pi)}{-2}, \text{ d. h.}$$

$$F(t) = F(t + \pi). \text{ —}$$

Nimmt man $\varphi = t + 2v - \pi$, so findet man, da

$$e^{-\pi\sqrt{-1}} = -1 \text{ und } F(t + 2v - \pi) = F(t + 2v)$$

ist, nachdem mit $e^{t\sqrt{-1}}$ dividirt worden:

$$e^{v\sqrt{-1}}F(t+v) = \frac{F(t) + e^{2v\sqrt{-1}}F(t+2v)}{2\cos v}, \text{ oder}$$

$$e^{2v\sqrt{-1}}F(t+2v) - e^{v\sqrt{-1}}(e^{v\sqrt{-1}} + e^{v\sqrt{-1}})F(t+v) + F(t) = 0,$$

weil $2\cos v = e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$ ist.

Denkt man sich jetzt v als einen Zuwachs Δt von t und führt für $F(t+\Delta t)$ und $F(t+2\Delta t)$ die Werthe $F(t)+\Delta F(t)$ und $F(t)+2\Delta F(t) +\Delta^2 F(t)$ ein, wie sich solche nach §. 17 ergeben: so folgt;

$$\Delta^2 F + \left(1 - e^{-2\Delta t}\right)\Delta F = 0,$$

oder

$$\frac{\Delta^2 F}{(\Delta t)^2} + \frac{1-e^{-2\Delta t}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta t} = 0.$$

Läßt man jetzt Δt gegen Null convergiren, so kommt

$$F''(t) + 2F'(t) = 0.$$

Da nun die linke Seite dieser Gleichung sich als Derivirte von von $F'(t) + 2F(t)$ ansehen läßt, und nur die Derivirte einer von t unabhängigen Größe Null ist; so folgt, daß

$$F'(t) + 2F(t) = C$$

sein müsse, wo C eine von t unabhängige Größe darstellt. Multiplicirt man letztere Gleichung mit e^{2t}, so entsteht:

$$e^{2t}F'(t) + 2F(t)\,e^{2t} - 2\,\frac{C}{2}\,e^{2t} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist jetzt als die genaue Derivirte von

$$e^{2t}\left(F(t) - \frac{C}{2}\right)$$

anzusehen; daraus folgt, daß

$$e^{2t}\left(F(t) - \frac{C}{2}\right) = C'$$

sein müsse, wo C' ebenfalls eine von t abhängige Größe bedeutet. Hieraus ergibt sich endlich, daß die in Frage stehende Function von der Form:

$$F(t) = C + C' \cdot e^{-2t}$$

sein müsse. Substituirt man nun diesen Ausdruck mit

$$F(t + \pi) = C + C'e^{-2t - 2\pi}$$

in die Gleichung:

$$F(t) = F(t + \pi);$$

so findet man $C' = 0$: also ist $F(t)$ der von t unabhängigen Größe $\frac{1}{2}$ C gleich. Da eine Unstetigkeit der ursprünglichen Function ein Unendlichwerden der Derivirten $f'(x)$ oder F hervorbringt, so ist auch dieser Fall unzulässig und wir können also sagen: Die Derivirte Function

$$f'(x) = \lim \frac{f(x + re^{t\sqrt{-1}}) - f(x)}{re^{t\sqrt{-1}}}$$

wird, wenn f und f' sich als stetig herausstellen, der Form nach gerade so berechnet, als ob x und $\Delta x = re^{t\sqrt{-1}}$ reell wären.

Hiernach ist der Begriff der derivirten Function für imaginäre Variabeln als festgestellt zu betrachten, und es hat keine Schwierigkeit mehr, nachzuweisen, wie die übrigen früher mitgetheilten Differentiationsregeln für Functionen mit reellen Veränderlichen auch in den Fällen Gültigkeit behalten, in welchen die Variabeln und Functionen imaginär werden.

§. 48. **Continuität der ersten Derivirten bei imaginären Veränderlichen.** Im Uebrigen ist es leicht, die im §. 23 aufgestellte Relation:

$$f(a + h) - f(a) = \lim \cdot \alpha \left\{ f'(a) + f'(a + \alpha) + \ldots + f'(a + \overline{n-1}\,\alpha) \right\}$$

auch auf imaginäre Variabeln auszudehnen. Substituirt man nämlich $r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$ statt x in $f(x)$, so bekommt man:

$$f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = f(re^{t\sqrt{-1}});\ \text{und}$$

$$f'[r(\cos t + r\sqrt{-1}\sin t)] = r\sqrt{-1}\,e^{t\sqrt{-1}}\,f'(re^{t\sqrt{-1}}),$$

wobei t als veränderlich gelten soll. Indem man sich nun die Function $f(re^{t\sqrt{-1}})$ dergestalt zerlegt denkt, daß

$$f(re^{t\sqrt{-1}}) = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\psi(t),$$

wo $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ein paar reelle Functionen von t sind, entspringt durch Differentiation:

$$r\sqrt{-1}\,e^{t\sqrt{-1}}\,f'(re^{t\sqrt{-1}}) = \varphi'(t) + \sqrt{-1}\,\psi'(t).$$

Setzt man der Reihe nach a, $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, ... $a + (n-1)\alpha$ statt t, addirt darauf alle auf diese Weise erhaltenen Resultate und multiplicirt die Summe mit α, so kommt

$$r\sqrt{-1}\cdot\alpha\Big\{e^{a\sqrt{-1}}\,f'(re^{a\sqrt{-1}}) + e^{(a+\alpha)\sqrt{-1}}f'(re^{(a+\alpha)\sqrt{-1}}) + \ldots$$

$$e^{(a+\overline{n-1}\alpha)\sqrt{-1}}\,f'(re^{(a+\overline{n-1}\,\alpha)\sqrt{-1}})\Big\}$$

$$= \alpha\,\Big\{\varphi'(a) + \varphi'(a+\alpha)\ldots. + \varphi'(a + \overline{n-1}\,\alpha)\Big\}$$

$$+ \sqrt{-1}\cdot\alpha\Big\{\psi'(a) + \psi'(a+\alpha)\ldots. + \psi'(a + \overline{n-1}\,\alpha)\Big\}.$$

Indem nun der Werth von r dergestalt gewählt wird, daß keine der auf der rechten Seite befindlichen Functionen in dem Intervall von $t = a$ bis $t = a + h$ unstetig oder unendlich wird, ergibt sich als Grenzwerth der rechten Seite für unendlich abnehmende α nach §. 23, da φ und ψ reelle Functionen von t bedeuten:

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) + \sqrt{-1}\,[\psi(a+h) - \psi(a)],\ \text{oder}$$

$$\varphi(a+h) + \sqrt{-1}\,\psi(a+h) - \Big\{\varphi(a) + \sqrt{-1}\,\psi(a)\Big\},$$

$$\text{d. h. } f(re^{(a+h)\sqrt{-1}}) - f(re^{a\sqrt{-1}})$$

ein Resultat, welches eine unmittelbare Substitution in die in §. 23 aufgestellten Relation geliefert haben würde.

Um uns über die Bedingung der Gültigkeit dieser Formel noch bestimmter auszusprechen, können wir feststellen, daß unter Stetigkeit und Endlichkeit einer Function mit imaginären Veränderlichen die Stetigkeit und Endlichkeit der beiden reellen Functionen zu verstehen ist, in welche man sich jene Function zerlegt denken kann. Hiernach wäre die Aussage, daß die Functionen $\varphi\,(r, t)$, $\psi\,(r, t)$, $\varphi'\,(r, t)$, $\psi'(r, t)$

endlich und stetig bleiben, mit der Aussage, daß $f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ und $e^{t\sqrt{-1}}f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ stetig und endlich sind, völlig gleichlautend.

Wählt man die Größe r dergestalt, daß die Functionen f(x) und f'(x) endlich und stetig bleiben, wenn $x=re^{t\sqrt{-1}}$ und t willkürlich innerhalb des Intervalls t=a bis t=b genommen wird; so gilt für

$$\alpha=\frac{b-a}{n}$$

die nachstehende Relation:

$$\frac{1}{r\sqrt{-1}}\left\{f\left(re^{b\sqrt{-1}}\right)-f\left(re^{a\sqrt{-1}}\right)\right\}=$$

$$\lim \alpha\left\{e^{a\sqrt{-1}}f'\left(re^{a\sqrt{-1}}\right)+e^{(a+\alpha)\sqrt{-1}}f'\left(re^{(a+\alpha)\sqrt{-1}}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+e^{(a+\overline{n-1}\,\alpha)\sqrt{-1}}f'\left(re^{(a+\overline{n-1}\,\alpha)\sqrt{-1}}\right)\right\},$$

wo sich das Zeichen lim auf das unausgesetzte Wachsen der ganzen positiven Zahl n bezieht.

Erinnern wollen wir noch, daß der Werth von r nicht außer Betracht gelassen werden darf, obschon er bei der Differentiation als constant galt; denn es kann sich ereignen, daß für ein Paar zusammengehöriger Werthe von r und t eine Function von r und t unstetig oder unendlich wird, wie wir dies an folgendem einfachen Beispiele sehen. Es sei nämlich f (x)=arc (tang=x); man hat dann

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

folglich

$$r\sqrt{-1}\;e^{t\sqrt{-1}}\;f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)=\frac{r\sqrt{-1}(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)}{1+r^2(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^2};$$

oder $r\sqrt{-1}\;e^{t\sqrt{-1}}\;f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)=$

$$\frac{r(1-r^2)\sin t}{1+2r^2\cos 2t+r^4}+\sqrt{-1}\;\frac{r(1+r^2)\cos t}{1+2r^2\cos 2t+r^4};$$

$$\text{d. h. } \varphi'(r,t)=\frac{r(1-r^2)\sin t}{1+2r^2\cos 2t+r^4}.$$

Wäre jetzt $a<\frac{\pi}{2}$ und $b>\frac{\pi}{2}$ und durchliefe t das Intervall von t=a bis t=b, indem es successive durch alle Zwischenstufen $a+\alpha$, $a+2\alpha$, $\cdots$ ginge; so käme auch der Werth oder die Zwischenstufe

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

$\frac{\pi}{2}$ vor. In diesem Falle ist dann

$$\varphi'(r, t) = \frac{r}{1-r^2},$$

wo man auf der Stelle einsieht, daß r nicht gleich 1 sein darf.

§. 49. **Voruntersuchungen zu dem Cauchy'schen Lehrsatze.** Nachdem das Nöthige über die Differentiationen der Functionen mit imaginären Veränderlichen mitgetheilt worden, gehen wir nunmehr zur Nachweisung des erwähnten Cauchy'schen Satzes über. Zu diesem Behuf nehmen wir zunächst wieder die Relation auf:

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) = r e^{t\sqrt{-1}},$$

wo der reducirte Ausdruck $\cos t + \sqrt{-1}\sin t$ von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ keine anderen Werthe annimmt als solche, die er von $t=0$ bis $t=2\pi$ bekommt. Für jede Function f, welche diese Eigenschaft der Periodicität theilt, besteht mithin die Relation:

$$f\left(re^{2\pi\sqrt{-1}}\right) - f(r) = o.$$

Setzen wir jetzt voraus, daß die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ endlich und stetig bleiben, sobald man $x = re^{t\sqrt{-1}}$ und t innerhalb des Intervalls von $t = o$ bis $t = 2\pi$ nimmt; so gilt dem vorhergehenden Paragraphen 48 zufolge für unendlich abnehmende dt die Relation:

$$f\left(re^{2\pi\sqrt{-1}}\right) - f(r) = \sqrt{-1}\lim dt \Big\{ f'(r) + e^{dt\sqrt{-1}} f'\left(re^{dt\sqrt{-1}}\right) + e^{2dt\sqrt{-1}} f'\left(re^{2dt\sqrt{-1}}\right) + \ldots\ldots + e^{(n-1)dt\sqrt{-1}} f'\left(re^{(n-1)dt\sqrt{-1}}\right) \Big\}$$

Bezeichnen wir die letztere Summe durch ein ihrem allgemeinen Gliede $f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) e^{t\sqrt{-1}} dt$ vorgesetztes, mit den Grenzwerthen o und 2π von t versehenes lateinisches $\int$; so haben wir $f\left(re^{2\pi\sqrt{-1}}\right) - f(r)$

$$= r\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) e^{t\sqrt{-1}}\, dt;$$

$$\text{d. h. } \int_0^{2\pi} f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) e^{t\sqrt{-1}}\, dt = o,$$

wenn f, f' stetig und endlich sind und der Umfang ihrer Periode gleich 2π ist.

Daß die Gültigkeit dieser Gleichung sofort ihre Endschaft erreicht, wenn ein Unendlichwerden oder eine Unterbrechung der Stetigkeit von

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN

f (x) oder f′ (x) für $x = re^{t\sqrt{-1}}$ eintritt, läßt sich leicht an einzelnen Beispielen zeigen.

Es sei zuerst $f(x) = x^m$.

Man hat dann $f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = r^m (\cos mt + \sqrt{-1} \sin mt)$;

$f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = m\, r^{m-1} (\cos (m-1)\, t \sin (m-1)\, t)$.

Im Fall daß m eine ganze positive Zahl darstellt, sind die vier Functionen

$$\cos mt,\ \sin mt,\ \cos (m-1)\, t,\ \sin (m-1)\, t$$

stetig, endlich und periodisch. Es muß deshalb der Ausdruck

$$\int_0^{2\pi} m\, r^{m-1}\, e^{mt\sqrt{-1}}$$

oder der Ausdruck

$$\int_0^{2\pi} e^{mt\sqrt{-1}}\, dt \text{ Null werden.}$$

Man hat nun

$$\int_0^{2\pi} \left(e^{mt\sqrt{-1}}\right) dt = \lim dt \left\{1 + \alpha^m + \alpha^{2m} \cdots \alpha^{(n-1)m}\right\}$$

$= \lim dt \dfrac{(1-\alpha^{mn})}{1-\alpha^m}$, wenn zur Abkürzung $e^{dt\sqrt{-1}} = \alpha$ gesetzt wird.

Vermöge der Bedeutung von α mit Berücksichtigung der Gleichung $\dfrac{2\pi}{n} = dt$ und der bekannten goniometrischen Formeln

$$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a \text{ und } \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

findet man aber

$$1 - \alpha^{mn} = 1 - e^{nm\,dt\sqrt{-1}} = 1 - \cos 2m\pi - \sqrt{-1} \sin 2m\pi$$

$$= 2 \sin m\pi\, (\sin m\pi - \sqrt{-1} \cos m\pi);$$

desgleichen

$$1 - \alpha^m = 1 - e^{m\,dt\sqrt{-1}} = 2 \sin \frac{m\pi}{n}\left(\sin \frac{m\pi}{n} - \sqrt{-1} \cos \frac{m\pi}{n}\right).$$

Folglich $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(e^{mt\sqrt{-1}}\right) dt =$

$$\lim \cdot dt \left\{\frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} \cdot \frac{\sin m\pi - \sqrt{-1} \cos m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n} - \sqrt{-1} \cos \frac{m\pi}{n}}\right\}$$

$$= \frac{\sin m\pi\,(\sin m\pi - \sqrt{-1}\cos m\pi)}{\frac{m}{2}\lim\cdot\left\{\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\frac{m\pi}{n}}\left(\sin\frac{m\pi}{n} - \sqrt{-1}\cos\frac{m\pi}{n}\right)\right\}};$$

was unter Berücksichtigung, daß

$$\lim\cdot\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\frac{m\pi}{n}} = 1,\ \lim\sin\frac{m\pi}{n} = 0 \text{ und } \lim\cos\frac{m\pi}{n} = 1 \text{ ist,}$$

sich auf

$$2\,\frac{\sin m\pi}{m}\ \frac{(\sin m\pi - \sqrt{-1}\cos m\pi)}{-\sqrt{-1}}$$

reducirt. Dieses Resultat ist nun in der That Null, weil $\sin m\pi = 0$. Nur der Fall $m = 0$ bildet eine Ausnahme, wo sich der wahre Werth jenes Ausdruckes als 2π herausstellt.

Bedeutet m eine negative Zahl, dann wird

$$f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = \frac{\cos mt - \sqrt{-1}\sin mt}{r^m};$$

und

$$f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = -m\,\frac{\cos(m+1)t - \sqrt{-1}\sin(m+1)t}{r^{m+1}}.$$

Beide Ausdrücke sind stetig und endlich für alle $r > 0$ und sonst beliebige t. Man findet durch ein dem obigen ähnliches Verfahren den Ausdruck

$$\int_0^{2\pi} e^{-mt\sqrt{-1}}\,dt = \frac{2\sin m\pi}{m}\left\{\frac{\sin m\pi + \sqrt{-1}\cos m\pi}{\sqrt{-1}},\right\}$$

welcher in der That wieder Null ist, wenn nicht $m = 0$.

Stellt endlich m eine gebrochene positive oder negative Zahl dar, so geschieht unseren Bedingungen nicht mehr Genüge. Denn z. B.

$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{t}{3} + \sqrt{-1}\cos\frac{t}{3}\right)$ ist nicht mehr gleich

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{t+2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{t+2\pi}{3}\right).$$

Auch sind dann die beiden für den fraglichen Grenzwerth vorhin gefundenen Ausdrücke nicht mehr Null.

Es sei zweitens $f(x) = lx$.

Man hat hier

$$f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = l\,(r\cos t + r\sqrt{-1}\sin t)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, l\, r^2 + l\,(\cos t + \sqrt{-1}\sin t);$$

und

$$f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{r e^{t\sqrt{-1}}}.$$

Die Größe $\frac{1}{2}\, l\, r^2$ ist stetig und endlich für jedes von 0 verschiedene r; es muß mithin r zunächst größer oder kleiner als 0 sein. Was den Ausdruck $l\,(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$ anlangt, so ist derselbe $= t\sqrt{-1} + 2\,k\,\pi\,\sqrt{-1}$. Da in dem Letzteren die nicht periodische Größe $t\sqrt{-1}$ vorkommt, so kann das Periodischwerden derselben, im Falle t z. B. um 2π zugenommen hat, nur durch eine plötzliche Verminderung von k um eine Einheit erreicht werden.

Es behält demnach der Ausdruck $l\,(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$ innerhalb eines Intervalls vom Umfange 2π die nämliche Form bei, wechselt aber alsdann dieselbe plötzlich und ist somit als discontinuirlich zu betrachten. Auch geht im vorliegenden Falle der Ausdruck

$$\int_0^{2\pi} f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt\; e^{t\sqrt{-1}}$$

$$\text{in } \lim\, dt \left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cdots\right\} = \frac{2\pi}{r} \text{ über;}$$

d. h. der in Frage stehende Grenzwerth ist nicht Null.

Es kann die Größe $f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) e^{t\sqrt{-1}}$ auch als die Derivirte von $f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ in Bezug auf r gelten, mithin der Grenzwerth $\int_0^{2\pi} f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) e^{t\sqrt{-1}}\, dt$ ebenfalls als die Derivirte von $\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt$ in Bezug auf r angesehen werden, indem eine Summe von Größen differentiirt wird, wenn man diese Operation an jedem einzelnen Theile vornimmt. Setzen wir den Ausdruck $\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt$, welcher offenbar eine Function vor r ist, $= F(r)$; so folgt für unendlich abnehmende β:

$$\frac{F(r+\beta)-F(r)}{\beta} = \frac{d\,F(r)}{d\,r} = F'(r)$$

$$= \int_0^{2\pi} f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) e^{t\sqrt{-1}}\,dt$$

$$+ \lim \beta \int_0^{2\pi} f''\left((r+\vartheta\beta)\,e^{t\sqrt{-1}}\right)\left(e^{t\sqrt{-1}}\right)^2 dt,$$

wenn f'' nicht bloß für sämmtliche dem Werthe r, sondern auch für sämmtliche dem Werthe $r + \vartheta\,\beta$ entsprechenden mögliche Werth von t stetig und endlich bleibt. Indem dergestalt die beiden Functionen f', f'' stetig und endlich für alle Werthe von t bleiben und den Umfang ihrer Periode gleich $2\,\pi$ haben, ergibt sich $F'(r) = 0$. Hieraus folgt, daß die Function

$$F(r) = \int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt$$

die Eigenschaft hat, dem durch den Abstand β von ihr getrennten Nachbarwerthe gleich zu sein, so lange $f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ eine periodische Function vom Umfang $2\,\pi$ ist, ferner daß f, f', f'' stetig und endlich sind für alle Werthe von t, welche sich mit dem Werthe r und bei f'' mit $r + \beta$ verbinden. — Ist $\beta > 0$, so gelangt man durch eine Reihe Zwischenstufen r, $r + \beta$, $r + 2\,\beta$, ... bis zu einem Werthe r_1, welcher die erwähnten Bedingungen nicht mehr erfüllt, und desgleichen, wenn $\beta < 0$ ist, zu einem unter r liegenden Werthe r_0, für welchen dasselbe sich ereignet. Innerhalb dieser Grenzen ist also

$$F(r) = \int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt$$

unveränderlich, welchen Werth auch r annehmen mag. Ist die Null zwischen jenen beiden Werthen r_0 und r_1 enthalten, so stimmt der Werth von F mit dem für $r = 0$ hervorgehenden überein; d. h. man hat, wenn f, f', f'' stetig und endlich bleiben, für alle Werthe von t, sowie für alle Werthe von r, welche kleiner als r_1 sind und bis zur Null herabgehen, die Gleichung:

$$F(r) = F(0), \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} f(0)\,dt = f(0)$$

mit Berücksichtigung daß für $dt = \frac{2\,\pi}{n}$, wenn a eine von t unabhängige Größe ist, man hat

$$\int_0^{2\pi} a\,dt = \lim 2\,\pi\left(\frac{a + a + \cdots}{n}\right) = 2\,\pi\,a.$$

Wenn die Reihe der stetigen Werthe von f nicht bis zu $r = 0$ herabreicht, sondern z. B. von $r_0 > 0$ bis $r_1 = \infty$ geht; so würde man ebenso

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt = f(\infty)$$

finden. Man setze z. B.

$$f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = \frac{re^{t\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}} - \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}, \text{ und } r > \varrho.$$

Es ergiebt sich, da alsdann für alle bis ins Unendliche fortgehende noch größere Werthe von r, der Ausdruck $f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ stetig und endlich bleibt, für $r = \infty$ der Werth:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1 - \frac{\varrho}{r}e^{(\varphi - t)\sqrt{-1}}} = 1;$$

während für $r < \varrho$ der fragliche Werth für $r = 0$ bestimmt wird, wo sich derselbe $= 0$ herausgestellt. Dieselben Resultate findet man auch, wenn man im Falle $r > \varrho$ die Reiheentwickelung

$$1 + \frac{\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}{\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)} + \frac{\varrho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}}}{\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)^2} + \cdots;$$

und im Falle $r < \varrho$ die Entwickelung

$$\frac{1}{\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}} \cdot re^{t\sqrt{-1}} + \frac{1}{\varrho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}}}\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)^2 + \cdots$$

ausführt und dabei berücksichtigt daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1,$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(re^{\sqrt{-1}}\right)^m = 0 \text{ ist.}$$

§. 50. **Erweiterung der oben angestellten Betrachtungen.** Durch ein dem vorigen ähnliches Verfahren läßt sich nun der Grenzwerth der Summe

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{\left(e^{t\sqrt{-1}}\right)^m} dt = F(r)$$

bestimmen, wo von der Function $\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ ein für allemal voraus-

gesetzt wird, daß sie für alle möglichen Werthe von r im Intervall von 0 bis r, nebst ihren sämmtlichen Derivirten bis einschließlich der (m+2)ten stetig und endlich bleiben. Wir hätten hiernach die Gleichungen:

$$F'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{\left(e^{t\sqrt{-1}}\right)^{m-1}}\, dt;$$

$$F''(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{\left(e^{t\sqrt{-1}}\right)^{m-2}}\, dt;$$

. . . .

$$F^{(m-1)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi^{m-1}\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{e^{t\sqrt{-1}}}\, dt$$

und

$$F^{(m)} r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^{(m)}\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt.$$

Dem vorhergehenden Paragraphen zufolge ist aber $F^{(m)}(r) = \Phi^{(m)}(0)$, d. h. wieder unabhängig von r. Es kann also, da $F^{(m)}(r) = \Phi^{(m)}(0)$ durch Differentiation von $F^{(m-1)}(r)$ entsteht, $F^{(m-1)}(r)$ nur gleich $r\,\Phi^{(m)}(0) + C$ sein, wo C eine noch zu bestimmende, von r unabhängige Größe bezeichnet, welche bei der Differentation verschwunden sein könnte.

Der Werth dieser Constante C läßt sich dadurch bestimmen, daß man $r = 0$ annimmt, eine Annahme, welche den Werth von C in keinerlei Weise ändert. Dergestalt wird $F^{(m-1)}(0) = C$, woraus, da

$$F^{(m-1)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi^{(m-1)}(0)\, dt}{e^{t\sqrt{-1}}} = 0 \text{ ist,}$$

folgt $C = 0$. — Wenn nun $F^{(m-1)}(r) = r\,\Phi^{(m)}(0)$, so kann $F^{(m-2)}(r)$ nur von der Form $\frac{r^2}{2}\ \Phi^{(m)}(0) + C$ sein. Es ist aber

$$F^{(m-2)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi^{(m-2)}\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{e^{t\sqrt{-1}}}\, dt,$$

mithin für

$$r = 0,\ C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi^{(m-2)}(0)\, dt}{e^{2t\sqrt{-1}}} = 0.$$

Aus $F^{(m-2)}(r) = \frac{r^2}{2}\,\Phi^{(m)}(0)$ folgt ebenso $F^{(m-3)}(r) = \frac{r^3}{2 \cdot 3}\,\Phi^{(m)}(0)$.
Auf diese Art weiter aufzusteigen hat nicht die geringste Schwierigkeit, so daß endlich

$$F\,(r) = \frac{r^m}{1 \cdot 2 \ldots m}\,\Phi^{(m)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt.$$

Die Gültigkeit dieser letztern Gleichung hat sogleich ein Ende, sobald die vorausgesetzten Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit von Φ, Φ', ... für alle Werthe von t, verbunden mit den bis 0 abnehmenden Werthen von r nicht erfüllt werden. Die Bedingung des Endlichseins ist übrigens dahin zu beschränken, daß, wenn alle in den gegebenen Intervallen enthaltenen Werthe von $\frac{d^m\Phi}{dx^m}$ z. B., für wachsende Werthe von m unendlich groß werden, in dem Ausdrucke $\frac{d^m\Phi}{dx^m}$ aber keine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet, die Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{\left(e^{t\sqrt{-1}}\right)^m} = \frac{r^m\,\Phi^{(m)}\,0}{1 \cdot 2 \ldots m}$$

ihre Gültigkeit behält. Dieß ereignet sich z. B. bei $\Phi = e^{2x}$, deren mte Derivirte $2^m e^{2x}$ mit m zwar unendlich wird, aber doch immer stetig bleibt, was bei der Function $\Phi = x^{\frac{1}{2}}$ für $x = 0$ nicht mehr stattfindet.

Uebrigens darf man nicht zur Bestimmung des Werthes

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)^m} = \frac{\Phi^{(m)}\,(0)}{1 \cdot 2 \ldots m}$$

voreilig die im vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt = f\,(0)$$

anwenden und den fraglichen Werth für $r = 0$ bestimmen wollen. Denn läßt man nach den bei dieser Gleichung angegebenen Vorschriften, um die für alle r bis $r = 0$ geforderte Stetigkeit der Function

$$f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)^m}$$

zu erproben, r den Werth 0 annehmen, so findet schon ein Unendlichwerden statt.

§. 51. **Das Cauchy'sche Theorem.** Nach diesen Voruntersuchungen schreiten wir zu unserm Ziele, nämlich die Function $\Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)$ nach den steigenden Potenzen von $\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}$ zu entwickeln. Wir betrachten deshalb den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)-C}{re^{t\sqrt{-1}}-\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}\cdot re^{t\sqrt{-1}}\,dt,$$

wo C eine beliebige Constante vorstellt. Die über f gemachte Voraussetzung gestattet uns aber noch keineswegs die Anwendung der Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)dt = f(0),$$

wenn $r > \varrho$ vorausgesetzt wird, so lange C beliebig ist. Denn lassen wir nach den dort angegebenen Regeln r das Intervall von r bis 0 durchlaufen, so findet man, daß die für alle diese Werthe geforderte Stetigkeit von

$$f = \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)-C}{re^{t\sqrt{-1}}-\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}\cdot re^{t\sqrt{-1}}$$

für $r = \varrho$, wenn nämlich $t = \varphi$ wird, eine Unterbrechung erleidet, wenn auch Φ, Φ' ... stetig sind. Diese Unterbrechung kann nur dadurch verhütet werden, daß sich der Nenner gegen den Zähler aufhebt, d. h. wenn $C = \Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)$ genommen wird: denn alsdann ist für $r = \varrho$ und $t = \varphi$ der ganze Bruch von der Form $\frac{0}{0}$, und sein wahrer Werth $= \Phi'\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\cdot \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}$. Daß übrigens ohnerachtet dieses endlichen wahren Werthes auch keine Unstetigkeit herbeigeführt worden ist, zeigt sich an dem ersten Differentialquotienten des Bruches, welcher sonst für $r = \varrho$ und $t = \varphi$ unendlich werden müßte. Sein wahrer Werth stellt sich nämlich als endlich heraus, obschon er ebenfalls unter der Form $\frac{0}{0}$ sich zeigt. Aehnliches gilt auch von dem zweiten Differentialquotienten.

Die Function

$$\frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)-\Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)}{re^{t\sqrt{-1}}-\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}\cdot re^{t\sqrt{-1}}$$

genügt also, wenn nur die bei den erwähnten Untersuchungen geforderten

Bedingungen der Stetigkeit von $\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$; Φ'; Φ'' statt finden, den Vorschriften, welchen bei Anwendung der Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt = f(0)$$

Genüge geschehen muß. Um so mehr findet dieß statt, wenn, um auch der Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{e^{mt\sqrt{-1}}} = \frac{r^m}{1\cdot 2\ldots m}\Phi^{(m)}(0)$$

die Anwendbarkeit zu gestatten, alle übrigen Derivirten stetig und endlich sind. — Die Anwendung der Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt = f(0)$$

liefert folglich jetzt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) - \Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)}{re^{t\sqrt{-1}} - \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}\, re^{t\sqrt{-1}}\, dt = 0;$$

d. h. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) re^{t\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}} - \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}\, dt$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) re^{t\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}} - \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}\, dt,$$

oder mit Berücksichtigung von

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{t\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}} - \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}} = 1:$$

die Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) re^{t\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}} - \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}\cdot dt = \Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)$$

Wir bemerken hier nochmals, daß diese Gleichung nur gültig bleibt, wenn $r > \varrho$; alsdann ist aber allemal

$$\frac{re^{t\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}} - \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}} = 1 + \frac{\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}}} + \frac{\varrho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}}}{r^2 e^{2t\sqrt{-1}}} \ldots$$

$$+ \left(\frac{\varrho}{r}\right)^m \cdot \frac{e^{m(\varphi - t)\sqrt{-1}}}{1 - \dfrac{\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}}}};$$

das Restglied der Reihe verschwindet, da $\frac{\varrho}{r} < 1$ vorausgesetzt, für wachsende m, $\lim \left(\frac{\varrho}{r}\right)^m$ verschwindet, während der damit multiplicirte Factor sich stets in endlichen Grenzen bewegt.

Die Gleichung

$$\Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) re^{t\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}} - \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}\, dt$$

kann also auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) \left\{1 + \frac{\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}{re^{t\sqrt{-1}}} + \frac{\varrho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}}}{\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)^2} + \ldots \text{ in inf}\right\} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt + \frac{\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}}{r} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{e^{t\sqrt{-1}}}\, dt +$$

$$\frac{\varrho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}}}{r^2} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{\left(e^{t\sqrt{-1}}\right)^2} + \ldots + \text{inf.}$$

Die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)}{e^{mt\sqrt{-1}}}\, dt = \frac{r^m}{1 \cdot 2 \ldots m}\, \Phi^{(m)}(0)$$

liefert uns aber für m = 1, 2, 3 ... die Werthe der Coefficienten von $\frac{\varrho}{r} e^{\varphi\sqrt{-1}}, \frac{\varrho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}}}{r^2}, \ldots$ durch deren Substitution sich endlich ergibt:

$$\Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) = \Phi(0) + \frac{\varrho}{r} e^{\varphi\sqrt{-1}}\Phi'(0) + \frac{\varrho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}}}{1 \cdot 2}\Phi''(0) + \ldots \text{in inf.}$$

Da diese Gleichung eine unter den angegebenen Bedingungen streng richtige ist, so muß die Reihe zur Rechten zugleich convergiren, indem sie im entgegengesetzten Falle als unbestimmt oder unendlich nicht dem gegebenen Ausdrucke $\Phi\left(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)$ gleich sein könnte. Hiernach wäre

das Cauchy'sche Theorem außer Zweifel gestellt. Denn r, mithin auch ϱ liegt unter dem unzuläßigen Modul r_1, für welchen eine Discontinuität einer beliebigen, also ein Unendlichwerden der folgenden Derivirten stattfindet.

Was den Fall anlangt, wo ϱ gleich dem unzuläßigen Modul r_1 wird, so ist derselbe unschwer zu entscheiden. Da nämlich es eine Eigenschaft jedes nach steigenden Potenzen von ϱ geordneten Ausdruckes ist, mit der Convergenz die Stetigkeit zu verbinden, wenigstens nach der Seite hin, wo sich die übrigen stetigen Werthe der Function befinden; so muß die Reihe

$$\Phi(0) + \frac{(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}})}{1}\Phi'(0) + \ldots,$$

falls sie noch convergiren sollte, der Größe $\Phi(\varrho e^{\varphi\sqrt{-1}})$ immer noch gleich sein, insofern dieselbe für die Werthe ϱ und φ eine bestimmte und nach der Voraussetzung in einem stetigen Intervalle begriffene Größe ist.

Die Bedingungen aufzustellen, unter denen das Taylor'sche Theorem Gültigkeit behält, wird nunmehr keine Schwierigkeit mehr haben. Man wird nämlich bald finden, daß wenn r den Modulus von x, ϱ den von h, und r_1 den kleinsten der Moduli bezeichnet, für welchen eine der Functionen f (x), f′ (x), f″ (x) ... unstetig oder unendlich wird, der Modulus von h zwischen $r_1 - r$ und 0 liegen muß, insofern die Gleichung

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \text{etc.}$$

unbedingt gelten soll.

§. 52. **Beispiele zum Cauchy'schen Theorem.** Es sei zuerst $f(x) = (1+x)^m$. Im Falle m eine ganze positive Zahl bedeutet, wird keine der Functionen f (x), f′ (x), f″ (x) .... eine Potenz mit negativem Exponenten darstellen; es wird daher für ein bestimmtes endliches x niemals eine Unstetigkeit oder ein Unendlichwerden irgend einer jener Functionen eintreten: Die Reihe

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots$$

wird mithin für jedes beliebige x allgemein gültig bleiben, sobald m eine ganze positive Zahl ist. Wenn aber m eine negative oder gebrochene Zahl bedeutet, so kann die Function oder eine ihrer Derivirten unendlich werden, sobald nämlich $x = -1$ oder, wenn

$$x = \varrho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

genommen wird, $\varrho = 1$ und $\varphi = \pi$ ist. Der Modulus von x muß

also kleiner als der Modulus r, = 1 sein, für welchen die Unendlichkeit der Function oder einer ihrer Derivirten zum Vorschein kommt. Die Gleichung

$$(1+x)^m = 1 + m\,x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \dots$$

gilt also in dem Fall, daß m keine positive ganze Zahl ist, nur für solche x, deren Modulus unter der Einheit liegt.

Für $f(x) = e^x$ sind $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\dots$ durchweg stetige Functionen. Die Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} +$ ꝛc. gilt daher ohne alle Einschränkung. Auf ganz gleiche Weise überzeugt man sich, daß die für sin x und cos x entwickelten Reihen für jeden beliebigen Werth von x den gedachten Functionen gleich geltend sind.

Für $f(x) = l\,(1+x)$ wird die erste Derivirte, wenn

$$x = \varrho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)$$

gesetzt wird, unendlich für $\varrho = 1$ und $\varphi = \pi$. Die Reihe

$$l\left(1 + \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) = \varrho e^{\varphi\sqrt{-1}} - \frac{\varrho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}}}{2} + \dots \text{ in inf}$$

ist also für $\varrho > 1$ ungültig. — Die Gleichung $l\cdot 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ schließt für $\varrho = 1$ und $\varphi = 0$ eine convergente Reihe ein, ist folglich noch richtig.

Die Function $\Phi = e^{-\frac{1}{x^2}}$ wird unendlich für $\varrho = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Obgleich nun für $\varrho = 0$, $\varphi = 0$ die Functionen Φ, Φ', $\Phi''\dots$ Null werden, wie sich aus der Untersuchung der für $x = 0$ unter unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ auftretenden Derivirten ergibt; so ist doch die convergente Reihe $0 + x\cdot 0 + \frac{x^2}{1\cdot 2}\,0$ keineswegs $= e^{-\frac{1}{x^2}}$, weil keiner der positiv gedachten Moduli ϱ unter r, = 0 liegen kann.

Die Derivirten von $\sqrt{(x^2+2)(x-2)}$ werden für die Systeme $\varrho = \sqrt{2}$, $\varphi = \pm\pi$; und $\varrho = 2$, $\varphi = 0$ unendlich. Der kleinste dieser Moduli ist $\sqrt{2}$; für $\varrho > \sqrt{2}$ hört also die Gültigkeit der entwickelten Reihe auf. Setzt man $x = \frac{1}{t}$, so ist die entstehende Function $t^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+2t^2)(1-2t)}$ nach steigenden Potenzen von t, also nach fallenden Potenzen von x entwickelbar, wenn der Modul von $x > 2$ ist.

VI. Differentiation der Functionen von mehreren Veränderlichen.

§. 53. **Functionen mehrerer Veränderlichen.** Bisher betrachten wir nur Functionen von einer Veränderlichen, d. h. Größen, deren Werth bestimmt ist, sobald der veränderlichen Größe, von welcher sie abhängen, ein gewisser Werth beigelegt wird. Hat man aber eine Gleichung zwischen mehr als zwei Veränderlichen, so wird man diesen sämmtlichen Veränderlichen, mit Ausnahme einer einzigen, völlig von einander unabhängige Werthe beilegen können. Diejenige Veränderliche nun, deren Werth aus der Gleichung sich ergibt, sobald man für die anderen Veränderlichen willkürliche Werthe gesetzt hat, heißt die Function dieser letzteren, während sie die unabhängigen Veränderlichen sind. Um darzustellen, daß z die abhängige Veränderliche oder die Function von mehreren veränderlichen Größen $x, y, u, v \ldots$ ist, bedient man sich der Bezeichnung:

$$z = f(x, y, u, v \ldots) \text{ oder } F(x, y, u, v \ldots z) = 0,$$

je nachdem z eine entwickelte (explicite) oder eine unentwickelte (implicite) Function ist.

Um ein vollständiges Bild von einer solchen Function zu erhalten, muß man den unabhängigen Veränderlichen $x, y, u, v \ldots$ successive alle mögliche Werthe beilegen, und dabei die entsprechenden Werthe der Function z auf gehörige Weise zusammenstellen.

Bei einer Function von mehreren unabhängigen Veränderlichen kann man nun einen oder einige für sich allein, oder gleichzeitig alle Variabeln sich ändern lassen. In dem ersten Falle, wo man mit einer oder einigen unabhängigen Variabeln eine Aenderung vornimmt, wobei die übrigen unabhängigen Veränderlichen als Constante gelten, wird die dadurch entstehende Aenderung der Function eine partielle genannt; während im zweiten Falle, wo alle unabhängige Variabeln sich gleichzeitig ändern, die daraus hervorgehende Veränderung der Function eine totale heißt.

Die Differentiation der Functionen von mehreren Veränderlichen beruht ganz auf denselben Principien, welche in den vorhergehenden Abschnitten festgehalten worden sind. Man läßt nämlich jede unabhängige Veränderliche $x, y, u, v \ldots.$ um eine unendlich kleine Größe $dx, dy, du, dv \ldots$ sich ändern, deren jede einen constanten Werth besitzt, dergestalt, daß dieselben in keiner bestimmten Relation zu einander stehen. Die Function z ändert sich hiernach um eine unendlich kleine Größe dz, deren Werth jederzeit dadurch bestimmt wird,

daß man die Grenzen ermittelt, welchen die Quotienten der Aenderung der Function und der Aenderung der einzelnen unabhängigen Veränderlichen ohne Ende näher rücken.

§. 54. **Partielle und totale Differentiale.** Wir wollen zunächst eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen: $z = f(x, y)$ betrachten und annehmen, daß die unabhängigen Veränderlichen x und y beziehungsweise um die willkürlichen Größen Δx und Δy sich ändern. Die entsprechende Aenderung der Function z wird sein:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

an deren Stelle man den identischen Ausdruck:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x,y) + f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y),$$

oder den gleichgeltenden Ausdruck:

$$\Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y$$

setzen kann. Läßt man nun die Größen Δx und Δy sich ohne Ende der Null nähern, so ist einmal:

$$\lim . \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{d \cdot f(x, y)}{d x},$$

d. h. gleich der partiellen Derivirten von $f(x, y)$ in Bezug auf die Veränderliche x; ferner ist:

$$\lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = \lim \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

d. h. gleich der Derivirten von $f(x, y)$ in Bezug auf die Veränderliche y. Das in Frage stehende Differential wird also sein:

$$dz = \frac{df(x, y)}{dx} dx + \frac{df(x, y)}{dy} dy,$$

wofür man

$$dy = f_x'(x, y) dx + f_y'(x, y) dy,$$

wenn man die Derivirte von $f(x, y)$ in Bezug auf x mit $f_x'(x, y)$ und die Derivirte von $f(x, y)$ in Bezug auf y mit $f_y'(x, y)$ bezeichnet, oder

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$$

schreiben kann.

In dem letzten Ausdrucke bedeutet $\frac{dz}{dx} dx$ oder $f_x'(x, y) dx$ dasjenige Differential der fraglichen Function, welches man erhält, in=

dem man x als unabhängige Veränderliche ansieht. Es heißt deshalb das partielle Differential der Function z in Bezug auf die Veränderliche x und $\frac{dz}{dx}$ oder $f_x'(x, y)$ der partielle Differentialquotient oder die partielle Derivirte von z in Bezug auf x; wie ebenso $f_y'(x, y)\,dy$ oder $\frac{dz}{dy}dy$ und $\frac{dz}{dy}$ oder $f_y'(x, y)$ das partielle Differential und der partielle Differentialquotient der Function z in Bezug auf die Veränderliche y genannt werden. Die Summe der partiellen Differentiale macht demnach das totale Differential dz der Function z aus.

Die Formel $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ bietet dergestalt nicht die mindeste Zweideutigkeit; wir dürfen nur nicht das im ersten Theil der Gleichung befindliche totale Differential dz mit den partiellen Differentialen dz verwechseln, welche in den Zählern der Differentialquotienten im zweiten Theil der Gleichung vorkommen.

Wegen der Unabhängigkeit, in welcher die Veränderlichen x und y zu einander stehen, ist es keineswegs erforderlich, sie beide gleichzeitig sich ändern zu lassen. Im Allgemeinen wird das totale Differential der Function $z = f(x, y)$ durch die obige Formel ausgedrückt. Handelt es sich jedoch darum, das Differential derselben in Bezug auf die eine oder die andere der Veränderlichen zu nehmen, so hat eine solche Differentiation weiter keine Schwierigkeit.

Die eben angestellten Betrachtungen lassen sich leicht auf Functionen von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen ausdehnen. Für $z = f(x, y, u, v)$ z. B. hat man

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv,$$

so daß das totale Differential der Function z gleich der algebraischen Summe der partiellen Differentiale ist, welche die Function erfährt, wenn jede der Größen, von denen sie abhängt, sich ändert.

§. 55. **Implicite Functionen nebst Beispielen.** Es sei die Gleichung $f(x, y, z) = 0$, wo z eine Function der unabhängigen Veränderlichen x und y ist. Man hat einmal, weil z eine Function von x ist:

$$\frac{df}{dx} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{df}{dz} = 0, \text{ woraus } \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}};$$

ferner, weil z eine Function von y ist:

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0, \text{ woraus } \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}};$$

dann, weil z eine Function von x und y ist:

$$dz = \frac{dz}{dx}\, dx + \frac{dz}{dy}\, dy.$$

Werden in der letzten Gleichung die obigen Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ eingeführt, so finden wir für das totale Differential von z:

$$dz = -\frac{\frac{df}{dx}\, dx + \frac{df}{dy}\, dy}{\frac{df}{dz}}.$$

Beispiele. 1) Für $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ wird so das totale Differential

$$dz = -\frac{x}{z}\, dx - \frac{y}{z}\, dy.$$

2) Für $z = x^3 + a\, x^2\, y + y^3$ findet man das totale Differential:

$$dz = (3\, x^2 + 2\, a\, x\, y)\, dx + (ax^2 + 3\, y^2)\, dy.$$

3) Für $z = l \operatorname{tang} \frac{x}{y}$ ergibt sich das totale Differential

$$dz = \frac{2\,(y\; dx - x\; dy)}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}, \text{ weil } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y} \operatorname{tang} \frac{x}{y}},$$

$$\text{und } \frac{dz}{dy} = -\frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y} \operatorname{tang} \frac{x}{y}}.$$

4) Für

$$z = x^2\, y^3\, u \text{ ist } \frac{dz}{dx} = 2x\, y^3\, u;\; \frac{dz}{dy} = 3x^2\, y^2\, u;\; \frac{dz}{du} = x^2\, y^3;$$

folglich das totale Differential

$$dz = 2\, x\, y^3\, u\, dx + 3\, x^2\, y^2\, u\, dy + x^2\, y^3\, du.$$

§. 56. **Die homogenen Functionen.** Vermittelst der Formel

$$dz = \frac{dz}{dx}\, dx + \frac{dz}{dy}\, dy + \frac{dz}{du}\, du + \frac{dz}{dv}\, dv + \text{ꝛc.}$$

läßt sich mit Leichtigkeit eine interessante Eigenschaft der sogenannten homogenen Functionen nachweisen. Eine Function $f(x, y, z \ldots)$ von mehreren unabhängigen Veränderlichen $x, y\ z \ldots$ heißt nämlich homogen, sobald, wenn in derselben die Variabeln $x, y, z \ldots$ der Reihe nach mit $xt, yt, zt \ldots$ vertauscht werden, die Relation:

$$f(xt, yt, zt \ldots) = t^n f(x, y, z \ldots)$$

besteht. Die Zahl n wird der Grad der homogenen Function genannt.

Wir wollen die beiden Theile des letzten Ausdruckes in Bezug auf t differentiiren. Die Derivirte des zweiten Theils ist $nt^{n-1} f(x, y, z \ldots)$. Der erste Theil reducirt sich, wenn

$$tx = u,\ ty = v,\ tz = w \ldots$$

gesetzt wird, auf $f(u, v, w \ldots)$, dessen Derivirte ist:

$$\frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} \ldots + \text{2c.}$$

Es ist aber

$$\frac{du}{dt} = x,\ \frac{dv}{dt} = y,\ \frac{dw}{dt} = z \ldots,$$

daher $x \cdot \frac{df}{du} + y \cdot \frac{df}{dv} + z \frac{df}{dw} \ldots = nt^{n-1} f(x, y, z \ldots)$.

Setzt man nun $t = 1$, wodurch du in dx, dv in dy, dw in $dz, \ldots$ übergeht, so entspringt aus der letzten Gleichung:

$$x \cdot \frac{df}{dx} + y \cdot \frac{df}{dy} + z \cdot \frac{df}{dz} \ldots = n f(x, y, z \ldots).$$

Multiplicirt man also die partiellen Derivirten einer homogenen Function vom nten Grade beziehungsweise mit den Veränderlichen, auf welche sie Bezug haben; so wird die Summe der dergestalt gebildeten Producte dem Producte der Function mit der Zahl n äquivalent sein.

Für den besondern Fall, daß die homogene Function $f(x, y, z \ldots)$ eine Function der Summe $x + y + z \ldots$ ist, wird die Function blos von t abhängig sein, wenn $x + y + z \ldots = t$ gesetzt wird. Für die partiellen Derivirten hat man dann

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},\ \frac{df}{dy} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dy},\ \frac{df}{dz} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \ldots;$$

die Bedingungsgleichung für t liefert aber

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dz} \ldots = 1;$$

daher

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = \frac{df}{dz} \ldots.,$$

oder $f'_x(x, y, z \ldots) = f'_y(x, y, z \ldots) = f'_z(x, y, z \ldots) \ldots\ldots$

Bemerken wollen wir noch, daß der Character einer homogenen Function nothwendigerweise verlangt, daß dieselbe eine algebraische oder höchstens eine transcendente Form einer algebraischen Function darstellen, nur daß in dem letztern Falle die algebraische Function nicht blos homogen, sondern auch vom Grade Null sein müsse.

Beispiele. 1) Aus der Gleichung:

$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy)$

bekommt man

$$\frac{df}{dx} = Ax + Ez + Fy, \frac{df}{dy} = By + Dz + Fx,$$

$$\frac{df}{dz} = Cz + Dy + Ex.$$

Folglich, weil $n = 2$ ist:

$(Ax + Ez + Fy) x + (By + Dz + Fx) y + (Cz + Dy + Ex) z$

$= 2 \cdot \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + Fxy).$

2) Für die Function

$$f(x, y) = l\left(\frac{x}{y}\right) \text{ wird } \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}, \frac{df}{dy} = -\frac{1}{y};$$

folglich, weil $n = 0$ ist,

$$x \cdot \frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} = 1 - 1 = 0.$$

VII. Differentiale höherer Ordnungen für die Functionen von mehreren Veränderlichen.

§. 57. **Totale Differentiale höherer Ordnungen.** Es hat keine Schwierigkeit den Begriff der Differentiale höherer Ordnungen auf die Functionen von mehreren Veränderlichen zu übertragen. Wir wollen zunächst wieder die Function mit zwei Veränderlichen

$$z = f(x, y)$$

betrachten. Das totale Differential der ersten Ordnung wird, wie wir oben gesehen haben, ausgedrückt durch:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

wo die durch $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ dargestellten Functionen die partiellen Differentialquotienten der ersten Ordnung der Function z, beziehungsweise auf x und y genommen, sind.

Will man nun die Operation des Differentiirens in gleicher Weise auf den Ausdruck von dz übertragen, oder mit anderen Worten das totale Differential der zweiten Ordnung d^2z von der Function z bilden; so muß man die Ausdrücke $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, welche Functionen von x und y sind, nach einander in Bezug auf x und in Bezug auf y differentiiren. Man erhält so für das totale Differential der zweiten Ordnung:

$$d^2z = \left(\frac{d\cdot\frac{dz}{dx}}{dx}dx + \frac{d\cdot\frac{dz}{dx}}{dy}dy\right)dx$$
$$+\left(\frac{d\cdot\frac{dz}{dy}}{dx}dx + \frac{d\cdot\frac{dz}{dy}}{dy}dy\right)dy,$$

wenn man berücksichtigt, daß bei der Differentiation des Ausdruckes von dz die Differentiale dx und dy als constante Factoren anzusehen sind.

Es ist aber schon der zweite Differentialquotient $\frac{d\cdot\frac{dz}{dx}}{dx}$ durch $\frac{d^2z}{dx^2}$ dargestellt werden. Aehnlicher Weise läßt sich der zweite partielle Differentialquotient $\frac{d\cdot\frac{dz}{dx}}{dy}$ durch $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ darstellen, wobei die von der Linken zur Rechten fortschreitende Stellung von dx und dy im Nenner die Ordnung der Differentiation anzeigt und zugleich die Veränderlichen zu erkennen gibt, nach denen jene successive Differentiationen vorgenommen werden sollen. Ebenso kann

$$\frac{d^2z}{dy\,dx} \text{ statt } \frac{d\cdot\frac{dz}{dy}}{dx} \text{ und } \frac{d^2z}{dy^2} \text{ statt } \frac{d\cdot\frac{dz}{dy}}{dy}$$

geschrieben werden. Hiernach verwandelt sich der Ausdruck für das zweite Differential der zweiten Ordnung in:

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + \left(\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{d^2z}{dy\,dx}\right)dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2\,.$$

In diesem Ausdrucke bedeutet das Symbol $\frac{d^2z}{dx^2}$ den partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung von z in Bezug auf x, allein als veränderlich betrachtet; und das Symbol $\frac{d^2z}{dy^2}$ den partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung von z in Bezug auf y, allein als veränderlich angesehen. Das Symbol $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ gibt an, daß man die Derivirte der ersten Ordnung von z blos in Bezug auf x genommen hat und darauf die Derivirte von der so entstandenen Function $\frac{dz}{dx}$ in Bezug auf y allein. Ebenso drückt das Symbol $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ aus, daß man die Derivirte der ersten Ordnung von z blos in Bezug auf y genommen hat und dann die Derivirte von der erhaltenen Function $\frac{dz}{dy}$ mit Beziehung auf die Veränderliche x allein.

§. 58. **Ordnung der Differentiationen.** Es entsteht hier zunächst eine Frage, die sich schon früher einmal aufgeworfen hat, nämlich die, in welcher Relation die beiden Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ und $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ zu einander stehen. Diese Frage läßt sich leicht beantworten, wenn wir auf die Entstehungsweise dieser beiden Ausdrücke zurückgehen. Es ist in der That

$$\frac{dz}{dx} = \lim . \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

wenn Δx sich der Null unbegrenzt nähert; ferner ist

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \lim . \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)]}{\Delta x\ \Delta y},$$

wenn Δx und Δy sich fortwährend der Null nähern. In gleicher Weise ist

$$\frac{dz}{dy} = \lim \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

wenn Δy sich ohne Ende der Null nähert; dann ist

$$\frac{d^2z}{dy\,dx} = \lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]}{\Delta y\ \Delta x},$$

wenn Δx und Δy sich stets der Null nähern. Da nun die rechte

Seite dieses Ausdruckes von der rechten Seite des vorhergehenden in keinerlei Weise verschieden ist, so entspringt daraus die wichtige Relation:

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}.$$

Wenn also der Differentialquotient der zweiten Ordnung von einer Function zweier Veränderlichen nach jeder dieser Veränderlichen genommen werden soll, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die beiden Differentiationen vor sich gehen.

Beispiele. 1)

Für $z = \frac{x^2y}{1+y^2}$ kommt $\frac{dz}{dx} = \frac{2xy}{1+y^2}$, $\frac{dz}{dy} = \frac{x^2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}$;

$$\frac{d^2z}{dy\,dx} = \frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{2x(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

2) Für $z = \sin\frac{x}{y}$ entsteht

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y},\quad \frac{dz}{dy} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y};$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx} = -\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y}.$$

Die im vorhergehenden Paragraphen für das totale Differential der zweiten Ordnung von der gegebenen Function z aufgestellte Gleichung geht jetzt in folgende über:

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

In derselben bezeichnen die Ausdrücke

$$\frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dx\,dy},\quad \frac{d^2z}{dy^2}$$

die drei partiellen Differentialquotienten oder die drei partiellen Derivirten der zweiten Ordnung. Diese partiellen Derivirten sind im Allgemeinen bestimmte Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y, können aber auch nur eine dieser Veränderlichen enthalten oder sich auf constante Größen reduciren, oder selbst für gewisse Werthe der Veränderlichen x und y eine unbestimmte Form annehmen.

Um das totale Differential der dritten Ordnung zu bekommen, wird man die Differentialquotienten

$$\frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dx\,dy},\quad \frac{d^2z}{dy^2}$$

sowohl in Bezug auf x als auch in Bezug auf y differentiiren müssen. Man wird so finden:

$$d \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^3z}{dx^3} dx + \frac{d^3z}{dy\,dx^2} dy;$$

$$d \cdot \frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^3z}{dx^2dy} dx + \frac{d^3z}{dy\,dx\,dy} dy;$$

$$d \cdot \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^3z}{dx\,dy^2} dx + \frac{d^3z}{dy^3} dy.$$

Daraus ergibt sich unter Anwendung des oben bewiesenen Satzes, in Folge dessen es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die angedeuteten Differentiationen vorgenommen werden, für das totale Differential der dritten Ordnung der Function z der Ausdruck:

$$d^3z = \frac{d^3z}{dx^3} dx^3 + 3 \frac{d^3z}{dx^2dy} dx^2 dy + 3 \frac{d^3z}{dx\,dy^2} dx\,dy^2 + \frac{d^3z}{dy^3} dy^3.$$

Man sieht bald ein, wie sich dieses Verfahren weiter fortsetzen läßt und daß man allgemein zu der Gleichung

$$d^nz = \frac{d^nz}{dx^n} dx^n + n \cdot \frac{d^nz}{dx^{n-1}dy} dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2} dx^{n-2}dy^2 + .. \frac{d^nz}{d^ny} dy^n$$

gelangt. Dieselbe kann unter der symbolischen Form

$$d^nz = \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy\right)^n$$

geschrieben werden, wobei man sich jedoch vorbehalten muß, nach der Entwickelung des Binoms die mte Potenz von dz mit dem mten Differential zu vertauschen.

Beispiele. 1) Für $z = x^m y^n$ erhält man

$$\frac{d^4z}{dx^4} = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,x^{m-4}y^n,$$

$$\frac{d^4z}{dx^3\,dy} = m\,(m-1)\,(m-2)\,nx^{m-3}y^{n-1},$$

$$\frac{d^4z}{dx^2dy^2} = m\,(m-1)\,n\,(n-1)\,x^{m-2}y^{n-2},$$

$$\frac{d^4z}{dxdy^3} = mn\,(n-1)\,(n-2)\,x^{m-1}\,y^{n-3},$$

$$\frac{d^4z}{dy^4} = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,x^m\,y^{n-4};$$

folglich das totale Differential der vierten Ordnung

$$d^4z = m(m-1)(m-2)(m-3) \Big\{ x^{m-4} y^n dx^4 + 4 \frac{n}{m-3} x^{m-3} y^{n-1} dx^3 dy$$

$$+ \frac{6n(n-1)}{(m-2)(m-3)} x^{m-2} y^{n-2} dx^2 dy^2$$

$$+ \frac{4n(n-1)(n-2)}{(m-1)(m-2)(m-3)} x^{m-1} y^{n-3} dx\, dy^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m(m-1)(m-2)(m-3)} x^m y^{n-4} dy^4 \Big\}.$$

2) Für $z = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}$ bekommt man

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} y^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{d^3z}{dx^2dy} = -\frac{1}{12} x^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{2}{3}},$$

$$\frac{d^3z}{dxdy^2} = -\frac{1}{9} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}}, \text{ und } \frac{d^3z}{dy^3} = \frac{10}{27} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{8}{3}};$$

daher das totale Differential der dritten Ordnung

$$d^3z = \frac{3y^{\frac{1}{3}}}{8x^{\frac{5}{2}}} dx^3 - \frac{dx^2dy}{4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}}} - \frac{dxdy^2}{3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{3}}} + \frac{10x^{\frac{1}{2}}dy^3}{27y^{\frac{8}{3}}}.$$

3) Es sei $z = x^3 - x^2y$. Man findet

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 - 2xy;\ \frac{da}{dy} = -x^2;$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 6x - 2y;\ \frac{d^2z}{dxdy} = -2x;\ \frac{d^2z}{dy^2} = 0;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 6;\ \frac{d^3z}{dx^2dy} = -2.$$

4) Es sei $z = x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}}$. Man hat

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{2x^{\frac{1}{2}}};\ \frac{dz}{dy} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{y}{4x^{\frac{3}{2}}};\ \frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{3}{4y^{\frac{1}{2}}};\ \frac{d^3z}{dx^3} = \frac{3yx^{-\frac{5}{2}}}{8};$$

$$\frac{d^3z}{dx^2dy} = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}},\ \text{u. s. w.}$$

§. 59. **Fälle, in denen mehr als zwei unabhängige Veränderliche vorkommen.** Dergleichen Fälle erheischen keine neue Betrachtungen. Denn es sei $z = f(x, y, u)$.

Für das totale Differential der ersten Ordnung hat man

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{du}du.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, indem dx, dy und du als constante Factoren dagegen $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dz}{du}$ als Functionen der drei Veränderlichen x, y, u angesehen werden, so bekommt man für das totale Differential der zweiten Ordnung den Ausdruck:

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2z}{du^2}du^2$$

$$+ 2\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2z}{dx\,du}dx\,du + \frac{d^2z}{dy\,du}dy\,du\right).$$

Wenn man dasselbe Verfahren fortsetzt, erhält man allgemein den Ausdruck:

$$d^nz = \left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{du}du\right)^n,$$

wobei wieder die Potenzen von dz, welche die Entwickelung des Trinoms liefert, mit den Differentialen gleicher Ordnung vertauscht werden müssen.

Ebenso würde das Gesetz der Entwickelung des totalen Differentials der Function z von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlichen x, y, u, v ..... durch die symbolische Gleichung:

$$d^nz = \left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv \ldots\right)^n$$

ausgedrückt werden.

Beispiele. 1) Die Function $z = \frac{xy}{ax + bu}$ gibt

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{2abyu}{(ax+bu)^3};\ \frac{d^2z}{dy^2} = 0;$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{2b^2xy}{(ax+bu)^3}; \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{bu}{(ax+bu)^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,du} = \frac{(ax-bu)\,by}{ax+bu)^3}; \quad \frac{d^2z}{dy\,du} = -\frac{bx}{(ax+bu)^2};$$

mithin das zweite totale Differential

$$d^2u = \frac{2b}{(ax+bu)^3} \Big\{ -ayu\,dx^2 + bxy\,du^2 + (ax+bu)\,u\,dx\,dy$$

$$+ (ax - by)\,y\,dx\,du - (ax + bu)\,x\,dy\,du \Big\}$$

2) Es sei

$$z = cx - x^2 - y^2 - u^2 + y\sqrt{x^2+4ay} + u\sqrt{y^2+4by}.$$

Man erhält $\frac{dz}{dx} = C - 2x + \frac{xy}{\sqrt{y^2+4ay}}$;

$$\frac{dz}{dy} = -2y + \sqrt{x^2+4ay} + \frac{yz}{\sqrt{y^2+4by}};$$

$$\frac{dz}{du} = -2z + \sqrt{y^2+4by};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -2 + \frac{4agy}{(x^2+4ag)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -2 + \frac{4byz}{(y^2+4bv)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = -2;$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4ay}};$$

$$\frac{d^2z}{dx\,du} = 0;$$

$$\frac{d^2z}{dy\,du} = \frac{y}{\sqrt{y^2+4by}}; \text{ u. s. w.}$$

§. 60. **Implicite Functionen.** Es sei die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0,$$

in welcher z eine implicite Function der unabhängigen Veränderlichen x und y ist. Die Differentiation nach x und nach y gibt die Gleichungen

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0 \;\ldots.\; (X)$$

und $$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0 \;\ldots.\; (Y).$$

Wird die erste derselben beziehungsweise nach x und nach y differentiirt, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2f}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}=0\ \ldots\ (XX),$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}+\frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2f}{dz\,dy}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2f}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}=0\ \ldots.\ (XY).$$

Wird die zweite Gleichung (Y) nach x und nach y differentiirt, so entstehen die zwei Gleichungen:

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}+\frac{d^2f}{dy\,dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2f}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$+\frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}=0\ \ldots.\ (YX);$$

$$\frac{d^2f}{dy^2}+2\frac{d^2f}{dy\,dz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2f}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=0\ \ldots.\ (YY).$$

Der zweite partielle Differentialquotient $\frac{d^2z}{dx^2}$ ergibt sich aus der Gleichung (XX); ferner der zweite partielle Differentialquotient $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ aus den zwei identischen Gleichungen (XY) und (YX); endlich der zweite partielle Differentialquotient $\frac{d^2z}{dy^2}$ aus der Gleichung (YY) ꝛc. Werden nun diese partiellen Differentialquotienten in das totale Differential der zweiten Ordnung:

$$d^2z=\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2$$

eingeführt, so erhält man das totale Differential d^2z.

Auf gleiche Weise werden die partiellen Differentialquotienten und Differentiale der dritten und jeder höheren Ordnung für die impliciten Functionen von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlichen bestimmt. Die Rechnung bietet, abgesehen von ihrer Weitläufigkeit, keine weitere Schwierigkeit dar.

Beispiele. 1) Es sei $xy+xz+yz=a^2$. Man findet

$$y+z+(x+y)\frac{dz}{dx}=0;$$

$$x+z+(x+y)\frac{dz}{dy}=0;$$

$$2\frac{dz}{dx} + (x+y)\frac{d^2z}{dx^2} = 0;$$

$$2\frac{dz}{dy} + (x+y)\frac{d^2z}{dy^2} = 0;$$

$$1 + \frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dx} + (x+y)\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0,$$

aus welchen Gleichungen die Werthe der fünf Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{d^2x}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}$$

zu bestimmen sind.

2) Es sei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Man erhält für die fünf partiellen Differentialquotienten folgende Werthe:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2x}{a^2z}; \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2y}{b^2z};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2 - y^2); \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2 - x^2);$$

und

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}.$$

Beiläufig wollen wir hier noch bemerken, daß man unter partiellen Differentialgleichungen diejenigen Gleichungen versteht, welche zwischen den unabhängigen Veränderlichen, der davon abhängigen Function und den partiellen Derivirten dieser Functionen stattfinden; dagegen unter Differentialgleichungen schlechtweg die Gleichungen begreift, bei welchen nur von den Functionen einer einzigen Veränderlichen und den auf dieselben Bezug habenden Differentialquotienten die Rede ist. Die Ordnung einer partiellen Differentialgleichung wird durch die Ordnung des darin vorkommenden Differentialquotienten von der höchsten Ordnung bestimmt. So z. B. ist die allgemeinste Form einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen zwei unabhängigen Veränderlichen x, y und der Function z folgende:

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dxdy}\right) = 0.$$

Ebenso wird die Ordnung einer Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen durch den Differentialquotienten von der höchsten Ordnung angegeben. Hiernach wird für eine Differentialgleichung von der nten

Ordnung zwischen der Veränderlichen x und der Function y die allgemeinste Form sein:

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

§. 61. **Homogene Functionen.** Für die homogene Function f (x, y, z) besteht, wie wir im §. 56 gesehen haben, die Relation:

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = n\, f\,(x,\, y,\, z).$$

Diese Relation liefert aber wieder eine homogene Function vom nten Grade, mithin findet auf sie dasselbe Gesetz seine Anwendung. Nun sind die Derivirten des auf der linken Seite dieser Gleichung stehenden Ausdruckes nach x, nach y und nach z beziehungsweise:

$$\frac{df}{dx} + x\frac{d^2f}{dx^2} + y\frac{d^2f}{dx\,dy} + z\frac{d^2f}{dx\,dz};$$

$$\frac{df}{dy} + y\frac{d^2f}{dy^2} + x\frac{d^2f}{dx\,dy} + z\frac{d^2f}{dy\,dz};$$

$$\frac{df}{dz} + z\frac{d^2f}{dz^2} + x\frac{d^2f}{dx\,dz} + y\frac{d^2f}{dy\,dz}.$$

Multiplicirt man nun die erste dieser partiellen Derivirten mit x, die zweite mit y, die dritte mit z und addirt dann die dergestalt erhaltenen Producte, so ergibt sich, wenn man mittelst der Gleichung

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = n\, f\,(x,\, y,\, z)$$

abkürzt, die Relation:

$$x^2\frac{d^2f}{dx^2} + y^2\frac{d^2f}{dy^2} + z^2\frac{d^2f}{dz^2} + 2xy\frac{d^2f}{dx\,dy} + 2xz\frac{d^2f}{dx\,dz}$$

$$+ 2\,yz\frac{d^2f}{dy\,dz} = n\,(n-1)\, f\,(x, y, z).$$

Weil diese Relation wieder eine homogene Function vom nten Grade ist, so läßt sich auf sie ebenfalls das für homogene Functionen nachgewiesene Gesetz in Anwendung bringen. Nimmt man darum die partiellen Derivirten nach x, nach y und nach z des auf der linken Seite der letzteren Gleichung befindlichen Ausdruckes und addirt dieselben, nachdem die erste mit x, die zweite mit y und die

dritte mit z multiplicirt worden, so erhält man nach vorgenommener Reduction die Relation:

$$x^3 \frac{d^3f}{dx^3} + y^3 \frac{d^3f}{dy^3} + z \frac{d^3f}{dz^3} + 3x^3y \frac{d^3f}{dx^2dy}$$

$$+ 3x^2z \frac{d^3f}{dx^3dz} + 3y^2z \frac{d^3f}{dy^2dz} + 3xy^2 \frac{d^3f}{dx\,dy^2}$$

$$+ 3xz^2 \frac{d^3f}{dx\,dz^2} + 3yz^2 \frac{d^3f}{dy\,dz^2} + 6xyz \frac{d^3f}{dx\,dy\,dz}$$

$$= n(n-1)(n-2)\,f(x, y, z).$$

Es ist leicht einzusehen, wie diese Schlüsse weiter geführt werden können und daß die hier aufgestellten Gesetze für jede andere Anzahl von unabhängigen Veränderlichen Gültigkeit haben.

Es sei z. B.

$$z = x^2y - 3y^3 + \frac{x^4}{y}.$$

Für diese homogene Function des dritten Grades ist:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2y + \frac{12x^2}{y};$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -18y + \frac{2x^4}{y^3};$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = 2x - \frac{4x^3}{y^2}:$$

folglich

$$x^2\left(2y + \frac{12x^2}{y}\right) + y^2\left(-18y + \frac{2x^4}{y^3}\right) + 2xy\left(2x - \frac{4x^3}{y^2}\right)$$

$$= 3 \cdot 2\left(x^2y - 3y^3 + \frac{x^4}{y}\right).$$

§. 62. **Elimination der willkürlichen Functionen.** Wir haben früher bemerkt, daß die Derivirte einer Gleichung zwischen zwei Veränderlichen zur Elimination einer Constante benutzt werden kann. Etwas Aehnliches, nur in viel größerer Allgemeinheit, zeigt sich bei den Gleichungen mit drei oder noch mehr Veränderlichen. Gehen wir nämlich von einer zwischen drei Veränderlichen bestehenden Gleichung zu den zwei partiellen Derivirten der ersten Ordnung über, so können wir mit Hülfe derselben eine willkürliche Function, wenn solche in der vorgelegten Gleichung vorkommt, eliminiren und auf diese Weise zu einer Relation zwischen den unabhängigen Veränderlichen, der Function

und deren partiellen Differentialquotienten gelangen. Die dergestalt erhaltene von der willkürlichen Function befreite Relation wird eine characterisirende Eigenschaft aller von einer und derselben Größe abhängigen Functionen ausdrücken, welche Form die Letzteren auch haben mögen.

Beispiele. 1) Differentiirt man die Gleichung

$$z = f(x^2 + y^2)$$

nach x und nach y; so entsteht

$$\frac{dz}{dx} = 2x \cdot f'(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y \cdot f'(x^2 + y^2).$$

Wenn aus den zwei letzteren die Function $f'(x^2 + y^2)$ eliminirt wird, entspringt

$$\frac{dz}{dx} y - \frac{dz}{dy} x = 0.$$

Die letztere Gleichung bleibt unverändert, auf welche Art auch $x^2 + y^2$ in dem Ausdrucke von z vorkommen mag. Sie gilt für:

$$z = (x^2 + y^2)^3;\ z = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$z = \log(x^2 + y^2);\ z = \sin(x^2 + y^2);\ \text{u. s. w.}$$

2) Auf ähnliche Weise erhält man aus der Gleichung

$$\frac{y-b}{z-c} = f\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

die partielle Differentialgleichung:

$$(x-a)\frac{dz}{dx} + (y-b)\frac{dz}{dy} = y-c.$$

3) Aus $z = f(ax + by)$ entspringt die partielle Differentialgleichung:

$$b\frac{dz}{dx} = a\frac{dz}{dy}.$$

3) Aus $y - bz = f(x - az)$ gewinnt man die partielle Differentialgleichung

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1.$$

Nehmen wir die partiellen Derivirten der zweiten Ordnung einer zwischen drei Variabeln gegebenen Gleichung zu Hülfe, so lassen sich unter Umständen zwei willkürliche Functionen, wenn solche in der vorgelegten Gleichung enthalten sind, fortschaffen und besondere Relationen

zwischen den unabhängigen Veränderlichen, der Function und deren partiellen Differentialquotienten aufstellen. Dergleichen Relationen werden wieder eine charakteristische Eigenschaft aller von einer und derselben Größe abhängigen Functionen darstellen, wie deren Form auch beschaffen sein mag.

Beispiele. 1) Es sei die Gleichung

$$z = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Man erhält für die partiellen Derivirten derselben die Gleichungen:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\,\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{dz}{dy} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Multiplicirt man die erste dieser Derivirten mit x und die zweite mit y, addirt dann die Producte, so kommt die Gleichung

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

in welcher nur die einzige unbestimmte Function $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ enthalten ist. Nimmt man davon die partiellen Derivirten, so findet man

$$\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2} + y\frac{d^2z}{dx\,dy} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\,\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$x\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{dz}{dy} + y\frac{d^2z}{dy^2} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Eliminirt man aus den zwei letzteren Gleichungen $\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$, so bekommt man das Resultat:

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + x^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2z}{dxdy} + y^2\frac{d^2z}{dy^2} = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

welches mittelst der Gleichung

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

sich auf folgende partielle Differentialgleichung von der zweiten Ordnung:

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + y^2\frac{d^2z}{dy^2} + 2xy\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0$$

reducirt.

2) Die Gleichung

$$z = \varphi\,(x + ay) + \psi\,(x - ay)$$

liefert die Derivirten:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'\,(x+ay) + \psi'\,(x-ay);$$

$$\frac{dz}{dy} = a\,\varphi'(x+ay) - a\,\psi'(x-ay);$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \varphi''\,(x+ay) + \psi''\,(x-ay);$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = a^2\,\varphi''\,(x+ay) + a^2\,\psi''\,(x-ay;$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = a\,\varphi''\,(x+ay) - a\,\psi''\,(x-ay),$$

aus denen man leicht die partielle Differentialgleichung von der zweiten Ordnung

$$a^2\,\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

herleitet.

§. 63. **Continuität der partiellen Derivirten.** Es sei $z = f(x, y)$ eine Function der unabhängigen Veränderlichen x, y. Wenn innerhalb der Grenzen $x = a$ und $x = a_1$, $y = b$ und $y = b_1$ die partiellen Derivirten $\frac{d\,f(x, y)}{dx}$ und $\frac{d\,f(x, y)}{dy}$ continuirlich bleiben; so wird für ein beliebiges x, das zwischen a und a_1 liegt und für ein willkürliches y, welches zwischen b und b_1 enthalten ist, die Function f (x, y) eine continuirliche Function von x und y sein; eine Folgerung, die unmittelbar aus dem in §. 23 aufgestellten Satze sich ergibt.

Sind die partiellen Derivirten der Ordnung

$$\frac{d^2f(x, y)}{dx^2},\ \frac{d^2f(x, y)}{dy^2}\ \text{und}\ \frac{d^2f(x, y)}{dx\,dy}$$

continuirliche Functionen von x und y, wenn x einen zwischen a und a_1 und y einen zwischen b und b_1 liegenden Werth erhält; so wird die ursprüngliche Function f (x, y) diese Eigenschaft der Continuität beibehalten, wenn sie in Bezug auf x und in Bezug auf z zwischen den angegebenen Grenzen sich verändert.

Indem man dergestalt von den partiellen Derivirten der dritten und höheren Ordnungen aufsteigt, ergibt sich als Resultat, daß eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen innerhalb derselben

Grenzen continuirlich bleibe, zwischen denen jede partielle Derivirte höherer Ordnung dieser Function es ist.

Ebenso wird sich dieser Satz auf die Functionen von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlichen ausdehnen lassen.

VIII. Anwendung der Differentialrechnung auf verschiedene analytische Aufgaben, welche mehrere unabhängige Veränderlichen enthalten.

1) Die unbestimmten Formen der Functionen von mehreren Veränderlichen.

§. 64. Es sei

$$z = \frac{f(x, y)}{F(x, y)}$$

eine Function der zwei unabänderlichen Veränderlichen x und y, welche für $x = a$ und $y = b$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint. Um den wahren Werth der Function zu erhalten, lassen wir auf Grundlage des im §. 28 angegebenen Verfahrens im Zähler und Nenner die unabhängigen Veränderlichen x und y um die unendlich kleinen Größen α und β sich ändern. Sind nun

$$\frac{df(x,y)}{dx} \text{ und } \frac{df(x,y)}{dy}$$

continuirliche Functionen von x und in der Nähe der fraglichen Werthe der Letzteren: so hat man

$$f(x+\alpha, y+\beta) = f(x,y) + \alpha \frac{df(x,y)}{dx} + \beta \frac{df(x,y)}{dy};$$

$$F(x+\alpha, y+\beta) = F(x,y) + \alpha \frac{dF(x,y)}{dx} + \beta \frac{dF(x,y)}{dy}.$$

Weil nun laut der Voraussetzung $f(a, b) = 0$ und $F(a, b) = 0$; so geht für die Nachbarwerthe $a+\alpha$, $b+\beta$ von x und y die Function

$$z = \frac{f(x,y)}{F(x,y)} \text{ in } z = \frac{\alpha \frac{df(a,b)}{dx} + \beta \frac{df(a,b)}{dy}}{\alpha \frac{dF(a,b)}{dx} + \beta \frac{dF(a,b)}{dy}}$$

über. Im Allgemeinen läßt sich mittelst dieses Ausdruckes der Werth der Function nicht bestimmen; es wird eine derartige Bestimmung erst dann erfolgen können, nachdem man die unendlich kleinen Größen α und β beseitigt, oder mit anderen Worten eine Relation zwischen

diesen Größen, d. h. eine Beziehung zwischen x und y festgestellt haben wird. Bezeichnet y′ das aus einer solchen zwischen x und y angenommenen willkürlichen Relation entspringende Verhältniß von $\frac{\beta}{\alpha}$; so wird der Werth von z durch

$$z = \frac{\frac{df(a, b)}{dx} + \frac{df(a, b)}{dy} \cdot y'}{\frac{dF(a,b)}{dx} + \frac{dF(a, b)}{dy} \cdot y'}$$

ausgedrückt werden. Unter dieser allgemeinen Form bleibt der Werth von z wegen der willkürlichen Größe y′ unbestimmt. Nur für den Fall, daß zu gleicher Zeit

$$\frac{df(a, b)}{dx} \text{ und } \frac{dF(a, b)}{dx},$$

oder

$$\frac{df(a, b)}{dy} \text{ und } \frac{dF(a, b)}{dy}$$

Null wären, würde die Größe y′ verschwinden und z einen bestimmten Werth erhalten.

Wenn übrigens diese vier Ausdrücke gleichzeitig zu Null werden, so wird man die Derivirten derselben in Bezug auf x nehmen, wodurch man für den Werth von z den Ausdruck bekommt:

$$z = \frac{\frac{d^2f(a, b)}{dx^2} + \frac{2d^2f(a, b)}{dxdy} \cdot y' + \frac{d^2f(a, b)\,y'^2}{dy^2}}{\frac{d^2F(a, b)}{dx^2} + \frac{2d^2F(a, b)}{dxdy} \cdot y' + \frac{d^2F(a, b)y'^2}{dz^2}},$$

welcher im Allgemeinen wegen der willkürlichen Größe y′ unbestimmt ist. — Wenn ferner

$$\frac{d^2f(a, b)}{dx^2} = 0, \frac{d^2f(a, b)}{dy^2} = 0, \frac{d^2f(a, b)}{dxdy} = 0,$$

und

$$\frac{d^2F(a, b)}{dx^2} = 0, \frac{d^2F(a, b)}{dy^2} = 0, \frac{d^2F(a, b)}{dx\,dy} = 0$$

wäre, so müßte man zu den Derivirten der dritten Ordnung übergehen und y als Function von x betrachten, u. s. w. — Dieses Verfahren läßt sich ohne Schwierigkeit auf eine beliebige Anzahl unabhängiger Veränderlicher ausdehnen.

Beispiele: 1) Es sei $z = \frac{\log x + \log y}{x + 2y - 3}$.

Für x = 1 und z = 1 stellt sich z unter der Form $\frac{0}{0}$ dar. Für die gewählten Werthe von x und y kommt

$$\frac{df}{dx} = 1, \frac{df}{dy} = 1, \frac{dF}{dx} = 1, \frac{dF}{dy} = 2.$$

Daraus folgt $z = \frac{1 + y'}{1 + 2y'}$, welcher Werth unbestimmt bleibt, so daß z alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann.

2) Es sei $z = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$.

Für x = 0, z = 0 wird $z = \frac{0}{0}$. Man hat

$$\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{dy} = 0, \frac{dF}{dx} = 0, \frac{dF}{dy} = 0.$$

Indem man zu den Derivirten der zweiten Ordnung übergeht, findet man

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2, \frac{d^2f}{dy^2} = 2, \frac{d^2f}{dxdy} = 2;$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2, \frac{d^2F}{dy^2} = 2, \frac{d^2F}{dxdy} = 0;$$

woraus

$$z = \frac{(1 + y')^2}{1 + y'^2}.$$

Der Werth von z, obschon er unbestimmt ist, liegt zwischen 0 und 2.

2) Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variabeln.

§. 65. **Bedingungsgleichungen für die Maxima und Minima.** Die Definition, welche für die Maxima und Minima der Functionen von einer Veränderlichen gegeben wurde, läßt sich ohne Weiteres auf Functionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen ausdehnen. Ist nämlich z = f (x, y, u, v ....) eine solche Function, so kann es unter Umständen ein zusammengehöriges System specieller Werthe dieser Variabeln geben, für welches z = f (x, y, u, v ....) ein Maximum oder Minimum wird, d. h. für welches bei den kleinsten Werthen der positiv und negativ genommenen Größen Δx, Δy, Δu, ... im ersten Falle

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u \ldots. < f(x, y, u \ldots.);$$

und im zweiten Falle

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u \ldots.) > f(x, y, u \ldots.).$$

Es handelt sich hier darum, das System der speciellen Werthe der Variabeln x, y, u ... aufzufinden, für welches bei stetig vorausgesetzten Functionen und Derivirten ein derartiges Maximum oder Minimum besteht.

Diese Bestimmung läßt sich durch einen einfachen Gedanken auf die Betrachtung der Functionen von einer einzigen Veränderlichen zurückführen. Wir denken uns nämlich die unabhängigen Variabeln x, y, u... als ebensoviel willkürliche Functionen einer neuen unabhängigen Veränderlichen t, dergestalt, daß

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ u = \chi(t).$$

Auf diese Weise können wir alle Aenderungen von x, y, u ... in Folge einer Aenderung von t allein entstanden ansehen. Indem wir die Functionen φ, ψ, χ ... ganz und gar unbestimmt lassen, wird die zwischen den Größen x, y, u . . . vorausgesetzte Unabhängigkeit wieder hergestellt, welche durch die mittelbare Verknüpfung zwischen ihnen und der neuen Größe t aufgehoben zu sein schien. Hiernach wäre also die Aufgabe $z = f(x, y, u \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, darauf zurückgeführt, dieß für die Function

$$z = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \ldots.)$$

zu bewerkstelligen.

Zu diesem Ende muß erstlich, wenn wir der Kürze halber die Function bloß mit f bezeichnen, sein $\frac{df}{dt} = 0$, welcher Ausdruck im gegenwärtigen Falle, wo x, y, u ... abhängig von t sind, in folgenden übergeht:

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{df} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{df} \ldots. = 0.$$

Dieser Ausdruck kann nun, wegen der gänzlichen Willkürlichkeit der Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \ldots.$$

nur dadurch Null werden, daß die Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0,\ \frac{df}{dy} = 0,\ \frac{df}{du} = 0 \ldots.$$

gleichzeitig stattfinden. Da die Anzahl dieser Gleichungen mit jener der unabhängigen Veränderlichen übereinstimmt, so lassen sich daraus die

fraglichen Werthe von x, y, u ... bestimmen, womit der erste Theil der Aufgabe gelöst wäre.

Was den zweiten Theil der Aufgabe anlangt, nämlich die Entscheidung, ob die dergestalt gefundenen Werthe einem Maximum oder Minimum angehören, so müssen wir den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2f}{dt^2}$ aufsuchen und sehen, ob er durch die Einführung der für x, y, u ... erhaltenen Werthe positiv oder negativ ausfällt. Diese Untersuchung wollen wir im nächsten Paragraphen ausführen und zwar zunächst für den Fall

$$z = f(x, y),$$

wo z eine Function von nur zwei unabhängigen Veränderlichen x und y ist.

§. 66. **Kennzeichen der Maxima und Minima.** Aus der Gleichung

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

ergibt sich durch Differentiation mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ und } \frac{df}{dy} = 0$$

der Ausdruck:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2;$$

oder der äquivalente:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \left\{\frac{d^2f}{dx^2} \cdot p^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy} \cdot p + \frac{d^2f}{dy^2}\right\} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

wenn der Quotient $\frac{dx}{dt}$ durch $\frac{dy}{dt}$ der Kürze halber mit p bezeichnet wird.

Soll nun der vorstehende Ausdruck zur Entscheidung des Maximums oder Minimums führen, so darf er nicht Null werden, mithin nicht gleichzeitig sein

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = 0 \text{ und } \frac{d^2f}{dxdy} = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so muß gedachter immer dasselbe Vorzeichen behalten. Nun hängt das Vorzeichen allein von dem Ausdrucke

$$\frac{d^2f}{dx^2}p^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}p + \frac{d^2f}{dy^2} \text{ ab.}$$

Damit aber ein Ausdruck von der Form $Ap^2 + 2Bp + C$ sein Vorzeichen nicht ändere, ist es erforderlich, daß die Wurzeln der Gleichung $Ap^2 + 2Bp + C = 0$ imaginär oder gleich ausfallen, oder $B^2 - AC$ nicht > 0 sei. Die Bedingung für das Vorhandensein des nämlichen Vorzeichens in dem Ausdruck

$$\frac{d^2f}{dx^2}p^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}p + \frac{d^2f}{dy^2}$$

erheischt also das Bestehen der Bedingung

$$\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2} \leqq 0,$$

was zur unmittelbaren Folgerung hat, daß die zwei partiellen Differentialquotienten $\frac{d^2f}{dx^2}$ und $\frac{d^2f}{dy^2}$ mit gleichem Vorzeichen behaftet sein müssen. Die vorstehende Bedingung schließt zugleich die früher ausgesprochen in sich, da insofern der ersteren Genüge geschieht, die Größen

$$\frac{d^2f}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dy^2},\ \frac{d^2f}{dxdy}$$

nicht alle gleichzeitig Null werden können. Da der Ausdruck

$$\frac{d^2f}{dx^2}p^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}p + \frac{d^2f}{dy^2}$$

seine Zeichen nicht ändert, so darf man setzen $p = 0$; woraus erhellt, daß jener Ausdruck mit $\frac{d^2f}{dy^2}$ und $\frac{d^2f}{dx^2}$ einerlei Vorzeichen besitzt. Um also zu entscheiden, ob die aus den Gleichungen $\frac{df}{dx} = 0$ und $\frac{df}{dy} = 0$ gefundenen Werthe von x und y in der That einem Maximum oder Minimum angehören, muß man zuvörderst prüfen, ob durch dieselben der Bedingung

$$\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2} \leqq 0$$

Genüge geschieht. Ist dieß der Fall, so wird für jene Werthe die Function $z = f(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum, je nachdem $\frac{d^2f}{dx^2}$ und $\frac{d^2f}{dy^2}$ sich gleichzeitig negativ oder positiv herausstellen.

Für den Fall, daß die Differentialquotienten

$$\frac{d^2f}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dy^2},\ \frac{d^2f}{dxdy}$$

durch die gefundenen Werthe von x und y zugleich auf Null gebracht werden, muß man zu den höheren Differentialquotienten des Ausdruckes

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

seine Zuflucht nehmen. Es ist dann nöthig, wenn ein Maximum oder Minimum stattfinden soll, daß überhaupt derjenige Differentialquotient, welcher für die speciellen Werthe von x und y zuerst nicht auf Null gebracht wird, von gerader Ordnung sei.

Auf ähnliche Weise wird man das charakteristische Merkmal für das Vorhandensein des Maximums oder Minimums einer Function auffinden, wenn die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen beträchtlicher ist. Für die Function

$$z = f\,(x, y, u)$$

hat man

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Durch Differentiation dieses Ausdruckes entspringt mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{df}{du} = 0,$$

folgende Gleichung:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{d^2f}{dx\,dy} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$+ 2\,\frac{d^2f}{dxdu} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{du}{dt} + 2\,\frac{d^2f}{dydu} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{d^2f}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

Dieselbe läßt sich, wenn man zur Abkürzung schreibt

$$\frac{d^2f}{dz^2} = A, \quad \frac{d^2f}{dx\,dy} = B, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = C, \quad \frac{d^2f}{dx\,du} = D,$$

$$\frac{d^2f}{dydu} = E, \quad \frac{d^2f}{du^2} = F;$$

ferner die Quotienten

$$\frac{dx}{dt} : \frac{du}{dt} = p \text{ und } \frac{dy}{dt} : \frac{du}{dt} = q$$

setzt, unter folgende Form bringen:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = (Ap^2 + 2Bpq + Cq^3 + 2Dp + 2Eq + F)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \ldots (A)$$

Sollen nun die gefundenen Werthe von x, y und u einem Maximum oder Minimum angehören, so darf der vorstehende Ausdruck sein Vorzeichen nicht ändern, welche Werthe man auch den Größen p und q beilegen möge. Dieß erfordert zunächst, daß der auf die Form gebrachte Ausdruck

$$Ap^2 + 2(Bq + D)p + Cq^2 + 2Eq + F$$

für alle p und q dasselbe Vorzeichen behalte, daß mithin die Wurzeln der Gleichung, welche für p sich ergeben, wenn gedachter Ausdruck gleich Null gesetzt wird, gleich oder imaginär ausfallen. Es muß also sein

$$(Bq + D)^2 - A(Cq^2 + 2Eq + F) \text{ nicht } > 0,$$

oder was auf dasselbe herauskommt,

$$(B^2 - AC)q^2 + 2(BD - AE)q + D^2 - AF \leqq 0, \text{ (I)}$$

welche Werthe man auch dem q beilegen mag. Hierzu ist erforderlich, daß der Ausdruck sein Vorzeichen nicht wechselt, oder wenn derselbe gleich Null gesetzt wird, die Wurzeln von q sich imaginär oder gleich herausstellen, daß also sei

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) \leqq 0 \text{ (II)}.$$

Bei dem Stattfinden der letzten Ungleichheit behält der Ausdruck (*I*) einerlei Zeichen, hat mithin, wenn $q = 0$ gesetzt wird, ein mit der Größe $D^2 - AF$ übereinstimmendes Vorzeichen und ist sonach negativ für $D^2 - AF < 0$. Die letzte Ungleichheit in Verbindung mit der Ungleichheit (II) ziehen also das Bestehen der Ungleichheit (*I*) nach sich. Aus der Ungleichheit (II) folgt weiter, daß $B^2 - AC$ und $D^2 - AF$ einerlei Vorzeichen haben, was wieder zur Folge hat, daß die Ungleichheit $B^2 - AC$ nicht > 0, auch das Bestehen der Ungleichheit $D^2 - AF$ nicht > 0 nach sich zieht. Aus den beiden letzteren Ungleichheiten ergibt sich weiter, daß A, C und F einerlei Vorzeichen besitzen. Da nun aus der Ungleichheit $D^2 - AF < 0$ und der Bedingung (II) folgt, daß der Ausdruck (A) für alle p und q das nämliche Zeichen behält, so hat derselbe, wenn $p = 0$ und $q = 0$ angenommen wird, das Zeichen von F, welches mit dem von A und C einerlei ist. Die aus den Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0, \ \frac{df}{dy} = 0, \ \frac{df}{du} = 0$$

hergeleiteten Werthe von x, y und u geben also ein Maximum oder Minimum, wenn sie den Bedingungen

$$B^2 - AC \text{ nicht } > 0 \text{ oder } \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2 \leqq \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2},$$

und $(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) \leqq 0$,

oder

$$\left(\frac{d^2f}{dx\,dy} \cdot \frac{d^2f}{dx\,du} - \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dx\,du}\right)^2 - \left\{\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2}\right\}$$

$$\left\{\left(\frac{d^2f}{dx\,du}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{du^2}\right\} \leqq 0$$

Genüge leisten. Und zwar wird ein Maximum oder ein Minimum eintreten, je nachdem für die fraglichen Werthe die Differentialquotienten

$$\frac{d^2f}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dy^2},\ \frac{d^2f}{du^2}$$

negativ oder positiv sind.

Wenn diese Differentialquotienten nebst den drei anderen Derivirten der zweiten Ordnung

$$\frac{d^2f}{dx\,dy},\ \frac{d^2f}{dx\,du},\ \frac{d^2f}{dy\,du}$$

gleichzeitig Null werden; so wird man die höheren Differentialquotienten von $z = f(x, y, u)$ in Betracht ziehen müssen.

1) Für welche Werthe von x und y wird

$$z = x^2 + y^2 - 6xy + 32y$$

ein Maximum oder Minimum? Aus $\frac{dz}{dx} = 0$ und $\frac{dz}{dy} = 0$ folgt $x = 6$ und $y = 2$. Für diese Werthe wird aber

$$\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2} = + 32:$$

Die vorgelegte Function besitzt mithin weder ein Maximum noch ein Minimum.

2) Es sei

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - y.$$

Man hat

$$\frac{dz}{dx} = 2x + y - 1 = 0;$$

und

$$\frac{dz}{dy} = x + 2y - 1 = 0;$$

daraus folgt $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3}$.

Ferner ist $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2} = 2$ und $\frac{d^2z}{dx\,dy} = 1$;

folglich

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} = -3.$$

Die gefundenen Werthe von x und y machen demnach die vorgelegte Function z zu einem Minimum.

3) Die Zahl a in drei solche Theile x, y, a—x—y zu zerlegen, daß deren Produkt z ein Maximum wird. Man hat $z=xy\,(a-x-y)$. Aus den Bedingungsgleichungen $\frac{dz}{dx}=0$ und $\frac{dz}{dy}=0$ ergibt sich

$$x=\frac{a}{3}\text{ und } y=\frac{a}{3}.$$

Werden diese Werthe in die Ausdrücke von

$$\frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dy^2}\text{ und }\frac{d^2z}{dx\,dy}$$

substituirt, so haben wir

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{2a}{3},\ \frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{2a}{3},\ \frac{d^2z}{dx\,dy}=-\frac{a}{3};$$

mithin

$$\left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)^2-\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{a^2}{3}$$

Es ist folglich das Produkt ein Maximum, wenn man die drei Theile einander gleich nimmt.

4) Dasjenige Dreieck anzugeben, welches bei einem gegebenen Umfange 2p den größten Flächeninhalt hat. Ist x die eine, y die zweite, mithin 2p — x — y die dritte Seite, und z der Flächeninhalt des Dreiecks; so hat man bekanntlich:

$$z=\sqrt{p\,(p-x)\,(p-y)\,(x+y-p)}.$$

Aus den zwei Bedingungsgleichungen $\frac{dz}{dx}=0$ und $\frac{dz}{dy}=0$ ergibt sich $x=\frac{2p}{3}$ und $y=\frac{2p}{3}$. Das Dreieck, dessen Fläche bei gegebenem Umfange ein Größtes oder Kleinstes ist, muß daher gleichseitig sein. Um zu entscheiden, welches von beiden hier stattfindet, substituire man in die zweiten Differentialquotienten die gefundenen Werthe von x und y. Man erhält dadurch

$$\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{3}{\sqrt{3}},\ \frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{3}{\sqrt{3}},\ \frac{d^2z}{dx\,dy}=-\frac{3}{2\sqrt{3}};$$

mithin

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} < 0:$$

Die betreffende Fläche ist daher ein Maximum.

5) Welches ist das rechtwinkelige Parallelepiped vom Inhalt a^3, welches die kleinste Oberfläche hat. Sind x, y, u die drei anstoßenden Kanten, so ist die Oberfläche

$$z = 2xy + 2xu + 2yu.$$

Wegen $xyu = a^3$ wird aber

$$z = 2xy + \frac{2a^3}{y} + \frac{2a^2}{x}.$$

Aus den Bedingungsgleichungen

$$\frac{dz}{dx} = 2y - \frac{2a^3}{x^2} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dy} = 2x - \frac{2a^3}{y^2} = 0$$

folgt $\qquad x = y$ und $z = x = y = a$.

Der Würfel hat daher die kleinste Oberfläche, weil in der That

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dy} = -12 \text{ ist.}$$

6) In einem gegebenen Dreieck, dessen Seiten a b, c sind, den Punkt zu finden, für welchen das Produkt der Normalen auf die drei Seiten ein Maximum wird.

Sind x, y, u beziehungsweise die Normalen aus dem fraglichen Punkt auf die drei Seiten des Dreiecks, dessen Flächeninhalt f heißen soll; so hat man

$$ax + by + cu = 2f,$$

woraus

$$u = \frac{2f - ax - by}{c}.$$

Wird nun das Produkt der drei Normalen durch z dargestellt, so kommt

$$z = \frac{2f}{c}xy - \frac{a}{c}x^2y - \frac{b}{c}xy^2.$$

Aus

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2f}{c}y - \frac{2a}{c}xy - \frac{b}{c}y^2 = 0,$$

und

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2f}{c}x - \frac{a}{c}x^2 - \frac{2b}{c}xy = 0$$

folgt

$$x = \frac{2f}{3a},\ y = \frac{2f}{3b} \text{ und dann } u = \frac{2f}{3c}.$$

Für $\frac{d^2z}{dx^2}$ erhält man $-\frac{4af}{3bc}$ und für $\frac{d^2z}{dy^2}$ dann $-\frac{4bf}{3bc}$ und für $\frac{d^2z}{dy^2}$ dann $-\frac{4bf}{3ac}$ und für $\frac{d^2z}{dxdy}$ zuletzt 0; also

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{4f_3}{3c^2}:$$

das fragliche Product ist ein Maximum.

7) Innerhalb eines gegebenen Dreiecks den Punkt zu bestimmen, für welchen die Summe der Verbindungslinien desselben mit den Ecken des Dreiecks ein Minimum wird. Es seien a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 die Coordinaten der Ecken des Dreiecks; x, y diejenigen des gesuchten Punktes. Die fragliche Summe z ist gleich $r_1 + r_2 + r_3$, wo z. B.

$$r_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}.$$

Man findet

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x-a_1}{r_1} + \frac{x-a_2}{r_2} + \frac{x-a_3}{r_3};$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y-b_1}{r_1} + \frac{y-b_2}{r_2} + \frac{y-b_3}{r_3}.$$

Aus diesen zwei Gleichungen können x und y bestimmt werden. Auf folgende Weise gelangt man jedoch zu einer interessanten Bestimmung des fraglichen Punktes. Die einzelnen Glieder der rechten Seite der ersten Gleichung bezeichnen die Cosinus, wie die entsprechenden Glieder der zweiten die Sinus derjenigen Winkel α_1, α_2, α_3, welche die drei Radien r_1, r_2, r_3 mit der Achse der x bilden.

Man hat also $\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 = 0$;
ferner $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0$.
Diese Gleichungen auf die Form

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 = -\sin\alpha_3 \text{ und } \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = -\cos\alpha_3$$

gebracht, liefern als Summe ihrer Quadrate

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1), = -\frac{1}{2}.$$

Ebenso findet man

$$\cos(\alpha_3 - \alpha_2) = -\frac{1}{2} \text{ und } \cos(\alpha_1 - \alpha_3) = -\frac{1}{2}.$$

Die hier erscheinenden Winkel sind aber diejenigen, welche zwischen den Linien r_1; r_2; r_3 eingeschlossen sind. Die letzteren müssen folglich so gezogen werden, daß sie sich unter Winkeln von $\frac{2}{3}\pi$ durchschneiden.

Die zweiten Differentialquotienten sind

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(y-b_1)^2}{r_1{}^3} + \frac{(y-b_2)^2}{r_2{}^3} + \frac{(y-b_3)^2}{r_3{}^3};$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{(x-a_1)^2}{r_1{}^3} + \frac{(x-a_2)^2}{r_2{}^3} + \frac{(x-a_3)^2}{r_3{}^3};$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{(x-a_1)(y-b_1)}{r_1{}^3} + \frac{(x-a_2)(y-b_2)}{r_2{}^3} + \frac{(x-a_3)(y-b_3)}{r_3{}^3}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\sin^2\alpha_1}{r_1} + \frac{\mathrm{siu}^2\,\alpha_2}{r_2} + \frac{\sin^2\alpha_3}{r_3};$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{\cos^2\alpha_1}{r_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{r_2} + \frac{\cos^2\alpha_3}{r_3};$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{\sin\alpha_1\,\cos\alpha_1}{r_1} + \frac{\sin\alpha_2\,\cos\alpha_2}{r_2} + \frac{\sin\alpha_3\,\cos\alpha_3}{r_3}.$$

Man findet endlich nach einigen kleinen Reductionen:

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} =$$

$$-\left\{\frac{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}{r_2\,r_1} + \frac{\sin^2(\alpha_3-\alpha_2)}{r_3\,r_2} + \frac{\sin^2(\alpha_1-\alpha_3)}{r_1\,r_3}\right\};$$

woraus erfolgt, daß ein Minimum statt hat.

8) Die Werthe von x, y, u zu finden, für welche

$$z = xy + yu + 8x - x^2 - y^2\ u^2$$

zu einem Maximum oder Minimum wird. Es ist

$$\frac{dz}{dx} = y + 8 - 2x;$$

$$\frac{dz}{dy} = x + u - 2y;$$

$$\frac{dz}{du} = x - 2u.$$

Setzt man jeden dieser drei Differentialquotienten gleich Null so kommt

$$x = 6;\ y = 4;\ u = 2.$$

Für diese Werthe ergibt sich

$$\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2} = -3;$$

ferner

$$\left(\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{d^2f}{dxdu}-\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dydu}\right)^2-\left[\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}\right]$$
$$\left[\left(\frac{d^2f}{dxdu}\right)^2-\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{du^2}\right]=-8:$$

es findet also, da $\frac{d^2f}{dx^2}=-2$, ein Maximum statt, welches gleich 24 ist.

§. 68. **Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.** Oefters sind Werthe, welche eine gegebene Function f (x, y, z ...) von m Veränderlichen zu einem Maximum oder Minimum machen sollen, auch noch gewissen Bedingungen unterworfen, welche in n Gleichungen unter diesen Veränderlichen ausgedrückt werden, wie

$$\varphi\,(x, y, z\,\ldots)=0,\ \psi\,(x, y, z\,\ldots)=0,\ \text{ꝛc};$$

so daß eigentlich nur noch m—n von einander unabhängige Veränderliche übrig bleiben. Will man nun das Maximum oder Minimum der Function f aufsuchen, so wäre das natürlichste Verfahren, mit Hülfe der gegebenen Bedingungsgleichungen n Veränderliche zu eliminiren und dann die Rechnung nach den Vorschriften des vorigen Paragraphen weiter zu führen. Diese Eliminationen sind aber nicht selten sehr umständlich und selbst unmöglich. Wir müssen deshalb einen andern Weg einschlagen.

Betrachten wir wieder x, y, z, u ..., wie oben geschehen, als Functionen einer neuen Variabeln t; so wird

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}+\ldots\ \text{(I)}.$$

Durch Differentiation der Bedingungsgleichungen

$$\varphi=0,\ \psi=0\ \ldots.$$

ergibt sich:

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\ \ldots.=0;$$

$$\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\ \ldots.=0;$$

. . . . . . u. s. w. . . . . (II).

Mit Hülfe dieser n Gleichungen kann man nun n der Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\ \ldots.$$

durch die m—n übrigen ausdrücken, was immer angeht, indem dazu nur die Elimination aus n Gleichungen vom ersten Grade erfordert wird. Durch Einführung dieser Werthe von n Differentialquotienten in der Gleichung (I), wird dieselbe folgende Form erhalten:

$$\frac{df}{dt} = X \cdot \frac{dx}{dt} + Y \cdot \frac{dy}{dt} + Z \cdot \frac{dz}{dt} + \ldots,$$

wo X, Y, Z .... Größen bedeuten, wie sie durch die Operation der Rechnung sich ergeben. Soll nun die Function f zu einem Maximum oder Minimum werden, so muß $\frac{df}{dt} = 0$ sein; woraus wegen der m—n willkürlich bleibenden Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \ldots$$

folgt:

$$X = 0, Y = 0, Z = 0 \ldots .$$

Diese m—n Gleichungen mit den n Bedingungsgleichungen

$$\varphi = 0, \psi = 0 \ldots .$$

dienen zur Bestimmung der zusammengehörigen Werthe von x, y, z ..., welche die Function f zu einem Maximum oder Minimum machen können.

Um sich zu vergewissern, ob die gefundenen Werthsysteme von x, y, z ... ein Maximum oder Minimum von f liefern, müssen wir den zweiten Differentialquotienten von f in Bezug auf t suchen und sehen, ob derselbe durch die Substitution jener Werthe in dem einen Fall negativ und in dem andern positiv ist, von welcher Beschaffenheit die willkürlich gebliebenen Differentialquotienten auch sein mögen. Durch Differentiation des Ausdruckes

$$\frac{df}{dt} = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \ldots$$

entsteht mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$X = 0, Y = 0, Z = 0 \ldots :$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{dX}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dX}{dy} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dX}{dz} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} \ldots$$
$$+ \frac{dY}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dY}{dz} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} \ldots$$
$$+ \frac{dZ}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{dZ}{dx} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \ldots + \text{etc.}$$

Auf der rechten Seite dieses Ausdruckes kommen m—n von einander unabhängige Größen

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \ldots$$

vor. Damit nun derselbe das Vorzeichen nicht ändere, ist es erforderlich, daß die Wurzeln der Gleichung, welche man für

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \ldots$$

erhält, wenn man das Ganze = 0 setzt, imaginär seien.

In dem Falle, daß alle partiellen Differentialquotienten von X, Y, Z .... durch die gefundenen Werthsysteme von x, y, z .... gleichzeitig verschwindet, muß man zu den höheren Differentialquotienten von f übergehen und mit denselben ähnliche Betrachtungen anstellen.

Die Elimination der n Differentialquotienten läßt sich auch leicht durch die sogenante Methode der unbestimmten Factoren, von welcher öfters in der Analysis Gebrauch gemacht wird, bewerkstelligen. Man multiplicire nämlich die n Gleichungen (II) der Reihe nach durch die Factoren k_1; k_2; k_3; k_n und addire sie dann zu der Gleichung

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \ldots = 0,$$

und setze endlich die Multiplicatoren sämmtlicher Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \ldots$$

in dem so erhaltenen Resultate gleich Null. Auf diese Weise entstehen folgende m Gleichungen:

$$\frac{df}{dx} + k_1 \frac{d\varphi}{dx} + k_2 \frac{d\psi}{dx} \ldots = 0;$$

$$\frac{df}{dy} + k_1 \frac{d\varphi}{dy} + k_2 \frac{d\psi}{dy} \ldots = 0 \text{ ꝛc.},$$

zwischen denen die n unbestimmten Factoren k_1; k_2; k_3 ... k_n eliminirt werden können, wodurch die m — n Endgleichungen zum Vorschein kommen.

§. 69. Das im vorigen Paragraphen Vorgetragene wollen wir an einigen Beispielen erläutern.

1) Das Maximum der Function $f = x^m y^n z^r$ zu bestimmen, wenn die Variabeln der Bedingung

$$ax + by + cz - k = \varphi(x, y, z) = 0$$

unterworfen sind, wo a, b, c und k constante Größen bedeuten.

Man hat

$$\frac{df}{dx} = \frac{m}{x} f; \quad \frac{df}{dy} = \frac{n}{y} f; \quad \frac{df}{dz} = \frac{r}{z} f;$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = a; \quad \frac{d\varphi}{dy} = b; \quad \frac{d\varphi}{dz} = c.$$

Mittelst dieser Werthe findet man

$$\frac{df}{dt} = \frac{m}{x} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot f + \frac{n}{y} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot f + \frac{r}{z} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot f;$$

und

$$a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} = 0;$$

woraus

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{m}{x} - \frac{ar}{cz}\right) \frac{dx}{dt} \cdot f + \left(\frac{n}{y} - \frac{br}{cz}\right) \frac{dy}{dt} \cdot f.$$

Die Bedingung des Maximums liefert wegen der Willkürlichkeit der Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die Gleichungen:

$$\frac{m}{x} = \frac{ar}{cz} \text{ und } \frac{n}{y} = \frac{br}{cz},$$

aus denen in Verbindung mit

$$ax + by + cz = k$$

nachstehende Werthe sich ergeben:

$$x = \frac{m}{a} \cdot \frac{k}{m+n+r}; \; y = \frac{n}{b} \cdot \frac{k}{m+n+r}; \; z = \frac{r}{c} \frac{k}{m+n+r}.$$

Durch Differentiation des obigen Werthes von $\frac{df}{dt}$ erhält man mit Berücksichtigung von $\frac{m}{x} - \frac{ar}{cz} = 0$; $\frac{n}{y} - \frac{br}{cz} = 0$:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -\frac{m}{x^2} f \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{n}{y^2} f \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{fr}{cz^2}\left(a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt}\right) \frac{dz}{dt}.$$

Aus dem Differentialquotienten der gegebenen Bedingungsgleichung entnimmt man aber den Werth von

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{c}\left(a \frac{dx}{dt} + \frac{b\,dy}{dt}\right).$$

Mithin ist jetzt

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -\frac{m}{x^2} f \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{n}{y^2} f \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{fr}{c^2 z^2}\left(a \frac{dx}{dt} + \frac{b\,dy}{dt}\right)^2$$

Wenn also die drei Exponenten m, n, r sowie auch f positiv sind, welch Letzteres stattfindet, wenn a, b, c und k gleiche Zeichen haben, findet ein Maximum statt, so daß wir dießmal der weiteren Discussion überhoben sind.

2) Das Maximum der Function

$$f = x^2 + y^2 + z^2$$

zu suchen, wenn die Veränderlichen x, y und z durch die Bedingungsgleichung $ax + by + cz = k$

mit einander verbunden sind, wo a, b, c und k wieder constante Größen bezeichnen. Es ist

$$\frac{df}{dx} = 2x; \frac{df}{dy} = 2y; \frac{df}{dz} = 2z;$$

ferner

$$\frac{d\varphi}{dx} = a; \frac{d\varphi}{dy} = b; \frac{d\varphi}{dz} = c.$$

Wenn man nun nach der Methode der unbestimmten Factoren verfährt, so bekommt man:

$$2x + k_1 a = 0; 2y + k_1 b = 0; 2z + k_1 c = 0$$

woraus

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit der Bedingungsgleichung

$$ax + by + cz = k$$

geben die Werthe:

$$x = \frac{ka}{a^2+b^2+c^2}; y = \frac{kb}{a^2+b^2+c^2}; z = \frac{kc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Aus

$$\frac{df}{dt} = (2x + ak_1)\frac{dx}{dt} + (2y + bk_1)\frac{dy}{dt} + (2z + ck_1)\frac{dz}{dt}$$

folgt aber, da k_1 eine constante und durch die Gleichungen

$$2x + ak_1 = 0, 2y + bk_1 = 0, 2z + ck_1 = 0$$

nur von den unveränderlichen Werthen der 3 Unbekannten unabhängige Größe ist:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Dieser unverkennbar positive Werth des zweiten Differentialquotienten erfordert auch dießmal keine weitere Untersuchung und es findet mithin ein Minimum statt.

3) Das Minimum der Function

$$f = (x-h)^2 + (y-i)^2 + (z-k)^2$$

zu finden, wenn die veränderlichen Größen x, y, z durch die beiden Bedingungsgleichungen

$$0 = \varphi = x - az - \alpha;\ y - bz - \beta = \psi = 0$$

mit einander verbunden und wieder

$$h,\ i,\ k,\ a,\ \alpha,\ b,\ \beta$$

unveränderlich sind.

Da

$$\frac{df}{dx} = 2(x-h);\ \frac{d\varphi}{dx} = 1;\ \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

$$\frac{df}{dy} = 2(y-i);\ \frac{d\varphi}{dy} = 0;\ \frac{d\psi}{dy} = 1,$$

$$\frac{df}{dz} = 2(z-k);\ \frac{d\varphi}{dz} = -a;\ \frac{d\psi}{dz} = -b,$$

so werden die Gleichungen des §. 68:

$$2(x-h) + k_1 = 0,\ 2(y-i) + k_2 = 0,\ 2(z-k) - ak_1 - bk_2 = 0.$$

Diese drei Gleichungen in Verbindung mit

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \beta$$

geben nach Elimination von k_1 und k_2:

$$z - k + a(x-h) + b(y-i) = 0,$$

also

$$z = \frac{k + a(h-\alpha) + b(i-\beta)}{1 + a^2 + b^2}$$

Da ferner

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

positiv ist, so findet ein Minimum statt, dessen wahrer Werth

$$(z-k)^2 + (az + \alpha - h)^2 + (bz + \beta - i)^2$$

bestimmt werden kann, wenn man sich mittelst der gegebenen Bedingungsgleichungen

$$x = az + \alpha;\ y = bz + \beta$$

aus dem oben bestimmten Werthe von z auch noch diejenigen von x und y berechnet.

4) Das Maximum oder Minimum der Function

$$z = x^2 + y^2 + u^2$$

zu finden, wenn die drei Unbekannten x, y, u durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} = 1$$

verbunden sind, und $a > b > c$ vorausgesetzt wird. Man findet

$$x\left(1 + \frac{k}{a^2}\right) = 0;\ y\left(1 + \frac{k}{b^2}\right) = 0;\ u\left(1 + \frac{k}{c^2}\right) = 0.$$

Also finden folgende drei Systeme von Auflösungen statt:

$$x = 0,\ y = 0,\ u = \pm c;\ 1 + \frac{k}{c^2} = 0;\ z = c^2;$$

$$x = 0,\ y = \pm b,\ u = 0;\ 1 + \frac{k}{b^2} = 0;\ z = b^2;$$

$$x = \pm a,\ y = 0,\ u = 0;\ 1 + \frac{k}{a^2} = 0;\ z = a^2.$$

Ob diese nun Maxima oder Minima liefern, soll der 2te Differentialquotient zeigen, welcher, wenn der leichteren Reduction halber dem ersten Differentialquotienten noch die Derivirte des Ausdruckes

$$k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} - 1\right)$$

beigefügt wird, mit Berücksichtigung, daß im ersten Differentialquotienten immer einer der Factoren von

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{du}{dt}$$

Null ist, also die Ausdrücke

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2u}{dt^2}$$

wegfallen, beziehungsweise die Werthe annimmt

$$2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

$$2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

$$2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

Ohne nun aus der gegebenen Bedingungsgleichung die Werthe von

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

einzuführen, erkennt man doch, daß, da $a > b > c$ ist, der obere dieser drei Ausdrücke fortwährend positiv ausfällt, die erste Annahme gibt folglich ein Minimum, dessen Werth $= c^2$.

Unter der zweiten Annahme $x = 0$, $u = 0$ ist, da $1 - \frac{b^2}{a^2} > 0$, aber $1 - \frac{b^2}{c^2} < 0$, das Zeichen des zweiten Differentialquotienten unbestimmt, es findet also weder ein Maximum, noch ein Minimum statt.

Ist endlich für die letzte Annahme, $y = 0$, $u = 0$, wieder $a > b > c$, so ist der zweite Differentialquotient negativ. Es findet also jetzt ein Maximum statt, dessen Werth $= a^2$.

3) Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Formel für Functionen von mehreren Veränderlichen.

§. 70. Es sei $z = f(x, y)$, wo x und y zwei unabhängige Veränderliche bedeuten. Wenn nun diese unabhängigen Veränderlichen beziehungsweise die Zunahmen h und k erhalten, so kann die Entwickelung von $f(x + h, y + k)$ nach den Potenzen von h und k vorgenommen werden. Um zu dieser Entwickelung zu gelangen, genügt es zu bemerken, daß diese Function mit $f(x + ht, y + kt)$ übereinstimmt, wenn $t = 1$ gesetzt wird. Man entwickele deshalb nach dem Maclaurin'schen Satze den Ausdruck $f(x + ht, y + kt)$, indem man den letzteren als eine Function von t betrachtet. Man erhält hiernach, wenn man zur Abkürzung $f(t)$ statt $f(x + ht, y + kt)$ schreibt:

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1} f'(0) + \dots \frac{t^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(\vartheta t),$$

insofern die dem Maclaurin'schen Satze zu Grunde liegenden Bedingungen erfüllt sind.

Nun ist aber

$$f'(t) = \frac{df}{dx} h + \frac{df}{dy} h,$$

$$f''(t) = \frac{d^2f}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2f}{dxdy} hk + \frac{d^2f}{dy^2} k^2,$$

$$f'''(t) = \frac{d^3f}{dx^3} h^3 + 3 \frac{d^3f}{dx^2dy} h^2k + 3 \frac{d^3f}{dxdy^2} hk^2 + \frac{d^3f}{dy^3} k^3;$$

. . . .

$$f^{(n)}(t) = \left\{h \frac{df}{dx} + k \frac{df}{dy}\right\}^n,$$

wenn man die im §. 58 angewandte symbolische Bezeichnung gebraucht.

Setzt man in den vorstehenden Ausdrücken $t = 0$, so bekommt man:

$$f'(0) = \frac{dz}{dx} h + \frac{dz}{dy} k,$$

$$f''(0) = \frac{d^2z}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2z}{dxdy} hk + \frac{d^2z}{dy^2} k^2,$$

$$f'''(0) = \frac{d^3z}{dx^3} h^3 + 3 \frac{d^3z}{dx^2dy} h^2k + \frac{3d^3z}{dxdy^2} hk^2 + \frac{d^3z}{dy^3} k^3,$$

. . . .

$$f^{(n)}(0) = \left\{h \frac{dz}{dx} + k \frac{dz}{dy}\right\}^n.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den oben angegebenen Werth von $f(t)$ und macht überdies $t = 1$; so findet man

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)\frac{df}{1}$$

$$+ \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^2 \frac{d^2f}{1 \cdot 2} + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^3 \frac{d^3f}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$+ \dots + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^n \cdot \frac{d^nf(x + \vartheta h, y + \vartheta k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Die so erweiterte Taylor'sche Reihe verliert sofort ihre Gültigkeit, wenn die Function z und ihre partiellen Derivirten oder einige derselben innerhalb des Intervalls von x bis $x + h$, und von y bis $y + k$ aufhören stetig und endlich zu sein, wie bereits bei Entwickelung der Function von einer einzigen Veränderlichen gezeigt worden ist.

Setzt man in dem letzten Gliede der vorstehenden Reihe solche Werthe von ϑ, welche dieses Glied so groß wie möglich und so klein wie möglich machen; so hat man zwei Grenzen, zwischen denen der Werth des vernachlässigten Restes der Reihe enthalten ist, wie wir dies bei der Entwickelung der Function von einer Veränderlichen gesehen haben. Die Reihe wird nach Cauchy's Theorem in's Unendliche fortgesetzt werden dürfen, wenn die gegebene Function und deren sämmtliche partielle Derivirten endlich bleiben für alle Werthe von $x + h$ und $y + k$, deren Moduli beziehungsweise zwischen den Modulis von x und $x + h$, y und $y + k$ liegen.

Ist die Function $f(x, y)$ nebst deren sämmtlichen partiellen Derivirten für alle Werthe von x und y endlich, deren Moduli zwischen denen von x, y und der Null liegen; so geht die obenstehende Formel in folgende über:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)\frac{df(0,0)}{1} + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^2 \frac{d^2f(0,0)}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

wo die angehängten Nullen anzeigen sollen, daß nach Ausführung der angedeuteten Differentialquotienten $x = 0$ und $y = 0$ zu setzen ist. Diese Gleichung ist die Maclaurin'sche oder Stirling'sche Reihe für zwei unabhängige Veränderliche x und y.

Man erkennt bald, wie sich diese beiden Theoreme auch auf diejenigen Fälle ausdehnen lassen, wo die Function mehr als zwei Veränderliche enthält. Wegen ihrer complicirten Gestalt sind jedoch diese Formeln nur von beschränkter Anwendung. Gewöhnlich wird in dergleichen Fällen eine oder die andere davon verschiedene Verfahrungsweise eingehalten. Statt eine Function von mehreren Veränderlichen durch die Maclaurin'sche Formel z. B. nach den Potenzen jeder unabhängigen Veränderlichen zu entwickeln, kann man die Entwickelung dieser Function blos nach den Potenzen einer der Veränderlichen vornehmen. Alsdann sind aber die Coefficienten der Glieder in der Entwickelung Functionen der übrigen unabhängigen Variabeln. Hiernach kann man setzen:

$$f(x, y, u \ldots) = f(0, y, u \ldots) + f'(0, y, u \ldots)\frac{x}{1} + f''(0, y, u \ldots)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.},$$

wo f', f'' .... die Derivirten in Bezug auf die Veränderliche x bezeichnen. Diese Formel ist jedoch nur so lange zuläßig, als für die Werthe von y, u ... die Functionen

$$f(0, y, u \ldots),\ f'(0, y, u \ldots),\ f''(0, y, u \ldots) \text{ u. s. w.}$$

stetig und endlich bleiben.

§. 71. Zur Anwendung des im vorhergehenden Pargraphen Gesetzten mögen folgende Beispiele dienen, von welchen blos die Resultate angegeben werden sollen.

I. Es sei $f(x, y) = x^m y^n$.

Man findet

$$(x+h)^m (y+k)^n = x^m y^n + m x^{m-1} y^n h + n x^m y^{n-1} k$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^n h^2 + \frac{m\,n}{1 \cdot 1} x^{m-1} y^{n-1} h k + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^m y^{n-2} h^2 + \text{etc.}$$

II. Es sei $f(x, y) = (1+x)^y$. Man findet die Reihe

$$(1+x)^y = 1 + xy - x^2 y + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3 y}{3}$$
$$- \frac{x^3 y^2}{2} - \frac{x^4 y}{4} + \frac{x^3 y^3}{6} - \frac{y^2 x^4}{4} + \frac{y x^5}{5} + \text{etc.},$$

welche für alle x, deren Modul unter 1 liegt und für jedes beliebige y bis in's Unendliche fortgesetzt werden kann.

III. Welche Veränderung erleidet der Cosinus z einer Seite eines sphärischen Dreieckes, wenn man den gegenüberliegenden Winkel A genau kennt, die beiden anderen gemessenen Seiten x und y aber noch die Zunahmen h und k erleiden? Man hat $z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos A$. Für den veränderten Werth von z findet man, wenn zur Abkürzung, $\cos x \cos y = \alpha$; $\cos x \cdot \sin y = \beta$; $\sin x \cos y = \gamma$; $\sin x \sin y = \delta$; $\cos A = c$ gesetzt wird:

$$z + h(-\gamma + \beta c) + k(-\beta + \gamma c) - \frac{h^2 + k^2}{2} \cdot z + hk(\delta + \alpha c)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{h^3}{3} + hk^2\right)(\gamma - \beta c) + \frac{1}{2}\left(h^2 k + \frac{k^3}{3}\right)(\beta - \gamma c) +$$ ꝛc.

IV. In einem sphärischen Dreiecke, dessen einer Winkel A ist, erleiden die gegenüberstehende Seite x und ein anderer Winkel y bezüglich die Aenderungen h und k. Man verlangt die Aenderung der dem Winkel y gegenüberliegenden Seite z.

Man hat $\sin z = \frac{\sin x \sin y}{\sin A}$. Aus dieser impliciten Gleichung verschaffe man sich durch successive partielle Differentiationen die Ausdrücke $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ ꝛc. Die Taylor'sche Reihe ohne ihr erstes Glied z gibt uns alsdann die verlangte Aenderung:

$$h\,\frac{\cos x \sin y}{\cos z \sin A} + k\,\frac{\sin x \cos y}{\cos z \sin A} + \left\{\frac{h^2}{2} \cdot \frac{\sin x \sin y}{\cos^3 z \sin^3 A} + \frac{k^2}{2}\,\frac{\sin x \sin y}{\cos^3 z \sin^3 A}\right\}$$

$$(\sin^2 x - \sin^2 A) + hk\,\frac{\cos x \cos y}{\cos^3 z \sin A} +$$ ꝛc.

4) Das Lagrange'sche Theorem.

§. 72. Es sei $u = f(y)$ und $y = t + x\,\varphi(y)$, wo f, φ wie immer geformte Functionen, und x, t von einander unabhängige Größen bedeuten. Man soll u in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, in welcher mithin die Coefficienten dieser Potenzen Functionen von t allein sind.

Bezeichnen wir die für $x = 0$ stattfindenden Werthe der Differentialquotienten

$\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, ... beziehungsweise durch U_1, U_2, U_3 ...., und den Werth der Function u bei derselben Annahme durch U; so gibt uns die Maclaurin'sche Formel:

$$u = U + U_1 x + U_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + U_3 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$ ꝛc.

Es handelt sich also darum die Coefficienten U, U_1, U_2, $U_3 \ldots$ durch t darzustellen. Nimmt man an, daß y für $x = 0$ in t übergehe, so hat man vorerst $U = f(t)$.

Differentirt man nun die Gleichung $u = f(y)$ in Bezug auf x und t; so erhält man:

$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot f'(y)$ und $\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot f'(y)$, woraus durch Elimination von $f'(y)$ entspringt:

$$\frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Differentirt man ferner die Gleichung $y = t + x\,\varphi(y)$ in Bezug auf t und x, so kommt:

$\frac{dy}{dt} = 1 + x\,\varphi'(y)\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dy}{dx} = \varphi(y) + x\,\varphi'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$; aus welchen Gleichungen durch die Elimination von $\varphi'(y)$ sich ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Setzt man diesen Werth in die vorhin gefundene Relation

$$\frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dt};$$

so hat man

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \varphi(y).$$

Differentirt man die letztere Gleichung in Bezug auf x, so bekommt man:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\varphi(y) \cdot \frac{du}{dt}\right)}{dx}.$$

Allein die Größe $\varphi(y) \cdot \frac{du}{dt}$ ist wegen $\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot f'(y)$ mit $\varphi(y) \cdot f'(y) \cdot \frac{dy}{dt}$ gleichbedeutend: man kann sie deßhalb als die Derivirte einer neuen Function von y in Bezug auf t ansehen, die durch u_1 bezeichnet sein mag, dergestalt, daß $\frac{du_1}{dt} = \varphi(y) \cdot \frac{du}{dt}$.

Folglich wegen $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \varphi(y)$ auch $\frac{du}{dx} = \frac{du_1}{dt}$. Hieraus ergibt sich

$$\text{nun } \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u_1}{dtdx} = \frac{d \cdot \frac{du_1}{dx}}{dt}.$$

Der Gleichung $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \varphi(y)$ liegt aber bloß die Voraussetzung zum Grunde, daß u in seiner Zusammenstellung mit der Relation

$$y = t + x \varphi(y)$$

eine Function von y ist, ohne die Form dieser Function näher zu bestimmen. Die erwähnte Gleichung läßt sich mithin auch auf die Function u_1 anwenden, woraus sofort entspringt

$$\frac{du_1}{dx} = \varphi(y) \cdot \frac{du_1}{dt}.$$

$$\text{Folglich } \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\varphi(y) \cdot \frac{du_1}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left((\varphi y)^2 \cdot \frac{du}{dt}\right)}{dt}.$$

Betrachtet man ferner $(\varphi y)^2 \cdot \frac{du}{dt}$ als den auf t sich beziehenden Differentialquotienten einer Function von y, die wir u_2 heißen wollen; so haben wir wegen $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u_2}{dt^2}$ die Relation

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d \cdot \frac{d^2u_2}{dt^2}}{dx} = \frac{d^2 \cdot \frac{du_2}{dx}}{dt^2}.$$

Nun ist aber $\frac{du_2}{dx} = \varphi(y) \cdot \frac{du_2}{dt}$; daher besteht wegen $\frac{du_2}{dt} = (\varphi y)^2 \cdot \frac{du}{dt}$ die Gleichung

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2 \cdot \left(\varphi(y)^3 \cdot \frac{du}{dt}\right)}{dt^2}.$$

Aus dem unveränderlichen Gange der Rechnung erhellt, daß überhaupt

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\left((\varphi y)^n \cdot \frac{du}{dt}\right)}{dt^{n-1}},$$

$$\text{folglich } U_n = \frac{d^{n-1}\left[(\varphi t)^n \cdot f'(t)\right]}{dt^{n-1}} \text{ sein muß.}$$

Wir erhalten hiernach folgende sehr allgemeine Gleichung:

$$f(y) = f(t) + \varphi(t) \cdot f'(t)\frac{x}{1} + \frac{d \cdot [f'(t) \cdot (\varphi t)^2 \cdot]}{dt}\frac{x^2}{2}$$
$$+ \frac{d^2\,[f'(t) \cdot (\varphi t)^3]}{dt^2} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{rc.}$$

Sie heißt nach ihrem Erfinder das Theorem oder auch die Umkehrungsformel von Lagrange.

Hat man blos $f(y) = y$, mithin $f'(t) = 1$; so wird die Reihe

$$y = t + x \cdot \varphi(t) + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d(\varphi t)^2}{dt} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2(\varphi t)^3}{dt^2} + \text{2c.}$$

Macht man $x = 1$, so verwandelt sich die Entwickelung für $f(y)$ aus $y = t + \varphi(y)$ in:

$$f(y) = f(t) + \varphi(t) f'(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d[f'(t)(\varphi t)^2]}{dt} + \frac{1}{6} \cdot \frac{d^2[f'(t)(\varphi t)^3]}{dt^2} + \text{2c.}$$

Es versteht sich von selbst, daß die eben aufgestellten Formeln convergent sein müssen, wenn man von ihnen Gebrauch machen will. Cauchy hat die Bedingungen der Convergenz angegeben, welche wir in dem zweitfolgenden Pargraphen auseinandersetzen wollen.

§. 73. Zunächst mögen die Formeln auf einige Beispiele angewendet werden.

I) Es sei die Gleichung $y = t + xy^n$, man soll daraus y^m durch x und t ausdrücken. Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung $y = t + x \cdot \varphi(y)$, so hat man

$$f(t) = t^m;\ f'(t) = mt^{m-1};\ \varphi(t) = t^n;\ \varphi(t) f'(t) = mt^{m+m-1};$$
$$(\varphi t)^2 \cdot f'(t) = mt^{m+2n-1};\ (\varphi t)^3 \cdot f'(t) + mt^{m+3n-1} \dots$$

Folglich nach der Umkehrungsformel:

$$y^m = t^m + mxt^{m+n-1} + m \cdot \frac{m+2n-1}{2} x^2 t^{m+2n-2} + \text{2c.}$$

II) Es sei die Gleichung $y = t + x\sin y$; man soll y durch x und t ausdrücken. Man erhält

$$y = t + x\sin t + \frac{x^2}{2} \sin 2t + \frac{x^3}{2 \cdot 4} (3\sin 3t - \sin t + \text{2c.}$$

III) Die Lagrange'sche Formel kann zur Auflösung algebraischer und transcendenter Gleichungen benutzt werden, vorausgesetzt, daß sie auf eine convergente Reihe führt.

Es sei z. B. $y = t + xy^2$. Die Umkehrungsformel liefert:

$$y = t\left(1 + \frac{tx}{1} + \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 2}(tx)^2 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}(tx)^3\right.$$
$$\left. + \frac{1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(tx)^4 + \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}(tx)^5 \text{ 2c.}\right.$$

eine Reihe, welche für $\frac{1}{4t} > x > \frac{-1}{4t}$ convergirt.

IV) Man kann die Lagrange'sche Formel auch mit Vortheil zur Umkehrung der Reihen benutzen.

Um z. B. die Reihe

$$x = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \text{etc.}$$

umzukehren, schreiben wir sie vorerst folgendermaßen:

$$y = x - y^2 (\alpha + \beta y + \gamma y^2 \cdots)$$

Unter dieser Gestalt mit der Gleichung $y = t + \varphi(y)$ vergleichen, haben wir:

$$t = x;\ \varphi(y) = -y^2 (\alpha + \beta y + \gamma y^2 \cdots);\ fy = y.$$

Hiernach erhält man

$$y = x - \alpha x^2 + (2\alpha^2 - \beta) x^3 + (5\alpha\beta - \gamma + 5\alpha^3) x4 + \text{etc.}$$

§. 74. Um die Kennzeichen der Gültigkeit der Lagrange'schen Reversionsformel aufzustellen, bemerke man, daß aus

$$\frac{df(y)}{dx} = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f'(y) \cdot \frac{\varphi(y)}{1 - x\,\varphi'(y)}$$

folgt, daß alle höheren Differentialquotienten der nach Potenzen von x zu entwickelnden Function $f(y)$ gebrochene Functionen sind, deren Zähler aus $f'(y)$, $f''(y) \cdots$; $\varphi(y)$, $\varphi'(y) \cdots$ gebildet werden, und deren Nenner Potenzen von $1 - x\,\varphi'(y)$ sind. Sind also gedachte Functionen $f'(y)$, $f''(y)$; $\varphi(y)$, $\varphi'(y) \cdots$ in einem noch näher zu bestimmenden Intervall endlich, so werden auch

$$\frac{df(y)}{dx},\ \frac{d^2 f(y)}{dx^2} \cdots\cdots$$

endlich bleiben, so lange nicht $1 - x\,\varphi'(y) = 0$ ist. Diese Gleichung, in Verbindung mit $y = t + x\,\varphi(y)$ liefert $\frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{y - t}{\varphi(y)} = x$, woraus man ein System zusammengehöriger Werthe von x und y erhält, welche allein noch geeignet sein werden, die geforderten Bedingungen der Endlichkeit aufzuheben. Der kleinste der Moduli, welchen die aus diesen zwei Gleichungen bestimmten Werthe von x liefern, ist demnach der unzuläßige Modul in Cauchy's Theorem, für welchen man aus $y = t + x\,\varphi_{(y)}$ die Grenzen von y zu bestimmen hat. Sollte also in dieser Gleichung der Modul von x den auf obige Weise bestimmten übersteigen, so ist die Entwickelung von $f_{(y)}$ nach steigenden Potenzen von x unmöglich.

Noch dringt sich eine Frage auf, welche wir jetzt beantworten wollen. Die Gleichung $y = t + x\,\varphi(y)$ liefert nämlich für y im Allgemeinen mehrere Auflösungen, welche sämmtlich Functionen von x sind; von welcher derselben liefert uns also das Langrangische Theorem die Entwickelung einer beliebigen Function f nach Potenzen von x? — Wir bemerken deßhalb, daß wir oben die Annahme gemacht haben, es reducire sich für $x = o$, y auf den Werth t, und behaup-

ten, daß unter den verschiedenen Functionen von x, welche die Auflösung der obigen Gleichung sein können, nur eine sein kann, die sich für $x = o$ auf t reducirt, und welche demnach unsere fragliche Wurzel ist.

In der That, es sei $y_{\prime}$ diese Wurzel der Gleichung

$$y = t + x\,\varphi\,(y) = o;$$

so werden die übrigen Wurzeln die Auflösungen der Gleichung

$$\frac{y - t - x\,\varphi\,(y)}{x - y_{\prime}} = o$$

sein, eine Gleichung, welche sich, da $y_{\prime} = t + x\,\varphi\,(y_{\prime})$ ist, auf die Form $1 - x.\dfrac{\varphi\,(y) - \varphi\,(y_{\prime})}{y - y_{\prime}} = o$ bringen läßt. Könnte nun ein dieser Gleichung entsprechendes y ebenfalls, wie $y_{\prime}$ für $x = 0$ den Werth t annehmen, so müßte dieselbe für $x = o$, $y = y_{\prime} = t$ identisch bleiben, was jedoch nicht der Fall ist, weil der Quotiant

$$\frac{\varphi\,(y) - \varphi\,(y_{\prime})}{y - y_{\prime}}$$

für $y = y_{\prime} = t$ den endlich vorausgesetzten Werth $\varphi'\,(t)$ erhält, welcher, mit $x = 0$ multiplicirt, das falsche Resultat $1 = 0$ hervorbringen würde. So sind z. B. die Auflösungen der Gleichung

$$y = t + x\,y^2:\ y_{\prime} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4tx}}{2x},\ y_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4tx}}{2x},$$

deren eine für $x = 0$ den Werth t erhält; die andere wird unendlich.

Beispiele. 1) Aus $y = t + xy^m$ soll die für $x = 0$ sich auf t reducirende Wurzel dieser Gleichung nach Potenzen von x entwickelt werden.

Die Grenze, welche der Modul von x nicht überschreiten darf, ergibt sich aus den Gleichungen $1 = x\,\varphi'(y)$; $y = t + x\,\varphi\,(y)$, oder $1 = m\,x\,y^{m-1}$, $y = t + \dfrac{1}{m}\,y$, woraus man $x = \dfrac{(m-1)^{m-1}}{m^m t^{m-1}}$ findet. Sollte also der Modul dieses Ausdruckes kleiner als derjenige von x sein, so ist die Entwickelung nach dem Lagrange'schen Satze unmöglich.

Die quadratische Gleichung $y = t + x\,y^2$ hat zwei Auflösungen

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4tx}}{2x},\ y_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4tx}}{2x}$$

Dem binomischen Satze zufolge findet man für die erste derselben, welche für $x = 0$ in t übergeht, eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe, wenn das Modul von $4tx$ kleiner als 1, oder der-

jenige von x kleiner als $\frac{1}{4t}$ ist. Das gleiche Resultat ergibt sich aber auch, wenn man in dem obigen allgemeinen Ausdrucke m=2 setzt.

2) Aus $y = x\varepsilon^{y}$ soll die mit x zugleich verschwindende Wurzel dieser Gleichung entwickelt werden.

Man hat hier $f(t) = t,\ \varphi(t) = e^{t},\ t = 0;$ Hiermit ergibt sich die Reihe

$$y = x + \frac{2^0 x^2}{1} + \frac{3^2 x^3}{1 \cdot 2} + \frac{4^3 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{rc.} \ldots$$

Diese Reihe hört auf gültig zu sein, wenn das Verhältniß zweier nächst aufeinanderfolgenden unendlich weit entfernten Glieder größer als die Einheit wird. Es muß also

$$\lim x \cdot \frac{(n+1)^n}{n \cdot n^{n-1}} < 1 \text{ oder } x < \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

$$\text{d. h. } x < \frac{1}{e} \text{ sein.}$$

Dasselbe Resultat erhält man auch aus den allgemeinen Regeln. Die Gleichung $1 - x\,\varphi'(y) = 0$ wird dießmal $x = \frac{1}{e^y}$. Hiermit erhält man aus $y = x e^y$ für y den Werth 1, und somit ist $x = \frac{1}{e}$. Die Entwickelung nach Lagrange's Theorem wird also unmöglich, wenn der Modul des in $y = xe^y$ vorkommenden x größer als $\frac{1}{e}$ sein sollte.

Zweites Kapitel.

Integration der expliciten Functionen von einer Veränderlichen.

I. Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung.

§. 75. **Begriff des Integrals.** Eine Differentialfunction der ersten Ordnung von einer Veränderlichen x hat allgemein die Form f (x) dx. Diese Differentialfunction ist durch Differentiation einer gewissen Function F (x) entstanden oder kann wenigstens als das Resultat einer derartigen Operation betrachtet werden, so daß

$$d \cdot F(x) = f(x)\, dx \text{ und } d \cdot \frac{F(x)}{dx} = f(x).$$

Die Integralrechnung hat nun zum Zwecke die Function F (x) zu finden, wenn das Differential f (x) dx gegeben ist, oder mit anderen Worten eine Function von x zu bestimmen, welche differentiirt den Ausdruck f (x) dx wieder zum Vorschein bringt.

Die Function F (x), durch deren Differentiation das gegebene Differential f (x) dx entsteht, heißt das Integral dieses Differentials. Man bezeichnet das Integral durch ein vor f (x) dx gesetztes Zeichen $\int$. Hiernach hat

die Gleichung $d \cdot F(x) = f(x)\, dx$

die Gleichung $F(x) = \int f(x)\, dx$

zur unmittelbaren Folge, und umgekehrt.

Die Function F (x) ist nicht der allgemeinste Ausdruck des Integrals f (x) dx. Man darf dazu jede Größe addiren, deren Differential $= 0$ ist, weil dadurch der Bedingung, daß das Differential des Integrals $= f(x)\, dx$ ist, in keinerlei Weise Eintrag geschieht. Nun

sind aber die beständigen Größen die einzigen, deren Differentiale der Null gleichkommen. Wenn mithin die fragliche Function blos durch die Bedingung bestimmt wird, daß durch ihre Differentiation f (x) dx als Resultat erwachsen soll; so muß, um ihren allgemeinen Ausdruck aufzustellen, zu dem auf irgend einem Wege gefundenen Integral noch eine constante, übrigens an sich ganz willkührliche Größe addirt werden. Man schreibt deßhalb allgemein:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

wo F (x) das unmittelbare Resultat der Integration, C dagegen die willkürliche Constante bedeutet.

Die Letztere bleibt ganz unbestimmt, solange das Integral nur der einzigen Bedingung unterworfen ist, zum Differential den gegebenen Ausdruck f (x) dx zu haben. In allen Anwendungen der Integralrechnung wird diese Constante den gegebenen Bedingungen der vorliegenden Aufgabe gemäß bestimmt. Ihr Werth ist gegeben, sobald man den Betrag des Integrals für einen besonderen Werth der veränderlichen Größe kennt. Gewöhnlich weiß man für welchen Werth der Veränderlichen das in Frage stehende Integral sich auf Null reducirt. Hat dies Letztere für x = a statt, so ist

$$0 = F(a) + C;$$

folglich:

$$\int f(x)\, dx = F(x) - F(a).$$

§. 76. **Das Integral als Summe.** Man hat nicht ohne Grund den Anfangsbuchstaben $\int$ des Wortes Summe gewählt, um durch Vorsetzung desselben vor den Ausdruck f (x) dx die Function zu bezeichnen, deren Differential f (x) dx ist. Jede Function F (x) kann nämlich als die Summe der unzähligen, unendlich kleinen Werthe angesehen werden, welche ihr Differential f (x) dx annimmt, während x stetig, d. h. nach unendlich kleinen Differenzen dx von einem Werthe a zu einem andern Werthe b = a + h übergeht. Um dies deutlich einzusehen, nehmen wir, da wir uns nur an stetige Functionen halten wollen, die im Paragraphen 23 aufgestellte Relation

$$f(a+h) - f(a) = \lim \alpha \left\{ f^1(a) + f^1(a+\alpha) \ldots + f^1(a+\overline{n-1}\,\alpha) \right\}$$

oder die ihr gleichgeltende

$$F(b) = F(a) + \lim \cdot dx \left\{ f(a) + f(a+dx) \ldots + f(a + \overline{n-1}\, dx) \right\}$$

wieder zur Hand, wo sich das Zeichen lim auf die unendliche Abnahme von dx und auf das unendliche Wachsen der ganzen positiven Zahl n bezieht. Die auf der rechten Seite, innerhalb der Parenthese, befind-

liche Reihe entsteht dadurch aus f (x), daß man darin statt der Veränderlichen x nach und nach a, a + dx, a + 2dx.... $a + \overline{n-1}\, dx$ setzt. Wir sind hiernach berechtigt zu sagen, daß man jederzeit von dem willkührlichen Werthe F (a) der Function F (x) zu einem andern willkührlichen Werthe dieser Function gelangt, indem man zu F (a) die Summe aller innerhalb des Intervalles von x = a bis x = b stetig neben einander liegenden Werthe des Differentials f (x) dx hinzufügt. Man kann statt der vorigen Gleichung nunmehr schreiben:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Das Zeichen $\int$ deutet hier an, daß man die Summe von allen Werthen des Differentials f (x) dx zu nehmen hat, welche den Werthen a, a + dx, a + 2dx, ... $a + \overline{n-1}\, dx$ entsprechen, von denen der letztere dem Werthe b vorangeht. Durch das unten am Integralzeichen $\int$ angehängte a wird der besondere Werth von x hervorgehoben, von welchem aus die Summe gebildet werden soll, während durch das oben am Integralzeichen stehende b der Werth angedeutet ist, bis zu welchem diese Summe sich erstreckt.

Der Ausdruck $\int_a^b f(x)\, dx$ heißt das innerhalb der Grenzen a und b genommene Integral von f (x) dx oder auch das bestimmte Integral von f (x) dx innerhalb der Grenzen a und b. Bei dem bestimmten Integral wird a die untere Grenze und b die obere Grenze desselben genannt.

Wenn $d \cdot F(x) = f(x)\, dx$ ist, so kann man setzen

$$\int f(x)\, dx = F(x)$$

oder auch $\int f(x)\, dx = F(x) + C.$

F (x) heißt so das unbestimmte Integral von f (x) dx.

Aus dem unbestimmten Integral läßt sich das bestimmmte Integral wiederum herleiten, indem man in F (x) einmal x = a, dann x = b setzt und den ersten Werth vom zweiten abzieht. Es gibt dies die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Das bestimmte Integral kann mithin als die Differenz zweier besonderer Werthe des unbestimmten Integrals angesehen werden, wobei jedoch nothwendigerweise vorausgesetzt wird, daß f (x) innerhalb der Grenzen x = a und x = b continuirlich bleibt. Den Werth der Constanten braucht man nicht zu wissen, indem sich dieselbe bei der Subtraction weghebt.

§. 77. **Unmittelbare Integration.** Nachdem der Begriff des Integrals auseinandergesetzt worden, handelt es sich darum, die Verfahrungsarten näher zu erörtern, mittelst deren das Integral einer gegebenen Differentialfunction gefunden werden kann, oder wie man sich auch ausdrückt, die Operation des Integrirens sich bewerkstelligen läßt. Wir können sogleich von vornherein bemerken, daß, während die Operation des Differentiirens nach den vorgeschriebenen Regeln stets zu einem bestimmten Resultate führt, das Geschäft des Integrirens nur in einzelnen Fällen ganz zu Ende geführt werden kann, d. h. daß das Integral, welches einem gegebenen Differential entspricht, sich selten in einer geschlossenen Form darstellen läßt, und daß man in Ermangelung eines derartigen endlichen Ausdruckes häufig genöthigt ist, das fragliche Integral in der Form einer unendlichen Reihe anzugeben, welche, insofern sie brauchbar sein soll, vor Allem convergent sein muß.

Wir wollen vorerst die einfachsten Differentialfunctionen von einer veränderlichen Größe x aufstellen, bei denen die unmittelbare Betrachtung sofort zur Kenntniß eben so vieler Integrale führt, die somit als die Fundamentalformeln der Integralrechnung anzusehen sind und bei der Integration der zusammengesetzteren Differentialfunctionen zur Anwendung kommen. Dergleichen Grundformeln, in denen Allen eine Constante hinzuzudenken ist, sind folgende:

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C. \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C. \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + C.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang}\, x + C. \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg}\, x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\,(\sin = x) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\,\text{arc}\,(\cos = x) + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,(\text{tg} = x) + C. \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = -\,\text{arc}\,(\cot = x) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc}\,(\sec = x) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\,\text{arc}\,(\text{cosec} = x) + C.$$

Nachstehende zwei Bemerkungen dienen dazu die Integration gegebener Differentialfunktionen zu erleichtern. Aus der Gleichung

$$d\,(u + v + \ldots) = du + dv + \ldots,$$

wo u, v ... beliebige Functionen von x sind, ergibt sich

$$\int d\,(u + v + \ldots) = u + v + \ldots = \int du + \int dv + \ldots:$$

d. h. das Integral einer Summe von mehreren Differentialen ist gleich der Summe derjenigen Integrale, welche man aus diesen Differentialen einzeln genommen erhält. — In dergleichen Fällen ist es nur nöthig eine Constante hinzuzufügen, indem man leicht einsieht, daß, wenn man für jedes einzelne Differential eine Constante beifügte, dieselben zusammengenommen doch einer einzigen Constante gleich kämen, welche ihre Summe ausmacht.

Aus $d\,(au) = a \cdot du$, wo a unveränderlich und u eine Function von x ist, folgt

$$\int d\,(au) = a\,u = a \int du;$$

d. h. der constante Factor eines Differentials geht auch als Factor in das Integral über.

§. 78. **Weitere Methoden der Integration.** Eine unmittelbare Integration läßt sich nur bei den einfachen Differentialfunctionen anbringen. Was nun die zusammengesetzteren Differentialausdrücke anlangt, so sucht man sie auf jene einfacheren zurückzuführen, wobei man sich verschiedener Methoden bedient. Die gesammte Integralrechnung ist hiernach gleichsam nichts Anderes als die Auseinandersetzung der speciellen Reductionsmethoden, mittelst deren das Geschäft des Integrirens in den verschiedenartigen vorkommenden Fällen erleichtert wird. Hauptsächlich sind es viererlei Methoden, welche dabei in Anwendung kommen. Man zerlegt einmal die Function f (x) dx, um sie zu integriren, in mehrere andere, deren Integrale bekannt sind: es ist dies das Verfahren der Integration durch Zerlegung.

Beispiele:

$$1)\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx\,(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-\cot x+C.$$

$$2)\quad\int\frac{2x+1}{x^2+1}\,dx=\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$=\log(x^2+1)+\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)+C.$$

Es ist oft nützlich eine neue Variabele einzuführen. Setzt man nämlich, um f (x) dx zu integriren, $x=\varphi t$; so bekommt man einen Differentialausdruck von der Form:

$$f(\varphi t)\cdot\varphi' t\ dt.$$

Läßt sich nun diese letzte Funktion integriren, so braucht man, um das Integral der gegebenen Function zu erhalten, für t nach der Integration blos seinen Werth in x einzuführen. Ist nemlich F (x) die gesuchte Function, so ist

$$\frac{dF}{dx}=f(x),$$

also

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(\varphi t)\cdot\varphi' t.$$

Statt der ursprünglich geforderten Integration in Bezug auf x tritt demnach jetzt die Integration von $f(\varphi t)\cdot\varphi' t\cdot dt$ in Bezug auf t ein. Dieses Verfahren wird die **Integration durch Substitution** genannt.

Beispiele:

$$1)\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\frac{x^2}{a^2}}.$$

Setzt man $\frac{x^2}{a^2}=t^2$, so wird

$$\int\frac{dx}{1+\frac{x^2}{a^2}}=a\int\frac{dt}{1+t^2}.$$

Folglich

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\cdot\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=t)+C$$
$$=\frac{1}{a}\cdot\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{a}\right)+C.$$

2) $\frac{5x^3 dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\int\frac{12x^3 dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\, l\,[c\,(3x^4+7)]$.

Um ein zusammengesetztes Integral auf ein einfacheres zurückzuführen, bedient man sich sehr häufig der auf dem ganzen Gebiete der Integralrechnung höchst fruchtbaren Regel, welche unter dem Namen der theilweisen Integration bekannt ist. Sind nämlich u und v beliebige Functionen von x, so ist

$$d\,(uv) = udv + vdu,$$

woraus, wenn zur Integration geschritten wird:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Aufsuchung des Integrals $\int udv$ auf die des Integrals $\int vdu$ zurückgeführt wird. Bei diesem Verfahren kommt es also vor Allem darauf an, das gegebene Differential dergestalt zu zerlegen, daß das Integral des einen Factors, mit dem Differential des andern multiplicirt, einen einfacheren Ausdruck liefert, dessen Integral sich leichter angeben läßt.

Beispiele.

1) $\int lx \cdot dx = x \cdot lx - \int x\frac{dx}{x} = xlx - x + C.$

2) $\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$

Das Geschäft des Integrirens läuft meistens darauf hinaus, diese drei Integrationsmethoden auf die rechte Weise mit einander zu verbinden, um das gesuchte Integral nicht blos zu finden, sondern es auch auf dem kürzesten Wege zu erhalten, wie wir dies in den einzelnen später vorkommenden Fällen sehen werden. Gelangt man nicht dahin, die Integration in endlicher Form auszuführen, oder mit anderen Worten gelingt es nicht mittelst der angegebenen drei Integrationsmethoden das fragliche Integral auf bereits bekannte Integrale zurückzuführen; so sucht man, wie schon bemerkt worden, jenes Integral durch eine convergirende Reihe auszudrücken.

§. 79. **Integration durch Reihen.** Wenn die Differentialfunction in eine convergirende Reihe sich entwickeln läßt; so erhält man das Integral dieser Function in Gestalt einer Reihe, welcher man eine willkührliche Constante hinzufügen muß, um dem Integral die erforderliche Allgemeinheit zu geben.

So z. B. hat man für den Ausdruck

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

nachstehende zwei Reihen:

$$C + \left(x - \frac{3x^5}{5} + \frac{3\cdot7x^9}{5\cdot9} - \frac{3\cdot7\cdot11x^{13}}{5\cdot9\cdot13} + \text{ꝛc.}\right) \quad \sqrt{1+x^4}$$

und

$$C - \left(\frac{1}{x^3} - \frac{3}{5x^7} + \frac{3\cdot7}{5\cdot9x^{11}} - \frac{3\cdot7\cdot11}{5\cdot9\cdot13x^{15}} + \text{ꝛc.}\right) \quad \sqrt{1+x^4};$$

wovon die Erstere für $x < 1$ und die Zweite für $x > 1$ gilt.

Ist die Function $f(x)$ nach der Maclaurinschen Formel entwickelbar, oder ist:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{1\cdot2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot2\cdot3}\,x^3 + \text{ꝛc.};$$

so folgt unmittelbar:

$$\int f(x)\,dx = C + f(0)\cdot x + f'(0)\cdot\frac{x^2}{1\cdot2} + f''(0)\,\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \text{ꝛc.}$$

Man kann hier bemerken, daß, wenn die erste Reihe, welche die Entwickelung von $f(x)$ darstellt, convergirt, die zweite Reihe, welche das Integral von $\int f(x)\,dx$ liefert, noch stärker convergiren wird. Denn nach § 38 ist das Ergänzungsglied der ersten Reihe

$$= \frac{x^n}{1\cdot2\cdot n}\, f^n(\vartheta x),$$

wo ϑ eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bedeutet und das Ergänzungsglied der zweiten Reihe

$$= \frac{x^{n+1}\, f^{(n)}(\vartheta_1 x)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n+1)}.$$

Sollen nun die beiden fraglichen Reihen convergiren, so müssen die zwei Ergänzungsglieder für entsprechende Werthe von n und für alle zwischen den Integrationsgrenzen liegenden Werthe von x kleiner als jede gegebene Größe werden können. Wenn diese Bedingung aber in Bezug auf das Ergänzungsglied der ersteren Reihe erfüllt ist, so wird sie es um so mehr in Bezug auf das Ergänzungsglied der zweiten Reihe.

Läßt sich auf die gegebene Function $f(x)$ das Maclaurinsche Theorem nicht anwenden, so muß man dieselbe auf anderem Wege in eine convergirende Reihe umzuwandeln suchen, wobei man darauf zu achten hat, daß die einzelnen Glieder dieser Reihe integrirbar sind. Um z. B. den Werth des Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

für $x > 1$ zu erhalten, kann man den Maclaurinschen Lehrsatz nicht gebrauchen, weil damit eine divergente Reihe zum Vorschein kommt. Im vorliegenden Falle läßt sich aber jene Entwickelung durch folgende ersetzen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} =$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{x^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{x^9} + \cdots, \right)$$

welche für $x > 1$ eine convergirende Reihe bildet.

Durch die Integration entsteht jetzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = C - \frac{2}{\sqrt{x}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{13x^6} \right.$$

$$\left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{19\, x^9} + \cdots \right\}.$$

§. 80. **Fortsetzung.** Wir haben früher bewiesen, daß das Integral einer Summe durch Integration der einzelnen Summanden erhalten wird. Daß die nämliche Regel auch bei der Integration einer unendlichen Reihe gilt, beweist sich folgendermaßen. Es sei zu diesem Behuf

$$y = F(x) + f(x) + \varphi(x) + \cdots Rx,$$

die in eine convergirende Reihe entwickelte Function, so daß lim R verschwindet. Alsdann ist nach §. 76, wenn die einzelnen Glieder der Reihe innerhalb des Intervalls von $x = a$ bis $x = x$, wo a eine Constante vorstellt, wie auch y stetig bleiben:

$$\int_a^x ydx = \lim dx \begin{cases} F(a) + f(a) + \varphi(a) \cdots\cdots + Ra \\ +F(a+dx) + f(a+dx) + \varphi(a+dx) \cdots + Ra + dx \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ +F(x-dx) + f(x-dx) + \varphi(x-dx) \cdots + Rx - dx \end{cases}$$

$$= \int_a^x ydx - \int_o^a ydx,$$

wo

$$\int_o^a ydx = C$$

die Constante der Integration vorstellt. Bei veränderter Ordnung der

Glieder wird:

$$\left.\begin{aligned}\int_a^x ydx = C + \lim dx\ &[F(a) + F(a+dx) \cdots + F(x-dx)]\\ + \lim dx\ &[f(a) + f(a+dx) \cdots + f(x-dx)]\\ + \lim dx\ &[\varphi(a) + \varphi(a+dx) \cdots + \varphi(x-dx)]\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ + \lim dx\ &[Ra + Ra + dx \cdots \quad + R(x-dx)].\end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Der Letzte dieser Grenzwerthe $= \int_a^x Rxdx$ ist nun zwischen $(x-a)\ G$ und $(x-a)\ K$ enthalten, wo G und K den größten und kleinsten Werth vorstellen, welchen R im Intervall von $x = a$ bis $x = x$ erlangt. Da aber $\lim G = \lim K = 0$, so verschwindet der vom Reste abhängige Theil, wenn man sich eine unendliche Reihe denkt. Hierbei darf x oft nicht unendlich groß werden, da $\lim (x-a)\ R$ zuweilen unbestimmt ist. Hieraus folgt:

$$\int_a^x ydx = \int_a^x F(x)dx + \int_a^x f(x)dx + \int_a^x \varphi(x)\,dx \cdots + C.$$

Jedes der letzteren Integrale kann nun in die Differenz eines variabeln und constanten Theils zerlegt werden. Vereinigt man alle diese Constanten in eine Einzige, so kommt

$$\int ydx = C + \int F(x)\ dx + \int f(x)\ dx + \varphi(x)\ dx + \cdots.$$

Umgekehrt wird die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens durch Differentiation nachgewiesen. Setzt man nämlich in der Gleichung (A) $x + dx$ statt x, so nehmen die einzelnen Horizontalreihen entsprechend um $F(x)\ dx$, $f(x)\ dx$, $\varphi(x)\ dx \cdots$ zu, so daß nach Subtraction des ursprünglichen Werthes x und Division mit dx y übrig bleibt:

$$y = F(x) + f(x) + \varphi(x) + \cdots$$

Jede durch Integration einer bestimmten convergenten Reihe erzeugte Reihe liefert also durch Differentiation wieder die ursprüngliche. Nicht so erhält man im Allgemeinen durch Differentiation unendlicher Reihen stets richtige Resultate, wenigstens, wenn man, um die Derivirte zu bestimmen, dieselbe für jedes einzelne Glied hinsetzt. So entsteht z. B. aus der für $x = 1$ noch gültigen Reihe:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots$$

die Reihe:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots,$$

welche für $x = 1$ unrichtig wird.

Man habe ferner die unendliche Reihe:

$$y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots,$$

welche für jeden Werth von x convergirt, also eine völlig bestimmte Function von x darstellt. Indem man jetzt dieselbe Glied für Glied differentiirt, erhält man:

$$y' = \cos x - \cos 2x + \cos 3x \cdots,$$

was, da eine divergente Reihe nicht einer bestimmten Function gleich sein kann, falsch ist. Der Grund der entstehenden Unrichtigkeit liegt darin, daß man bei der Differentiation, nachdem man beiderseits $x+a$ statt x gesetzt und abgezogen hat, nicht mehr, wie wenn n eine endliche Größe vorstellt, auch bei unendlich werdenden n das bei Aufsuchung der Derivirten von $\frac{\sin nx}{n}$ vorkommende Grenzverhältniß

$$\lim \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}} = 1$$ setzen darf. Denn wie klein man auch x nehmen mag, so kann man doch immer ein weit genug entferntes Glied $\frac{1}{n}\sin nx$ vorstellen, für welches nx nicht mehr unendlich klein, also auch nicht

$$\lim \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}} = 1 \text{ ist.}$$

Im Allgemeinen ist nämlich, wenn

$$\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \ldots$$

die zu differentiirende Reihe vorstellt, für unendlich abnehmende x;

$$\varphi'(x) = \lim \left\{ \frac{f_1(x+\alpha) - f_1(x)}{\alpha} + \frac{f_2(x+\alpha) - f_2(x)}{\alpha} + \text{etc.} \right\}.$$

Nun kann man aber

$$\frac{f_1(x+\alpha) - f_1(x)}{\alpha} = f_1'(x) + \varepsilon_1$$

setzen, wo ε_1 mit α gleichzeitig verschwindet, so daß bei reellen Functionen

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{2} f_1''(x + \vartheta_1 \alpha).$$

wenn man den Taylor'schen Satz bis zur zweiten Annäherung anwendbar voraussetzt.

Hieraus folgt

$$\varphi'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + f'_3(x) + \ldots$$
$$+ \lim \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots\}.$$

Die Differentiation der einzelnen Glieder einer unendlichen Reihe führt also nur dann zu einem richtigen Resultat, wenn der mit dem Zeichen lim versehene Ausdruck verschwindet. Z. B. für $\varphi = \text{arc}(\text{tg} = x)$ wird $\varphi' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \ldots - \frac{1}{2} \lim \{2\alpha(x + \vartheta\alpha)$

$$- 4\alpha(x + \vartheta_1\alpha)^3 + 6\alpha(x + \vartheta_1\alpha)^5 \ldots\}$$

Für $x = 1$, wo $\lim (x + \vartheta\alpha)^{n-1}$ nicht $= 0$ ist, verschwindet aber für wachsende n der Ausdruck $\lim \alpha n (x + \vartheta\alpha)^{n-1}$ nicht, indem, so klein auch α sein möge, der einem sehr weit entfernten Gliede entsprechende Index n stets groß genug gewählt werden kann, dergestalt daß nicht $\lim n\alpha = 0$ ist. Dagegen ist für $x < 1$ $\lim n (x + \vartheta\alpha)^{n-1} = 0$, also um so mehr $\lim n\alpha (x + \vartheta\alpha)^{n-1} = 0$.

Man kann behaupten, daß man durch Differentiation der einzelnen Glieder einer unendlichen Reihe immer richtige Resultate erhält, wenn die so entstehende Reihe convergirt und die Reihe der zweiten Derivirten nicht unendlich wird. Es muß nämlich alsdann in der Gleichung

$$\frac{\varphi(x+\alpha) - \varphi(x)}{\alpha} = f'_1(x) + f'_2(x) \ldots + \frac{\alpha}{2}\{f''_1(x+\vartheta_1\alpha)$$
$$+ f''_2(x + \vartheta_2\alpha) \ldots\},$$

so lange α noch endlich ist, die Reihe der ε jedenfalls convergiren, weil in derselben Bestimmtes und Unbestimmtes nicht gleich sein kann. Ist also ihr Werth auch für $\alpha = 0$ noch endlich, und bezeichnet man den größten absoluten endlichen Werth, welchen sie im Intervall von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha$ erlangt durch R, so ist dem absoluten Werth nach

$$\frac{\alpha}{2}\Big\{f''_1(x + \vartheta_1\alpha) + f''_2(x + \vartheta_2\alpha)\Big\} < \frac{\alpha}{2}R;$$

mithin

$$\lim \frac{\alpha}{2}\Big\{f''_1(x + \vartheta_1\alpha) + f''_2(x + \vartheta_2\alpha) \ldots\Big\} = 0;$$

$$\text{also } \varphi'_x = f'_1(x) + f'_2(x) + f'_3(x) + \ldots$$

Convergirt eine nach dem Maclaurinschen Satze entwickelte Reihe, wenn x kleiner als der unzulässige Modul ist, so ist dies mit der durch Differentiation der einzelnen Glieder entstandenen Reihe desgleichen der Fall. Denn ist x kleiner als der unzulässige Modul, so ist die durch Differention entstehende Reihe genau dieselbe, welche auch der Cauchy'sche Satz, auf die Function $\varphi'(x)$ angewandt, liefern würde. Der Ma-

claurinsche Satz darf also, wenn x kleiner als der unzulässige Modul ist, stets differentiirt werden.

§. 81. **Bernoulli's Reihe.** Das Integral $\int f(x)\,dx$ kann unmittelbar in eine Reihe umgewandelt werden, wenn man theilweise integrirt. Es ist nämlich:

$$\int f(x)\,dx = x\,f(x) - \int f'(x)\,.\,x\,dx;$$

ferner:

$$\int f'(x)\cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\,f'(x) - \frac{1}{2}\int f''(x)\cdot x^2\,dx;$$

weiter:

$$\int f''(x)\cdot x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\,f''(x) - \frac{1}{3}\int f'''(x)\cdot x^3\,dx;\quad \text{und so fort.}$$

Werden diese Werthe nach und nach substituirt, so entspringt folgende, von Johann Bernoulli zuerst aufgestellte Integrationsreihe:

$$\int f(x)\,dx = \frac{x}{1}\,f(x) - \frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot f'(x) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot f''(x)$$

$$- \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot f'''(x) + \text{rc.},$$

zu welcher man, wenn sie bis zu dem Gliede

$$\frac{(-1)^{r-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\,x^r\,f^{(r-1)}_{(x)}$$

fortgesetzt wird, noch das Ergänzungsglied

$$\frac{(-1)^r}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\int x^r\,f^{(r)}_{(x)}\,dx$$

hinzuzusetzen hat.

Um den Werth dieser Ergänzung näher beurtheilen zu können, geben wir ihr eine andere Form. Wir denken uns zu diesem Behuf das Integral $\int x^r\,f^{(r)}_{(x)}\,dx$ dergestalt bestimmt, daß es für $x = o$ verschwindet, was wir dürfen, wenn wir nur auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in dem obenstehenden Ausdrucke den Werth hinzu fügen, welchen $\int f(x)\,dx$ für $x = o$ annimmt. Sind nun x_1, x_2 $x_3 \cdots$ Zahlen, durch welche die Veränderliche x, von o angefangen bis zu ihrem letzten Werthe x, übergeht: so entsteht nach dem in §. 76 aufgestellten Begriff des Integrals, wenn in fraglichem Intervall $\int x^r\,f^{(r)}_{(x)}\,dx$ stetig, oder $f^{(r)}_{(x)}$ endlich ist, die Gleichung:

$$\int x^r\,f^{(r)}_{(x)}\,dx = \lim\cdot dx\,[x_1^r\,f^{(r)}_{(x_1)} + x_2^r\,f^{(r)}_{(x_2)} \cdots + x_{n-1}^r\,f^{(r)}_{(x_{n-1})}],$$

wobei sich das Zeichen lim auf die unendliche Abnahme von dx und

auf das gleichzeitige Wachsen von n bezieht. Offenbar ist aber die Summe

$$[x_1{}^r f^{(r)}_{(x_1)} + x_2{}^r f^{(r)}_{(x_2)} + \cdots + x^r_{n-1} f^{(r)}_{(x_{n-1})}] \, dx$$

größer als das Product von

$$(x_1{}^r + x_2{}^r + \cdots + x^r_{n-1}) \, dx$$

mit dem kleinsten Werthe, welchen $f^{(r)}_{(x)}$ erhält, während x von Null bis zu seinem letzten Werthe übergeht, und kleiner als das Product von

$$(x_1{}^r + x_2{}^r \cdots + x^r_{n-1}) \, dx$$

mit dem größten Werthe von $f^r_{(x)}$ innerhalb gedachten Intervalls.

Man kann daher setzen

$$[x_1{}^r f^{(r)}_{(x_1)} + x_2{}^r f^{(r)}_{(x_2)} \cdots + x^r_{n-1} f^r_{(x_{n-1})}] \, dx =$$
$$[x_1{}^r + x_2{}^r + x^r \cdots + x^r_{n-1}] \, dx \cdot f^r(\vartheta x),$$

wo ϑ eine die Einheit nicht überschreitende positive Zahl bedeutet. Hierdurch wird

$$\int x^r \cdot f^{(r)}_{(x)} \, dx = f^{(r)}(\vartheta x) \cdot \lim dx \, [x_1{}^r + x_2{}^r \cdots x^r_{n-1}].$$

Es ist aber:

$$\lim \cdot dx \, [x_1{}^r + x_2{}^r \cdots x^r_{n-1}] = \frac{x^{r+1}}{r+1}.$$

Daher bekommen wir

$$\int x^r f^{(r)}_{(x)} \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot f^{(r)}(\vartheta x);$$

weshalb die auf das Glied

$$\frac{(-1)^{r-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} x^r f^{(r-1)}(x)$$

folgende Ergänzung der obigen Reihe auch durch

$$\frac{(-1)^r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r(r+1)} x^{r+1} f^{(r)}(\vartheta x)$$

dargestellt werden kann.

Die Bernoullische Reihe hätte man auch direct aus der Taylorschen Reihe

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} F''(x) \cdots$$

herleiten können. Denn setzt man in derselben $h = -x$, so bekommt man:

$$F(x) = F(o) + \frac{x}{1} F'(x) - \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(x) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''(x) - \text{etc.},$$

woraus, wenn man $F'(x) = f(x)$ setzt, die Formel

$$\int f(x)\,dx = F(o) + \frac{x}{1} f(x) - \frac{x^2}{1 \cdot 2} f'(x) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''(x) - \text{2c.}$$

entsteht, in welcher $F(0)$ oder der Werth von $\int f(x)\,dx$ für $x = 0$ die Stelle der willkührlichen Constanten vertritt.

Wenn sich die Function $f(x)$ nicht in einer hinreichend schnell convergirenden Reihe darstellen läßt, so kann man das Integral $f(x)dx$ in eine Summe von mehreren Integralen verwandeln, welche sich auf die nämliche Differentialfunction beziehen, indem man das Intervall der Integrationsgrenzen a und b durch Einschaltung der dazwischen liegenden Werthe a', a'' ... der Variabeln x in eine hinlängliche Anzahl von Theilen zerlegt.

Man hat hiernach:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a'} f(x)\,dx + \int_{a'}^b f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a'} f(x)\,dx + \int_{a'}^{a''} f(x)\,dx + \int_{a''}^b f(x)\,dx, \text{ 2c.};$$

welche Ausdrücke beziehungsweise mit den identischen Gleichungen

$$F(b) - F(a) = F(a') - F(a) + F(b) - F(a');$$

$$F(b) - F(a) = F(a') - F(a) + F(a'') - F(a') + F(b) - F(a''), \text{ u. s. w.}$$

zusammenfallen.

§. 82. **Entwickelung der Functionen mittelst der Integration durch Reihen.** Die Integration mittelst unendlicher Reihen ist zuweilen der einfachste Weg um zur Entwickelung der Function nach den Potenzen der unabhängigen Veränderlichen zu gelangen.

Beispiele.

1) Man erhält für $\int \frac{dx}{1+x}$ wenn man $\frac{1}{1+x}$ in eine Reihe entwickelt,

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots)dx$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + C.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x).$$

Folglich hat man

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + C.$$

Die willkürliche Constante wird dadurch bestimmt, daß die linke Seite und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens für $x=0$ verschwinden, wodurch $C = 0$ wird. Man kommt dergestalt auf die bekannte Relation:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

zurück, in welcher $x < 1$ und > -1 sein muß.

2) Für $\int \frac{dx}{1+x^2}$ findet man nach demselben Verfahren

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx\,(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

weil die Constante für den speciellen Werth von $x = 0$ verschwindet. Die letztere hört auf gültig zu sein, sobald

$$x > 1 \text{ und } < -1$$

wird.

Man kann übrigens auch eine convergente Reihe für den Fall, daß x die Einheit übertrifft, erhalten, wenn man setzt

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \cdots\right) =$$

$$C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots.$$

Da für $x = \frac{1}{0}$ entspringt $\frac{\pi}{2} = C$, so hat man endlich die Reihe

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots,$$

welche so lange Gültigkeit besitzt, als x zwischen 1 und $\frac{1}{0}$ liegt.

3) Um $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\,(\sin = x)$ in einer Reihe darzustellen, hat man:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3x^4}{2 \cdot 4} + \cdots.$$

Durch Integration entsteht:

$$\text{arc}\,(\sin = x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{8} + \cdots,$$

wo keine Constante hinzugefügt worden ist, weil der Bogen zugleich mit dem Sinus verschwindet. Setzt man in der letzteren Formel zuerst $x = 1$ und dann $x = \frac{1}{2}$; so hat man zur Bestimmung der Zahl π das eine mal den Ausdruck:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ꝛc.};$$

und das andere mal den Ausdruck:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2^7} + \text{ꝛc.}$$

4) Für $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ erhält man

$$l\,(x + \sqrt{1+x^2}) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int dx \left(1 - \frac{1x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3x^4}{2 \cdot 4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

indem die Constante für den speciellen Werth von $x = 0$ verschwindet. Die letzte Reihe gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß $1 > x > -1$ ist.

§. 83. **Integration der höheren Differentialausdrücke.** Bisher haben wir immer das erste Differential

$$dy = f\,(x)\,dx$$

als gegeben angenommen, aus welchem durch Integration

$$y = \int f\,(x)\,dx$$

zu bestimmen war. Nehmen wir nun an, daß blos das zweite Differential

$$d^2y = f(x)\,dx^2$$

bekannt sei, so kann man durch eine zweimalige Integration zur primitiven Function zurückkehren.

Es ist nämlich

$$\frac{d^2y}{dx} = f(x)\, dx,$$

woraus, weil $\frac{d^2y}{dx}$ das Differential von $\frac{dy}{dx}$ ist, sich ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\, dx + C.$$

Daraus folgt weiter, wenn man abermals integrirt:

$$y = \int dx \int f(x)\, dx + Cx + C',$$

wobei der Ausdruck $\int dx \int f(x)\, dx$ zwei auf einander folgende Integrationen andeutet.

Ebenso erhält man für das Differential der dritten Ordnung

$$d^3y = f(x)\, dx^3$$

durch Wiederholung des vorigen Verfahrens:

$$y = \int dx \int dx \int f(x)\, dx + Cx^2 + C'x + C'',$$

wobei C, C′, C″ willkührliche Constanten darstellen, und in dem ersten Gliede des zweiten Theils drei auf einander folgende Integrationen angedeutet sind. — Für $d^3y = x^2dx^3$ z. B. erhält man:

$$y = \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + Cx^2 + C'x + C''.$$

Diese wiederholten Integrationen pflegt man, abgesehen von den Constanten, auf folgende einfachere Art anzudeuten.

Aus $d^2y = f(x)\, dx^2$ folgt

$$y = \int\int f(x)\, dx^2 = \int^2 f(x)\, dx^2;$$

aus $d^3y = f(x)\, dx^3$ ergibt sich

$$y = \int\int\int f(x)\, dx^3 = \int^3 f(x)\, dx^3.$$

Im Uebrigen folgt aus der Entstehung der höheren Differentiale von selbst, daß aus dem nten Differentiale die primitive Function, das ist das nte Integral, gefunden wird, indem man nmal nach einander integrirt, wobei dx als constant gilt.

Vermittelst der theilweisen Integration lassen sich die höheren Integrale auf lauter einfache Integrale zurückführen.

Man erhält so für

$$\int^2 f(x)\, dx^2 = \int dx \int f(x)\, dx = x \int f(x)\, dx - \int x\, f(x)\, dx,$$

Für $\int^3 f(x)\, dx^2$ findet man zunächst

$$\int^3 f(x)\, dx^3 = \int dx \int^2 f(x)\, dx^2 =$$
$$\int x\, dx \int f(x)\, dx - \int dx \int x\, f(x)\, dx.$$

Erwägt man hierauf, daß

$$\int x\,dx \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 \int f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int x^2\,f(x)\,dx,$$

und daß

$$\int dx \int x\,f(x)\,dx = x\int x\,f(x)\,dx - \int x^2\,f(x)\,dx;$$

so entspringt:

$$\int^3 f(x)\,dx^3 = \frac{1}{1\cdot 2}\left[x^2\int f(x)\,dx - 2x\int x f(x)\,dx + \int x^2\,f(x)\,dx\right].$$

Geht man auf ähnliche Weise weiter, so lassen sich folgende Formeln aufstellen:

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\,dx;$$

$$\int^2 f(x)\,dx^2 = \frac{1}{1}\left[x\int f(x)\,dx - \int x f(x)\,dx\right];$$

$$\int^3 f(x)\,dx^3 = \frac{1}{1\cdot 2}\left[x^2\int f(x)\,dx - 2x\int x f(x)\,dx + \int x^2\,f(x)\,dx\right];$$

$$\int^4 f(x)\,dx^4 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[x^3\int f(x)\,dx - 3x^2\int x f(x)\,dx + 3x\int x^2 f(x)\,dx - \int x^3\,f(x)\,dx\right]. \text{ u. s. w.}$$

Die numerischen Coefficienten dieser Ausdrücke stimmen mit denjenigen der Potenzen des Binoms $(a - b)$ überein, und während der Exponent von x außerhalb des Integralzeichens, mit jedem Gliede um eine Einheit abnimmt, wenn man von der Linken zur Rechten fortschreitet, nimmt der Exponent unter dem Integralzeichen um die nämliche Größe zu.

Die in diesen Formeln weggelassenen willkührlichen Constanten kann man wieder herstellen, wenn man

$$\int f(x)\,dx + C \text{ statt } \int f(x)\,dx,$$

$$\int x\,f(x)\,dx + C' \text{ statt } \int x\,f(x)\,dx,$$

u. s. w. setzt. Da die Constanten $C, C', C'' \ldots$ verschiedene Potenzen von x begleiten, so lassen sie sich nicht mit einander verbinden; es erscheinen demnach im $n$ten Integrale auch n willkührliche Constanten Man erhält durch diese Ergänzung z. B.:

$$\int^4 f(x)\,dx = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[x^3\int f(x)\,dx - 3x^2\int x f(x)\,dx + 3x\int x^2 f(x)\,dx - \int x^3\,f(x)\,dx\right] + Cx^3 + C'x^2 + C''x + C'''.$$

II. Integration algebraischer Differentiale.

§. 84. **Rationale algebraische Differentiale.** Nachdem die allgemeinen Regeln aufgestellt worden sind, vermittelst deren man die Integration zusammengesetzter Ausdrücke auf die einfacheren Formen zurückzuführen suchen muß, kommt es jetzt darauf an jene Regeln auf die einzelnen speciellen Fälle in Anwendung zu bringen, welche dann eintreten, wenn die gegebene Differentialformel dieser oder jener besonderen Klasse von Functionen angehört. Wir machen deßhalb mit den leichteren, den rationalen algebraischen Differentialformeln den Anfang. Jede dieser Klasse zugehörige Differential-Function von der Form:

$$dy = (a + bx^m + cx^n \ldots) \, dx,$$

wo a, b, c ... beliebige Constanten und m, n ... positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, läßt sich nach dem oben Gesagten ohne weiteres integriren. Die Integration unterliegt keiner Schwierigkeit, wie denn auch das vorstehende Differential noch auf dieselbe Weise integrirt werden kann, wenn die Exponenten m, n ... beliebige nicht ganze Werthe haben.

Wir gehen darum sogleich zu der Integration ächt gebrochener rationaler algebraischer Differentialformeln über, d. h. zu den Integralen von der Form

$$\int \frac{f\,(x)}{F\,(x)}\, dx,$$

wo f (x) und F (x) ganze rationale algebraische Functionen bedeuten und im Nenner höhere Potenzen von x als im Zähler vorkommen. Fände dies Letztere nicht statt, d. h. enthielte der Zähler höhere Potenzen von x als der Nenner oder wären diese höchsten Exponenten gleich, oder mit anderen Worten gehörte die vorgelegte Function zu der Klasse der sogenannten unächt gebrochenen rationalen algebraischen Functionen; so könnte man jederzeit durch Ausführung der Division die fragliche Function in eine ganze Function und in eine Bruchfunction umwandeln, in welcher der Zähler niedrigere Potenzen als der Nenner enthielte und daher eine ächt gebrochene rationale Function von x wäre. Hiernach reducirt sich die Integration rationaler algebraischer Functionen auf die der ächt gebrochenen Functionen dieser Klasse.

Nach dem was in der algebraischen Analysis über die Zerlegung der rationalen gebrochenen Functionen in ihre **Partialbrüche** gesagt worden, kann nun jede ächt gebrochene rationale Differentialfunction $\frac{f(x)}{F(x)} dx$ mit einer bestimmten Anzahl von einem oder einigen Differentialen von den Formen:

$$\frac{A}{x-a} dx; \quad \frac{A}{(x-a)^n} dx; \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx; \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$$

als gleichgeltend angesehen werden, wobei A, B, a, p und q constante Größen darstellen und n eine positive ganze Zahl ist. Auf die Integration von einer oder mehreren dieser einfachen Differentialformeln kommt mithin die gegebene Aufgabe jederzeit zurück.

Was die Integrale der Partialbrüche mit binomen Nennern anlangt, so findet man bald daß das Erste

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\,l\,(x-a) + C;$$

und das Zweite

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = \frac{-A}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}} + C \text{ ist.}$$

§. 85. **Partialbrüche mit trinomen Nennern.** Was die zwei Partialbrüche mit trinomen Nennern betrifft, so sind diese Brüche mit den Brüchen

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \quad \text{und} \quad \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

beziehungsweise gleichgeltend, wenn man erwägt, daß zu dem Factor $x^2 + px + q$ imaginäre Wurzelpaare von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ gehören. Für den ersten dieser Brüche hat man nun offenbar:

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A\,(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A\alpha+B}{\beta} \cdot \frac{\frac{dx}{\beta}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1},$$

woraus durch Integration entspringt:

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\,l\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$

$$+ \frac{A\alpha+B}{\beta} \cdot \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C.$$

Für die vierte Differentialfunction erhält man auf gleiche Weise:

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \frac{A(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{(A\alpha+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Das Integral des ersten Theils auf der rechten Seite dieser Gleichung ist:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{A}{(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}.$$

Der zweite Theil erhält die Form

$$\frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-1}}\cdot\frac{\frac{dx}{\beta}}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^n},$$

oder wenn

$$\frac{x-\alpha}{\beta}=z$$

gesetzt wird, die einfachere Form:

$$\frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-1}}\cdot\frac{dz}{(z^2+1)^n},$$

so daß das Integral

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

zu bestimmen übrig bleibt.

Zu diesem Behuf bringt man die Function

$$\frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

auf die Form

$$\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}-\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}.$$

Daraus entspringt:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}-\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}.$$

Wenn man aber das Letzte dieser Integrale nach der theilweisen Integration behandelt, indem man $\frac{z}{2}$ und $\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^n}$ zu Factoren wählt, findet man:

$$\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}=-\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)(z^2+1)^{n-1}}+\int\frac{dz}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)(z+^2 1)^{n-1}}$$

Substituirt man dieses Resultat in die vorige Gleichung, so erhält man endlich:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}.$$

Durch diese Formel hängt das gesuchte Integral von einem Integral derselben Art ab, in welchem der Exponent n um eine Einheit kleiner ist. Mittelst der nämlichen Formel wird dann das letzte Integral auf ein anderes, in welchem der Exponent n wieder um eine Einheit vermindert ist, zurückgeführt, und dieses Verfahren solange fortgesetzt, bis man zu dem Integral

$$\int\frac{dz}{z^2+1}=\text{arc}\,(\text{tang}=z)$$

gelangt. Für das in Frage stehende Integral ergibt sich zuletzt der Ausdruck:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\frac{z}{2(z^2+1)^{n-1}}\Big(\frac{1}{n-1}+\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{z^2+1}{n-2}$$
$$+\frac{(2n-3)(2n-5)(z^2+1)^2}{2^2(n-1)(n-2)(n-3)}+\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)(z^2+1)^3}{2^3(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$
$$+\cdots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots\ldots 5\cdot 3}{2^{n-2}(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2}\cdot\frac{(z^2+1)^{n-2}}{1}$$
$$+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\,\text{arc}\,(\text{tg}=z)+C.$$

§. 86. **Ergebniß und Anwendungen.** Fassen wir das in den beiden vorhergehenden Paragraphen Gesagte noch einmal kurz zusammen, so sehen wir, daß sich die Integration der rationalen gebrochenen Differentialfunctionen stets ausführen, und daß das Integral von dergleichen Functionen sich entweder algebraisch, oder mittelst der Logarithmen oder Kreisfunctionen darstellen läßt. Die Integration dieser Functionen bietet demnach keine weitere Schwierigkeit dar, als diejenige etwa, welche die Zerlegung des Nenners in seine einfachen Factoren mit sich bringen mag.

Beispiele.

1) Für das Integral von

$$\frac{dx}{a^2-x^2}$$

hat man zunächst $a+x$ und $a-x$ als Factoren des Nenners.

Man findet $\dfrac{1}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\Big(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\Big)$.

Folglich

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{a+x} + \int\frac{dx}{a-x}\right) = \frac{1}{2a}\, l\, \frac{a+x}{a-x} \quad + C.$$

2) Auf gleiche Weise bekommt man:

$$\int \frac{(2-4x)\,dx}{x^2-x-2} = \int\frac{2dx}{2-x} - \int\frac{2dx}{x+1} = l\,\frac{1}{(x^2-x-2)^2} + C.$$

3) Für das Integral von

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}\,dx$$

erhält man

$$x,\ (x+1)^2 \quad \text{und} \quad (x-1)^2$$

als Factoren des Nenners. Man findet

$$\frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} - \frac{\frac{5}{4}}{x+1}.$$

Folglich

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}\,dx =$$

$$\int dx \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{5}{4(x+1)}\right).$$

Werden die einzelnen Integrale bestimmt, so erhält man:

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}\,dx =$$

$$2\,lx - \frac{1}{(x-1)} - \frac{3}{4}\,l\,(x-1) + \frac{1}{2\,(x+1)} - \frac{5}{4}\,l\,(x+1) + C.$$

4) Auf dieselbe Weise findet man

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x} = \int dx\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}\right) =$$

$$\frac{1}{1+x} + l\,\frac{x}{1+x} + C.$$

5) Für $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$ erhält man:

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = \int \frac{\frac{1}{3}\,dx}{x-1} - \int \frac{\frac{1}{3}\,(x-1)\,dx}{x^2+x+1},$$

wovon das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung bekannt ist. Um das zweite zu bestimmen, setze man

$$x = z - \frac{1}{2};$$

dadurch entsteht

$$-\int \frac{\frac{1}{3} z \, dz}{z^2 + \frac{3}{4}} + \int \frac{\frac{1}{2} dz}{z^2 + \frac{3}{4}}.$$

Das Eine dieser Integrale ist

$$= -\frac{1}{6} l (z^2 + \tfrac{3}{4}) = -\frac{1}{3} l \sqrt{x^2 + x + 1};$$

während das Andere gleich ist

$$\frac{1}{3} \sqrt{3} \text{ arc} \left(\text{tang} = \frac{2z}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Man hat folglich:

$$\int \frac{x dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\Big[l (x-1) - l \sqrt{x^2+x+1}$$

$$+ \sqrt{3} \cdot \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big] + C.$$

6) Ebenso findet man:

$$\int \frac{(x^2-x+1) \, dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx \, (x+1)}{x^2+1}$$

$$= l \frac{\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt[4]{x^2+1}} - \frac{1}{2} \text{arc (tang} = x) + C.$$

7) Für $\frac{(x^4+2x^3+3x^2+3) \, dx}{(x^2+1)^3}$

hat man als gleichgeltenden Ausdruck:

$$\frac{(-2x+1)}{(x^2+1)^3} dx + \frac{(2x+1) \, dx}{(x^2+1)^2} + \frac{dx}{x^2+1}.$$

Das erste Glied der beiden ersteren Partialbrüche liefert:

$$\int - \frac{2 \, x dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2 \, (x^2+1)^2}$$

und

$$\int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{x^2+1}.$$

Hinsichtlich der zweiten Glieder gibt zunächst die obige Reductionsformel:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Wird nun das letzte Integral zum zweiten Glied des zweiten Partialbruchs addirt, so erhält man das Resultat:

$$\frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Die Reductionsformel auf dasselbe in Anwendung gebracht, gibt hierauf:

$$\frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{7x}{8(x^2+1)} + \frac{7}{8}\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Indem das letzte Glied zu dem dritten Partialbruche addirt wird, findet man:

$$\frac{15}{8}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{15}{8} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x).$$

Durch Vereinigung dieser verschiedenen Theile gelangt man zu dem Endresultat:

$$\int \frac{(x^4+2x^3+3x^2+3)\,dx}{(x^2+1)^3} = \frac{2+x}{4(x^2+1)^2} + \frac{7x-8}{8(x^2+1)}$$
$$+ \frac{15}{8} \operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x). + C.$$

8) Auf demselben Wege erhält man

$$\int \frac{dx}{x^6-1} = \frac{1}{6}\, l\, \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{12}\, l\, \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x\sqrt{3}}{x^2-1}\right) + C.$$

Zu bemerken ist noch, daß man in allgemeinen Rechnungen auf imaginäre Logarithmen oder Kreisbögen stoßen kann, welche sich aber durch Anwendung der Formel

$$l\,(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\, l\,(a^2+b^2) + \sqrt{-1} \operatorname{arc}\left(tg = \frac{b}{a}\right)$$

auf reelle Ausdrücke reduciren lassen.

§. 86. **Irrationale algebraische Differentiale.** Die irrationalen algebraischen Differentialfunctionen lassen sich nicht durch ein allgemeines, d. h. für jeden Fall ausreichendes Verfahren integriren.

Man muß diese Functionen in rationale umzuwandeln suchen, wenn dies aber nicht gelingt, das fragliche Integral auf einfachere Integrale zurückführen, und ein derartiges Verfahren so lange fortsetzen, bis man endlich auf Integrale kommt, welche keine weitere Reductionen mehr zulassen, und daher entweder für sich allein genau oder doch wenigstens näherungsweise berechnet werden müssen. Hier wollen wir nur das wenige Allgemeine, was sich über diesen Gegenstand sagen läßt, in Kürze zusammenstellen und aus jener Klasse von Functionen insbesondere diejenigen betrachten, welche in der Anwendung am meisten vorkommen.

Jede Differentialfunction

$$f\left[x, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{1}{q}}, \ldots\right] dx,$$

deren Irrationalität blos darin besteht, daß die vorgelegte Function irrationale Potenzen des Bruches

$$\frac{a+bx}{a'+b'x}$$

enthält, läßt sich in eine rationale Differentialformel umwandeln, wenn man, nachdem die in

$$f\left[x, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{1}{q}} \ldots\right]$$

vorkommenden irrationalen Größen auf einen gemeinsamen Wurzelexponenten n gebracht worden sind, setzt:

$$\frac{a+bx}{a'+b'x} = z^n.$$

Denn hierdurch wird

$$x = \frac{a'z^n - a}{b - b'z^n};$$

und

$$dx = \frac{n\,(ba'-ab')\,z^{n-1}\,dz}{(b-b'z^n)^2}.$$

Es geht folglich

$$f\left[x, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{1}{q}} \ldots\right] dx$$

in F (z) dz über, wobei F (z) eine rationale Function von z ist. Nach verrichteter Integration wird wieder

$$\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{1}{n}}$$

statt z geschrieben.

Der Ausdruck

$$f\left[x^m, \left(\frac{a+bx^m}{a'+b'x^m}\right)^{\frac{1}{n}}\right] x^{m-1}\, dx$$

kommt auf den vorhergehenden Fall zurück, wenn man $x^m = z$ setzt.

Beispiele.

1) Für $\frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x-1}$ mache man $x = z^2$.

Es entsteht dann:

$$\int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x-1} = \int \frac{2z^2 dz}{z^2-1} = 2\int dz + 2\int \frac{dz}{z^2-1} =$$

$$2z + l\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + C = 2\sqrt{x} + l\,\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + C.$$

2) Für

$$\frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$$

setze man $1 + x = z^6$.

Dadurch wird

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}} = \int - \frac{6z^3\,(1-z^6)\,dz}{1-z}$$

$$= -6\int dz\,(z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8) =$$

$$-\frac{3}{2}z^4 - \frac{6}{5}z^5 - z^6 - \frac{6}{7}z^7 - \frac{3}{4}z^8 - \frac{2}{3}z^9 + C;$$

in welchen Ausdruck man nur noch für z seinen Werth in x einzuführen hat.

§. 87. **Irrationale Functionen mit der Wurzelgröße von der Form**

$$\sqrt{a + bx + cx^2}. \text{ —}$$

Kommt in der vorgelegten Differentialformel keine andere irrationale

Größe als

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$$

vor, hat sie mithin die Form:

$$f\,(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx,$$

so kann man dieselbe auf verschiedene Weise rational machen. Man setze

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = z + x\sqrt{A}.$$

Hierdurch wird

$$x = \frac{C - z^2}{2z\sqrt{A} - B};$$

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \frac{C\sqrt{A} - Bz + z^2\sqrt{A}}{2z\sqrt{A} - B};$$

$$dx = -2 \cdot \frac{C\sqrt{A} - Bz + z^2\sqrt{A}}{(2z\sqrt{A} - B)^2}\,dz.$$

Dadurch verwandelt sich die gegebene Differentialformel in eine rationale F (z) dz. Nach verrichteter Integration ist

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} - x\sqrt{A}$$

an die Stelle von z zu setzen. Das vorstehende Verfahren erhält seine Anwendung, wenn A eine positive Größe ist.

Man mache

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = xz + \sqrt{C}.$$

Hierdurch entsteht:

$$x = \frac{2z\sqrt{C} - B}{A - z^2};$$

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \frac{A\sqrt{C} - Bz + z^2\sqrt{C}}{(A - z^2)^2};$$

und

$$dx = 2 \cdot \frac{A\sqrt{C} - Bz + z^2\sqrt{C}}{(A - z^2)^2}\,dz.$$

Die Substitution dieser Werthe macht die gegebene Function rational. Nach beendigter Integration wird

$$\frac{\sqrt{Ax^2 + Bx + C} - \sqrt{C}}{x}$$

statt z geschrieben. Diesen Weg schlägt man ein, wenn C positiv ist.

Die beiden eben auseinandergesetzten Transformationen bringen in dem Falle, wo die Größen A und C negativ sind, imaginäre Glieder in das gegebene Differential. In diesem Falle, vorausgesetzt daß

$$B^2 - 4AC > 0,$$

bringe man

$$Ax^2 + Bx + C$$

durch Zerlegung in seine einfachen reellen Factoren auf die Form

$$(\alpha + \beta x)\ (\gamma + \delta x),$$

und setze

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = (\alpha + \beta x)\, z.$$

Dadurch kommt

$$x = \frac{\alpha z^2 - \gamma}{\delta - \beta z^2},$$

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\delta - \beta z^2}\, z,$$

und

$$dx = \frac{2\,(\alpha\delta - \beta\gamma)\, z}{(\delta - \beta z^2)^2}\, dz.$$

Dieses Verfahren wird die vorgelegte Function rational machen, ohne darin imaginäre Größen einzuführen. Nach bewerkstelligter Integration wird

$$\sqrt{\frac{\gamma + \delta x}{\alpha + \beta x}}$$

statt z geschrieben.

In dem Falle, daß A und C negativ sind und zugleich

$$B^2 - 4AC < 0$$

ist, wird die Wurzelgröße beständig imaginär bleiben, mithin das Integral selbst imaginär werden. Man setze alsdann

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-Ax^2 - Bx - C}$$

und wende das eine oder das andere der oben angegebenen Verfahren an.

§. 87. Die einfachsten Anwendungen der auseinandergesetzten Methoden sind folgende.

1) Es sei

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}.$$

Man setze nach der ersten Transformationsmethode

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = z + x\sqrt{A}.$$

Dadurch kommt

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \int \frac{dz}{\frac{B}{2} + z\sqrt{A}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\, l\left(\frac{B}{2} + z\sqrt{A}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\, l\left(Ax + \frac{B}{2} + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + Bx + C}\right) + C.$$

Setzt man nach der zweiten Transformationsmethode

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = zx - \sqrt{C},$$

so findet man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = -2\int \frac{dz}{z^2 - A} = \frac{1}{2\sqrt{A}}\, l\left(\frac{z + \sqrt{A}}{z - \sqrt{A}}\right)^2,$$

welcher Ausdruck mit dem vorhergefundenen übereinstimmt.

In den besonderen Fällen, wo die gegebenen Differentiale sind

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ und } dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

erhält man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = l\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = l\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C.$$

2) Es sei

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2 + Bx + C}}.$$

Man mache

$$\sqrt{-Ax^2 + Bx + C} = xz + \sqrt{C}$$

Das Differential verwandelt sich dadurch in

$$dz = -\frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \frac{\frac{dz}{\sqrt{A}}}{1 + \frac{z^2}{A}},$$

wovon das Integral ist

$$y = - \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{z}{\sqrt{A}} \right) + C.$$

Wenn man für z seinen Ausdruck in x setzt, entsteht:

$$y = - \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{\sqrt{C} + \sqrt{-Ax^2 + Bx + C}}{x\sqrt{A}} \right) + C.$$

Wendet man die directe Transformation an, so verwandelt sich das gegebene Differential in

$$dy = - \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \frac{dz}{1 + z^2},$$

wovon das Integral ist:

$$y = - \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \text{arc} \left(\text{tang} = z \right) + C.$$

Setzt man für z seinen Werth, so kommt

$$y = - \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \text{arc} \left(\text{tang} = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}} \right) + C,$$

wo α und β die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - \frac{\beta}{A} x - \frac{C}{A} = 0$$

sind, oder

$$y = - \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \text{arc} \left(\text{tang} = \sqrt{\frac{-2Ax + B + \sqrt{4AC + B^2}}{2Ax - B + \sqrt{4AC + B^2}}} \right). \\ + C.$$

Diese beiden Ausdrücke für das gesuchte Integral y unterscheiden sich nur in dem Werthe der willkührlichen Constanten.

$$\text{Für } dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

gibt die erste der letzt erhaltenen zwei Integralformeln:

$$y = -2 \, \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) + C.$$

Bekanntlich ist aber

$$y = \text{arc} \left(\sin = x \right).$$

Beide Ausdrücke müssen demnach übereinstimmen, und in der That geben diese beiden Gleichungen, wenn arc $(\sin = x) = \varphi$ gesetzt wird,

d. h. $x = \sin\varphi$; $y = \text{const} - 2\,\text{arc}\left\{\text{tang} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right\} =$ $\text{const} - (\pi - \varphi)$ und $y = \text{const} + \varphi$, welche zwei Ausdrücke wegen der darin vorkommenden unbestimmten Constanten gleichbedeutend sind. Die zweite gedachter Integralformeln liefert:

$$y = -2\,\text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C\right)$$

oder

$$y = -\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C.$$

Daraus entspringt wie vorhin

$$y = \text{const} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

was von

$$y = \text{const} + \varphi$$

nur in dem Werthe der willkührlichen Constante sich unterscheidet.

3) Für $dy = dx\sqrt{a^2 - x^2}$ mache man

$$\sqrt{a^2 - x^2} = (a - x)\,z.$$

Daraus entsteht:

$$dy = -\frac{8a^2z^2dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{8a^2dz}{(1+z^2)^3} + \frac{8a^2dz}{(1+z^2)^2}.$$

Ferner durch Integration:

$$y = -\frac{2a^2z}{(1+z^2)^2} + \frac{a^2z}{1+z^2} + a^2\cdot\text{arc}\,(\text{tang} = z) + C,$$

oder wenn man für z seinen Werth in x zurücksetzt:

$$y = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\cdot\text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right) + C.$$

4) Durch einige Uebung erlangt man bald soviel Gewandtheit um das für jeden einzelnen Fall passende Verfahren einzuhalten. So z. B. könnte man um die Differentialfunction

$$dy = \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$$

zu integriren, auch folgendermaßen zu Werke gehen. Die theilweise Integration gibt:

$$\int\sqrt{a^2 + x^2}\cdot dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int x\cdot d\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{a^2+x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\cdot dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Folglich

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\cdot dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Das Integral

$$\int\sqrt{a^2+x^2}$$

ist sonach auf das von

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

zurückgeführt, dessen Werth

$$= l\,(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

gefunden wurde.

Ein ähnliches Verfahren auf

$$dy = \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

angewendet würde uns liefern:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) + C,$$

welches Resultat mit dem oben angegebenen zusammenfällt. Zuweilen erscheinen scheinbar imaginäre Kreisbögen, welche sich aber durch die in der algebraischen Analysis gegebenen Formeln auf reelle Logarithmen zurückbringen lassen, z. B.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{-1}\;\frac{\frac{dx}{\sqrt{-1}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{-1}}\right)^2}} =$$

$$\sqrt{-1}\cdot\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{-1}}\right) = l\,(x+\sqrt{1+x^2}).$$

§. 89. **Integration anderweitiger irrationaler Differentialfunctionen.** Um noch einige Beispiele von den Kunstgriffen zu geben, durch welche die Rationalität einer irrationalen Differentialfunction herbeigeführt wird, wollen wir folgende von Euler untersuchten Differentialausdrücke betrachten.

1) Es sei

$$dy = \frac{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}{a - cx^4} dx.$$

Um diese Formel rational zu machen, setze man

$$\sqrt{a + bx^2 + cx^4} = xz.$$

Daraus entsteht

$$dx = - \frac{x^3 zdz}{a - cx^4};$$

folglich

$$y = - \int \frac{x^4 z^2 dz}{(a - cx^4)^2}.$$

Ferner ist

$$a + cx^4 = (z^2 - b) x^2;$$

also

$$(a - cx^4)^2 = (a + cx^4)^2 - 4 acx^4 = [(z^2 - b)^2 - 4ac] x^4.$$

Hiernach wird

$$y = - \int \frac{z^2 dz}{(z^2 - b)^2 - 4ac};$$

wo die Integration keine weitere Schwierigkeit darbietet. Ist sie vollendet, so setzt man in dem Resultat statt z den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}{x}.$$

2) Auf dieselbe Weise läßt sich die allgemeine Formel:

$$dy = \frac{x^{n-2} \sqrt[n]{a + bx^n + cx^{2n}}}{a - cx^{2n}} \cdot dx$$

rational machen. Setzt man nämlich

$$\sqrt[n]{a + bx^n + cx^{2n}} = zx,$$

woraus

$$z^n = \frac{a + bx^n + cx^{2n}}{x^n};$$

so erhält man durch Differentiation

$$z^{n-1}dz = -\frac{dx\,(a-cx^{2n})}{x^{n+1}}.$$

Hieraus

$$dx = -\frac{z^{n-1}x^{n+1}}{a-cx^{2n}}\,dz$$

und

$$y = \int -\frac{z^n x^{2n}\,dz}{(a-cx^{2n})^2}.$$

Aus

$$a + cx^{2n} = (z^n - b)\,x^n$$

ergibt sich aber

$$(a-cx^{2n})^2 = [(z^n-b)^2-4ac]\,x^{2n}:$$

folglich

$$y = \int \frac{-z^n\,dz}{(z^n-b)^2-4ac},$$

welcher Ausdruck rational ist.

3) Um die irrationale Function

$$dy = \frac{dx}{(a+bx^n)\,\sqrt[2n]{a+2bx^n}}$$

rational machen, setze man

$$\frac{x}{\sqrt[2n]{a+2bx^n}} = z.$$

Geht man zu den Logarithmen über, so kommt

$$lz = lx - \frac{1}{2n}\,l\,(a+2bx^n),$$

woraus durch Differentiation entsteht:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}\cdot\frac{(a+bx^n)}{(a+2bx^n)}.$$

Die vorgelegte Formel verwandelt sich hiernach in:

$$dy = \frac{dz\,(a+2bx^n)}{(a+bx^n)^2}.$$

Aus

$$\frac{x}{\sqrt[2n]{a+2bx^n}} = z$$

folgt nun

$$a+2bx^n = \frac{x^{2n}}{z^{2n}};$$

diese Letztere gibt wieder

$$a^2 + 2\,bax^n = \frac{ax^{2n}}{z^{2n}},$$

oder, wenn man auf beiden Seiten b^2x^{2n} hinzufügt:

$$(a+bx^n)^2 = \frac{x^{2n}(a+b^2z^{2n})}{z^{2n}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht unsere Formel endlich in den rationalen Ausdruck

$$dy = \frac{dz}{a+b^2z^{2n}}$$

über.

4) Durch eine ähnliche Substitution läßt sich auch in der Differentialformel

$$dy = \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[3n]{a^2+3abx^n+3b^2x^{2n}}}$$

die Irrationalität wegbringen. Setzt man nämlich

$$z = \frac{x}{\sqrt[3n]{a^2+3\,abx^n+3\,b^2\,x^{2n}}},$$

geht dann zu den Logarithmen über; so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx\,(a+bx^n)^2}{x\,(a^2+3abx^n+3b^2x^{2n})}$$

Die vorgelegte Differentialformel verwandelt sich hiernach in

$$dy = \frac{dz\,(a^2+3abx^n+3b^2x^{2n})}{(a+bx^n)^3}.$$

Es ist aber

$$a^2 + 3abx^n + 3b^2x^{2n} = \frac{x^{3n}}{z^{3n}},$$

woraus, wenn auf beiden Seiten mit a multiplicirt und dann zu beiden Producten b^3x^{3n} addirt wird, entsteht:

$$(a+bx^n)^3 = \frac{x^{3n}\,(a+b^3x^{3n})}{z^{3n}}.$$

Durch Substitution dieses Werthes findet man endlich den rationalen Ausdruck:

$$dy = \frac{dz}{a + b^3 z^{3n}}.$$

§. 90. **Integration der binomischen Differentiale.** Mit diesem Namen werden gewöhnlich die Differentialfunctionen von der Form:

$$dy = dx \cdot x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

bezeichnet, wo a, b, m, n beliebige Constanten, hingegen p und q ganze Zahlen darstellen. Wegen ihres häufigen Vorkommens verdienen diese Functionen eine besondere Betrachtung. Der Allgemeinheit derselben geschieht im Uebrigen kein Eintrag, wenn man annimmt, daß auch m und n ganze Zahlen sind, und n selbst wesentlich positiv ganz ist. Denn mittelst einfacher Umformungen kann man jederzeit von dem allgemeinen Falle zu dem speciellen übergehen. Denn hat man z. B.:

$$dy = x^{\frac{1}{3}} (a + bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}} dx,$$

so mache man $x = z^6$, wodurch das vorgelegte Differential in

$$dy = 6z^7 (a + bz^3)^{\frac{p}{q}} dz$$

übergeht. Hat man ferner z. B.:

$$dy = x^{m-1} dx (a + bx^{-n})^{\frac{p}{q}},$$

so mache man $x = \frac{1}{z}$. Das gegebene Differential verwandelt sich dadurch in:

$$dy = -z^{-m-1} (a + bz^n)^{\frac{p}{q}} dz.$$

Es wäre mithin zunächst zu untersuchen, in welchen Fällen das Differential

$$dy = x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$$

rational gemacht werden können.

Man setze

$$a + bx^n = z^q.$$

Daraus entspringt:

$$x = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

und

$$dx = \frac{qz^{q-1}}{nb}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

Das vorgelegte Differential erhält so die Form:

$$dy = \frac{q}{nb}\, z^{p+q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} dz,$$

welche rational wird, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Man setze:

$$a + bx^n = x^n z^q.$$

Daraus entsteht:

$$x = \left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

und

$$x^{m-1}dx = -\frac{a^{\frac{m}{n}}\, q \cdot z^{q-1}\, dz}{n\,(z^q-b)^{\frac{m}{n}+1}}$$

Das gegebene Differential geht dergestalt in folgendes über:

$$dy = -\frac{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \cdot q \cdot z^{p+q-1}\, dz}{n(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}},$$

welches rational wird, wenn $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Zur Uebung mögen nachstehende Beispiele dienen.

Die zwei Beispiele:

$$dy = x^3\, dx\, (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$dy = x^8 dx (a + bx^3)^{\frac{7}{2}}$$

genügen der ersten Bedingung, während die beiden Beispiele:

$$dy = x^{-2}\, dx\, (a + x^3)^{-\frac{5}{3}}$$

und

$$dy = x^4\, dx\, (a + bx^3)^{\frac{1}{3}}$$

die zweite Bedingung erfüllen.

§. 91. **Reductionsformeln für die binomischen Differentiale.** Wenn das Differential

$$dy = dx \cdot x^{m-1}\, (a + bx^n)^p,$$

wo p jetzt einen Bruch bedeutet, nicht rational gemacht werden kann; so sucht man dasselbe auf eine einfachere Form zu bringen, indem man die Exponenten m oder p kleiner macht. Diese Reductionen werden mittelst der theilweisen Integration bewerkstelligt.

1) Wenn m positiv ist, so verkleinert man diesen Exponenten folgendermaßen. Man kann das Differential auch so:

$$x^{m-n} \cdot x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$$

schreiben, wo der Factor $x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$ integrirbar ist, was auch p sein mag. Es ergibt sich dann nach der Regel der theilweisen Integration:

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p-n)nb}$$

$$\frac{m-n}{(p+1)nb}\int dx \cdot x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}.$$

Allein

$$\int x^{m-n+1}dx\,(a+bx^n)^{p+1} = \int x^{m-n+1}dx\,(a+bx^n)^p\,(a+bx^n) =$$

$$a\int x^{m-n-1}dx\,(a+bx^n)^p + b\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p.$$

Die Substitution und Reduction gibt:

$$\left(1+\frac{m-n}{(p+1)nb}\right)\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^p =$$

$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - a\,(m-n)\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p}{(p+1)_{nb}}.$$

Daraus wird endlich abgeleitet

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p =$$

$$\frac{x^{m-n}\,(a+bx^n)^{p+1} - a\,(m-n)\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p}{b\,(m+np)}.$$

Mittelst dieser Gleichung wird das gesuchte Integral von einem anderen Integral von derselben Form abhängig gemacht, in welchem der Exponent m um die Zahl n kleiner ist. Bei Fortsetzung der nämlichen Operation kann man diesen Exponenten um das größte Vielfache von n, welches er in sich enthält, verringern.

2) Wenn p positiv ist, so verkleinert man diesen Exponenten, wie folgt. Man hat

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}\cdot(a+bx^n).$$

Die vorhin gefundene Formel gibt aber, wenn man darin m in m+n und p in p—1 verwandelt:

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^p - am\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{b(m+np)}$$

Substituirt man diesen letzten Werth in die vorhergehende Gleichung; so bekommt man die Gleichung

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^p+pna\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{p-1}}{pn+m},$$

mit Hülfe deren der Exponent n um die größte ganze Zahl, die er enthalten mag, verringert werden kann.

Um zu zeigen, wie die zwei gefundenen Formeln nach einander angewendet werden müssen, um ein gesuchtes Integral zu erhalten, wollen wir annehmen, daß $x^6\,dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}$ zu integriren sei. Die erste Form liefert nach einander:

$$\int x^6\,dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^5}{10b}(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{a}{2b}\int x^4\,dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}};$$

$$\int x^4\,dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^3}{8b}(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{3a}{8b}\int x^2\,dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}};$$

$$\int x^2\,dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{6b}(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{a}{6b}\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Die zweite Formel gibt aber nach einander:

$$\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{4}(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3a}{4}\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Es ist aber

$$\int\frac{dx}{(a+bx^2)} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\log\left(2\sqrt{b(a+bx^2)}-2bx\right)+C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b}}\log\left[(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{b}\cdot x\right]+C,$$

wenn $-\frac{1}{\sqrt{b}}\log 2\sqrt{b}$ der Constanten hinzugefügt wird.

Durch successive Substitutionen kommt man endlich zum gesuchten Integral:

$$\int x^6\,dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{x^5}{10b}-\frac{ax^3}{10b^2}+\frac{3a^2x}{2\cdot 486^3}\right)(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{3a^3x}{16\cdot 24b^3}(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{9a^4x}{3\cdot 16^2b^3}(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{9a^5}{3\cdot 16^2b^3\sqrt{b}}\log\left[(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{b}\cdot x\right)+C.$$

3) Wenn der Exponent m negativ ist, so verfährt man auf folgende Weise. Aus der ersten der oben stehenden Reductionsformeln erhält man:

$$\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - b(m+np)\int dx\,x^{m-1}(a+bx^n)^p}{a\,(m-n)}\,;$$

woraus, wenn man $-m+n$ an die Stelle von m setzt, die dritte Reductionsformel entspringt:

$$\int x^{-m-1}(a+bx^n)^p = -\,\frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1} + (m-n-np)b\int dx\cdot x^{-m+n-1}(a+bx^n)^p}{ma}$$

Wenn der Exponent p negativ ist, so bekommt man aus der zweiten der obenstehenden Reductionsformeln:

$$\int dx\cdot x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1} = -\,\frac{x^m(a+bx^n)^p - (m+np)\int dx\cdot x^{m-1}(a+bx^n)^p}{npa}\,;$$

woraus; wenn man $-p+1$ statt p setzt, folgende vierte Reductionsformel entsteht:

$$\int dx\cdot x^{m-1}(a+bx^n)^{-p} = \frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1} - (m+n-np)\int dx\cdot x^{m-1}(a+bx^n)^{-p+1}}{(p-1)\,na}$$

Zur Anwendung dieser zwei Reductionsformeln diene das Beispiel:

$$y = \int x^{-4}\,dx\,(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Die dritte Reductionsformel führt dieses Integral nach einander zurück auf:

$$\int x^{-2}\cdot dx(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}},\ \int dx(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}},$$

für welches letztere Integral die vierte Reductionsformel liefert:

$$\frac{x\,(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}}{a}.$$

Durch Zusammenfassung der einzelnen Resultate kommt:

$$\int x^{-4}\,dx\,(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}}{3a}\left(\frac{8b^2}{a^2}\,x - \frac{4b}{ax} - \frac{1}{x^3}\right).$$

Zu bemerken ist noch, daß die hier aufgestellten vier Reductionsformeln für die Fälle, in welchen die Nenner verschwinden, unbrauchbar werden. In diesen Fällen läßt sich aber das fragliche Integral auf Monome oder rationale Brüche zurückführen, was unsere Reductionsformeln ohnehin entbehrlich macht.

§. 92. **Beispiele.** Mit Hülfe der vorstehenden Reductionsformeln lassen sich folgende Resultate herleiten, die in den mannigfaltigen Anwendungen der Integralrechnung häufig gebraucht werden.

I. Es sei

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

zu finden, wenn m eine positive ganze Zahl ist.

Die erste der Reductionsformeln liefert:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-2}\sqrt{1 - x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m-3}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

oder wenn m statt m—1 gesetzt wird:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1 - x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Setzt man nun in dieser Formel zuerst für m die auf einander folgenden ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 ···; so erhält man:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1 - x^2};$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\tfrac{1}{3}x^2\sqrt{1 - x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{5}x^4\sqrt{1 - x^2} + \frac{4}{5}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\tfrac{1}{7}x^6\sqrt{1 - x^2} + \frac{6}{7}\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

u. s. w.,

woraus, wenn für die letzten Integrale deren Werthe aus den vorhergehenden Gleichungen substituirt werden, entspringt:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1\cdot2}{1\cdot3}\right)\sqrt{1-x^2};$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{1\cdot4}{3\cdot5}x^2 + \frac{1\cdot2\cdot4}{1\cdot3\cdot5}\right)\sqrt{1-x^2};$$

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{7}x^6+\frac{1\cdot6}{5\cdot7}x^4+\frac{1\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}x^2+\frac{1\cdot2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\right)\sqrt{1-x^2}$$

u. s. w.

Setzt man ebenso für m nach und nach die geraden Zahlen 2, 4, 6 ...; so erhält man aus derselben Formel:

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{4}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{6}\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

u. s. w.

Daraus entsteht, wenn man bemerkt, daß

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc}\,(\sin=x):$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\tfrac{1}{2}\,\text{arc}\,(\sin=x)+C;$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\text{arc}(\sin=x)+C;$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1\cdot5}{4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\,\text{arc}\,(\sin=x)+C;$$

u. s. w.

II. Es sei

$$\int\frac{dx}{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}$$

zu bestimmen.

Die dritte der Reductionsformeln gibt:

$$\int\frac{dx}{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{m\,x^m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}},$$

oder wenn m statt m + 1 geschrieben wird:

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}.$$

In dieser Formel darf nicht m = 1 gesetzt werden, weil dadurch die Nenner zum Verschwinden kommen. Man muß deßhalb das Integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

auf einem anderen Wege zu ermitteln suchen, was keine Schwierigkeit hat. Setzt man nämlich

$$1 - x^2 = z^2,$$

so hat man

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{-dz}{1-z^2} = -\frac{1}{2} \cdot l\,\frac{1+z}{1-z}$$

$$= -\frac{1}{2}\, l \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) + C;$$

aber auch

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C.$$

Setzt man nun in der Formel für m die auf 1 folgenden ungeraden Zahlen; so bekommt man:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4\,x^4} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}};$$

u. s. w.,

oder

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\,x^2} - \frac{1}{2}\, l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4x^2}\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\, l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

$$+ C. \quad \text{u. s. w.}$$

Ebenso wird, wenn für m die geraden Zahlen 2, 4, 6 . . . gesetzt werden:

$$\int\frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C;$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3\,x^3} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5\,x^5} + \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}};$$

u. s. w.,

oder

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3x^3} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3\,x}\right)\sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{5x^5} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5x^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5x}\right)\sqrt{1-x^2} + C;$$

u. s. w.

III. Um das Integral von

$$\frac{x^m\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = x^{m-\frac{1}{2}}\,dx\,(2a-x)^{-\frac{1}{2}}$$

zu finden kann man die erste Reductionsformel gebrauchen, oder direct auf folgende Weise verfahren.

Es ist

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{2\,ax-x^2}} = \int\frac{x^{m-1}\,(x-a)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} + 2\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Mittelst der theilweisen Integration erhält man

$$\int\frac{x^{m-1}\,(x-a)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}dx\sqrt{2ax-x^2}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2} + (m-1)\int\frac{x^{m-2}\,dx\,(2\,ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2} + (m-1)\,2a\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$-(m-1)\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{2\,ax-x^2}}.$$

Indem man diesen Werth in die obige Gleichung substituirt und reducirt, bekommt man:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m} + \frac{(2m-1)a}{m}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Nach dieser besonderen Reductionsformel gelangt man, wenn m eine ganze positive Zahl ist, zuletzt auf

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{a-x}{a}\right) + C.$$

IV. Auf demselben Wege oder mittelst der dritten Reductionsformel erhält man auch noch folgende specielle Reductionsformel:

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{(2m-1)ax^m}$$

$$+\frac{(m-1)}{(2m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}$$

III. Integration transcendenter Differentiale.

1. Differentiale mit Logarithmen und Exponentialgrößen.

§. 93. **Logarithmische Differentiale.** Um die transcendenten Differentiale, d. h. diejenigen Differentiale, welche logarithmische und goniometrische Functionen oder deren Umkehrungen in sich enthalten, zu integriren, besitzen wir keine allgemeine Methode. Man sucht dergleichen Differentiale durch Substitution der Variabeln in algebraische zu verwandeln oder auf einfachere Integrale derselben Gattung zurückzuführen. So z. B. kann man die Integrale

$$\int f(lx)\,\frac{dx}{x},\quad \int f(e^x)\,e^x\,dx,$$

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx,\quad \int f[\text{arc}(\text{tang} = x)] \cdot \frac{dx}{1+x^2},$$

wo das Zeichen f eine algebraische Function derjenigen Größen anzeigt, welche unter diesem Zeichen stehen, algebraisch machen, wenn man

beziehungsweise

$$lx,\ e^x,\ \sin x,\ \mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x), = z$$

setzt.

Von den verschiedenen Reductionsformeln, welche man anwendet, um die Integration der transcendenten Differentiale auf die von einfacheren Functionen abhängig zu machen, wollen wir nun die wichtigeren mittheilen, indem wir mit dem logarithmischen Differential

$$x^m\ (l\,x)^n\ d\,x$$

den Anfang machen.

Die theilweise Integration liefert:

$$\int x^m dx (lx)^n = \frac{x^{m+1}(lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m\ dx\ (lx)^{n-1}.$$

Durch Verwandlung von n in n—1 entsteht:

$$\int x^m dx (lx)^{n-1} = \frac{x^{m+1}(lx)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int x^m\ dx\ (lx)^{n-2}.$$

Setzt man diese Reductionen fort, so entspringt folgende allgemeine Formel:

$$\int x^m dx (lx)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left((lx)^n - \frac{n}{m+1}(lx)^{n-1} + n\frac{(n-1)}{(m+1)^2}(lx)^{n-2} + \text{ꝛc.}\right)$$

welche so oft schließt, als n eine ganze positive Zahl ist.

Ist m = — 1, so wird die Formel unbrauchbar; allein nach dem oben Gesagten hat man alsdann

$$\int \frac{dx}{x}\ (lx)^n = \frac{1}{n+1}(lx)^{n+1} + C.$$

Für m = 0 gibt die Formel

$$\int dx (lx)^n = x(lx)^n \left(1 - \frac{n}{lx} + n\frac{(n-1)}{(lx)^2} \cdots \pm n\frac{(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(lx)^n}\right) + C.$$

Wenn n keine positive ganze Zahl ist, so wird die vorige Reductionsformel unbrauchbar, indem dieselbe jenen Exponenten vermehrt. Man schlägt darum folgenden Weg ein. Es ist nämlich

$$\int \frac{x^m\ dx}{(lx)^n} = \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{1}{(lx)^n} \cdot x^{m+1};$$

woraus mittelst der theilweisen Integration entspringt:

$$\int \frac{x^m\, dx}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\, dx}{(lx)^{n-1}}.$$

Durch Wiederholung dieser Reduction ergibt sich folgende Formel:

$$\int \frac{x^m\, dx}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)\, x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}$$

$$- \frac{(m+1)^2\, x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} \cdots + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{x^m dx}{lx}.$$

Wir sind hier genöthigt stehen zu bleiben, weil für $n = 1$ die letzte Formel nicht mehr zulässig ist. Das Integral

$$\int \frac{x^m\, dx}{lx}$$

kann man übrigens auf eine einfachere Form bringen, wenn man setzt

$$x^{m+1} = z.$$

Wir erhalten dann

$$\int \frac{x^m dx}{lx} = \int \frac{dz}{lz} = \int \frac{e^u\, du}{u},$$

wo $lz = u$ oder $z = e^u$.

Ist überdies $m = -1$, so hat man unmittelbar nach dem oben Gesagten

$$\int \frac{dx}{x} \cdot \frac{1}{(lx)} = \int \frac{d\,(lx)}{lx} = l\,(lx) + C.$$

Wir hätten uns also zunächst mit der Betrachtung des Integrals $\int \frac{dx}{lx}$ zu beschäftigen, was weiter unten geschehen soll, nachdem wir zuvörderst Einiges über die Integration der Differentiale, welche Exponentialgrößen und goniometrische Functionen enthalten, mitgetheilt haben.

§. 94. **Differentiale mit Exponentialgrößen.** Auch in diesen Fällen wird man am häufigsten seine Zuflucht zu der theilweisen Integration nehmen. Auf diese Art bekommt man für

$$\int x^n\ a^x\ dx$$

die Gleichung:

$$\int a^x dx \cdot x^n = \frac{a^x \cdot x^n}{la} - \frac{n}{la}\int a^x\, x^{n-1}\, dx.$$

Indem man auf gleiche Weise mit $a^x\,dx \cdot x^{n-1}$ verfährt, und dies so fortsetzt, gelangt man, wenn n eine positive ganze Zahl ist, zu:

$$\int a^x x^n\,dx = a^x\left(\frac{x^n}{la} - \frac{nx^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(la)^3} \dots \pm \frac{n(n-1)\dots 1}{(la)^{n+1}}\right) + C.$$

Aus dieser Formel erhellt die Möglichkeit, das Integral von $f(x)a^x\,dx$ entwickeln zu können, wenn f (x) von der Form $A + Bx + Cx^2 \dots$ ist.

Wenn der Exponent n negativ ist, hat man zunächst

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int \frac{a^x\,dx}{x^{n-1}};$$

ferner nach fortgesetzter Wiederholung desselben Verfahrens:

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{(la)}{(n-2)x^{n-2}} + \frac{(la)^2}{(n-2)(n-3)x^{n-3}}\right.$$

$$\left.\dots + \frac{(la)^{n-2}}{(n-2)\dots 1.x}\right) + \frac{(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots!}\int \frac{a^x\,dx}{x}.$$

Es läßt sich keine weitere Reduction anbringen, und wir wären somit wieder auf das im vorigen Paragraphen aufgeführte Integral

$$\int \frac{a^x\,dx}{x}$$

verfallen. Auf das Letztere wird jederzeit das Integral $\int f(x)\,a^x\,dx$ zurückgeführt, wenn f (x) die Form $A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \dots$ hat.

Ist n eine gebrochene Zahl, so sind die beiden Entwickelungen unbegrenzt. Für $n = -\frac{1}{2}$ z. B. liefert die erste die Reihe:

$$\int \frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{a^x}{la\,\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2x\,la} + \frac{1 \cdot 3}{4x^2(la)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8x^3(la)^3} \dots\right) + C;$$

während die Zweite gibt

$$\int \frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}} = 2a^x\sqrt{x}\left(1 - \frac{2x(la)}{1 \cdot 3} + \frac{4x^2(la)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{8x^3(la)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots\right) + C.$$

Diese beiden Reihen, deren letztere für große, die andere für kleine Werthe von 2x la gebraucht wird, müssen, wenn sie beziehungsweise

bei den Gliedern

$$\frac{2a^x\sqrt{x}\cdot(2x\,la)^n}{1\cdot3\cdots(2n+1)},\quad \frac{a^x}{la\sqrt{x}}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n+1)}{(2x\,la)^{n+1}}$$

abgebrochen werden, noch die Ergänzungen

$$-\frac{(2x\,la)^{n+1}}{1\cdot2\ldots(2n+1)}\int a^x x^{n+\frac{1}{2}}\,dx,$$

$$\frac{1\cdot3\cdots(2n+3)}{(2\,x\,la)^{n+2}}\int\frac{a^x}{x^{n+\frac{3}{2}}}\,dx$$

erhalten. Bei der Lehre von den bestimmten Integralen werden wir Mittel kennen lernen, zu zeigen, daß die zweite Reihe, wenn x im Integrationsintervall nicht unendlich wird, ohne Ergänzungsglied bis ins Unendliche fortgesetzt werden darf, daß aber die erste, als divergent, mit dem kleinsten Fehler an ihrem kleinsten Gliede angehalten werden kann.

Ueberhaupt wird man in allen übrigen Fällen, wo Integrale von anderen als den hier betrachteten Formen sind, in letzter Instanz immer zu einer Reihenentwickelung schreiten müssen. Es mag hinreichend sein, dies an einem Beispiele zu zeigen. Es sei

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,e^x\,dx$$

zu bestimmen. In dem Falle, daß $x < 1$, wird man die dem Integral gleichgeltende Reihe

$$\int\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6\ldots\right)e^x\,dx$$

nehmen, und die einzelnen Glieder mittelst der ersten der obenstehenden allgemeinen Formel behandeln. — Im Falle aber $x > 1$, wird man

$$x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

statt

$$\sqrt{1+x^2}$$

setzen, und dem Integral folgende Form geben:

$$\int\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{1}{x^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{x^6}+\ldots\right)\,e^x\,dx,$$

und alsdann die einzelnen Glieder mittelst der zweiten allgemeinen Formel behandeln.

2. Goniometrische und cyclometrische Differentiale.

§. 95. **Goniometrische Differentiale.** Differentiale, in denen nur goniometrische Functionen vorkommen, lassen sich leicht auf eine algebraische Form bringen. So z. B. verwandelt sich das Integral

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx,$$

wenn

$$\sin x = z$$

gesetzt wird, in

$$\int f(z, \sqrt{1 - z^2}) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

wodurch die Aufgabe auf eine früher behandelte zurückgeführt ist. Es ist jedoch häufig bequemer mit dergleichen Differentialen solche Reductionen vorzunehmen, daß darin die goniometrischen Functionen verbleiben, wie wir dies an dem öfters vorkommenden Integral

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

thun wollen, wo m und n beliebige positive oder negative Zahlen bedeuten. Wenn der Exponent m positiv ist, so verkleinert man diesen Exponenten, ohne n zu vergrößern, indem man berücksichtigt, daß

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cdot \cos^n x \sin x \, dx.$$

Daraus entsteht

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx,$$

oder insofern man erwägt, daß

$$\cos^{n+2} x = \cos^n x (1 - \sin^2 x)$$

ist und reducirt:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx.$$

Wenn der Exponent n positiv ist, so verringert man diesen Exponenten ohne m zu vergrößern, indem man auf dieselbe Weise mit cos x verfährt, wie soeben mit sin x verfahren wurde. Man erhält so die Gleichung:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Wenn der Exponent m negativ ist, so zieht man aus der ersten der gefundenen Gleichungen:

$$\int dx \sin^{m-2} x \cos^n x = \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} \int \sin^m x \cos^n x,$$

woraus, wenn man m in $-m+2$ umwandelt, entspringt:

$$\int \frac{dx \cos^n x}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos^n x \, dx}{\sin^{m-2} x}.$$

Wenn der Exponent n negativ ist, so hat man aus der zweiten Gleichung:

$$\int dx \sin^m x \cos^{n-2} x = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1} \int dx \sin^m x \cos^n x;$$

woraus, wenn n mit $-n+2$ vertauscht wird, entsteht:

$$\int dx \frac{\sin^m x}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{dx \sin^m x}{\cos^{n-2} x}.$$

§. 96. **Gebrauch der vorstehenden Formeln.** Mittelst dieser Formeln wird das Integral

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

zuletzt auf ein Integral von derselben Form zurückgeführt, in welchem die Exponenten m und n nicht außerhalb der Zahlen -1 und $+1$ liegen. Sind die Exponenten m und n positive oder negative Zahlen, so führt die Integration schließlich immer auf eines der folgenden Integrale:

$$\int dx = x + C; \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$\int dx \cos x \sin x = \tfrac{1}{2} \sin^2 x + C; \quad \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -l \cos x + C;$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = l \sin x + C; \quad \int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = l \operatorname{tang} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = l \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = l \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Unter den besonderen Fällen, welche in den oben gefundenen Gleichungen mit inbegriffen sind, verdienen die folgenden hervorgehoben zu werden:

a) Für gerade n:

$$1)\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n}\left(\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\sin^{n-5}x + .. + \frac{(n-1)(n-3)...3}{(n-2)(n-4)...2}\sin x\right)$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}x + C.$$

$$2)\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x}{n}\left(\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x ... + \frac{(n-1)(n-3)...5\cdot 3\cos x}{(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}\right) + \frac{(n-1)(n-3)...3\cdot 1}{n(n-2)\ldots 4\cdot 2}x + C.$$

$$3)\int \tang^n x\,dx = \frac{\tang^{n-1}x}{n-1} - \frac{\tang^{n-3}x}{n-3} + \frac{\tang^{n-5}x}{n-5} - ... \pm \tang x \mp x + C.$$

$$4)\int \cotg^n x\,dx = -\frac{\cotg^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cotg^{n-3}x}{n-3} - \frac{\cotg^{n-5}x}{n-5} + ... \pm \cotg x \mp x + C.$$

$$5)\ \sec^n x\,dx = \frac{\sin x}{n-1}\left(\sec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x + \ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2\sec x}{(n-3)(n-5)\ldots 3\cdot 1}\right) + C.$$

$$6)\int \cosec^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left(\cosec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\cosec^{n-3}x + \ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}{(n-3)(n-5)\ldots 3.1}\cosec x\right) + C.$$

b) Für ungerade n:

$$1)\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n}\left(\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)...4\cdot 2}{(n-2)(n-4)...3\cdot 1}\right) + C.$$

$$2)\ \int\cos^n x\,dx = \frac{\sin x}{n}\left(\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1}\right) + C.$$

$$3)\ \int\tang^n x\,dx = \frac{\tang^{n-1}x}{n-1} - \frac{\tang^{n-3}x}{n-3} + \frac{\tang^{n-5}z}{n-5}$$

$$\ldots \pm \frac{\tang^2 x}{2} \pm \tfrac{1}{2}\,l\cos^2 x + C.$$

$$4)\ \int\cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5}x}{n-5} +$$

$$\ldots \mp \frac{\cot^2 x}{2} \mp \tfrac{1}{2}\,l\sin^2 x + C.$$

$$5)\ \int\sec^n x\,dx = \frac{\sin x}{n-1}\left(\sec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x + \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(n-2)\ldots 5\cdot 3}{(n-3)\ldots 4\cdot 2}\sec^2 x\right) + C.$$

$$+ \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1}{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}\cdot\tfrac{1}{2}\,l\tang^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$$6)\ \int\cosec^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left(\cosec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\cosec^{n-3}x + \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(n-2)\ldots 5\cdot 3}{(n-3)\ldots 4\cdot 2}\cosec^2 x\right) + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1}{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}\,\tfrac{1}{2}\,l\tang^2\tfrac{1}{2}x.$$

$$+ C.$$

Nimmt man in der dritten Formel des vorhergehenden Paragraphen auch n negativ und in der vierten Formel desselben Paragraphen ebenfalls m negativ; so erhält man

$$\int\frac{dx}{\cos^n x\sin^m x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin^{m-2}x\cos^n x}$$

und

$$\int\frac{dx}{\cos^n x\sin^m x} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}.$$

Mittelst der ersten dieser beiden Formeln läßt sich das Integral, je nachdem m eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist, auf

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} \text{ oder } \int \frac{dx}{\sin x \cos^n x}$$

zurückführen. Im ersten Falle ist das fragliche Integral als gefunden zu betrachten, weil

$$\int \frac{dx}{\cos^n x}$$

bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der zweiten der beiden obigen Formeln das Integral

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^n x},$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, auf

$$\int \frac{dx}{\sin x} \text{ oder } \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

zurückzuführen. Weil diese beiden letzteren Integrale bekannt sind, so ist auch in dem zweiten Falle das gesuchte Integral als gefunden anzusehen. Man hätte dieses Integral auch mittelst der zweiten der beiden obigen Formeln, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, auf

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} \text{ oder } \int \frac{dx}{\sin^m x \cos x}$$

zurückführen können. In dem einen wie in dem andern Fall ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil das Integral

$$\int \frac{dx}{\sin^m x}$$

bekannt ist, und das Integral

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos x}$$

mittelst der ersten der beiden obigen Formeln, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist, sich auf

$$\int \frac{dx}{\cos x} \text{ oder } \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

zurückführen läßt. — Für m = n hat man

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^m x} = 2^m \int \frac{dx}{\sin^m 2x} = 2^{m-1} \int \frac{d(2x)}{\sin^m 2x},$$

welcher Ausdruck nach den gegebenen Vorschriften behandelt werden kann.

Wir wollen noch bemerken, daß sich die Differentiale dieser Gattung auch dadurch integriren lassen, daß man für $\sin^m x$ und $\cos^n x$ ihre Ausdrücke in Sinus und Cosinus vielfacher Bogen setzt, welche in den Paragraphen 143 und 144 der algebraischen Analysis entwickelt worden sind. Diese Ausdrücke liefern eine geschlossene Anzahl von Gliedern, sobald m und n positive ganze Zahlen sind.

So hat man

$$\int\cos^5 x\,dx = \int\left(\frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x\right)dx =$$

$$\frac{1}{80}\sin 5x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x + C.$$

$$\int\sin^3 x\,dx = \int\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)dx =$$

$$-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C.$$

Für die Integrale

$$\int dx \sin nx \cos mx, \quad \int dx \cos nx \cos mx,$$

und

$$\int dx \sin nx \sin mx$$

erhält man, wenn man die goniometrischen Relationen

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta);$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta);$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta);$$

benutzt:

$$\int dx \sin nx \cos mx = -\frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} - \frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} + C;$$

$$\int dx \cos nx \cos mx = \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} + C;$$

$$\int dx \sin nx \sin mx = \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + C.$$

Für

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$$

erhält man hiernach:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{8} \int \Big(3 \cos x + \cos 3 x - 3 \cos x \cos 2 x$$

$$- \cos 2 x \cos 3 x \Big) dx$$

$$= \frac{1}{8}\Big[3 \sin x + \frac{1}{3} \sin 3 x - \frac{1}{2} \sin 3 x + \frac{3}{2} \sin x$$

$$- \frac{1}{10} \sin 5 x - \frac{1}{2} \sin x\Big] + C.$$

$$= \frac{1}{8} \left(\sin x - \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{10} \sin 5 x\right) + C.$$

§. 97. **Die Integralausdrücke** $\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n}$. Die Methode, die Integration goniometrischer Differentiale auf die algebraischer Differentiale zurückzuführen, wird auf das in der theoretischen Astronomie häufig vorkommende Integral

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

mit Vortheil angewendet. Man kommt am bequemsten zum Ziele, wenn man setzt

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2};$$

dadurch wird

$$\sin x = \frac{2 z}{1 + z^2} \text{ und } dx = \frac{2 dz}{1 + z^2}.$$

Es ist mithin

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = 2 \int \frac{dz}{a+b+(a-b) z^2}.$$

Für den Fall, daß $a > b$ haben wir

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot z\right)$$

$$+ C.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \text{tang} \tfrac{1}{2} x\right) + C,$$

weil $z = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \text{tang} \tfrac{1}{2} x$ ist.

Für den Fall, daß $a < b$ finden wir

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot l \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a} \cdot z}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} \cdot z} + C =$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot l \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}.$$

Für $a = b$ lassen sich diese Formeln nicht unmittelbar anwenden. Es ist aber alsdann:

$$a + b \cos x = a (1 + \cos x) = 2 a \cos^2 \tfrac{1}{2} x.$$

Folglich

$$\int \frac{dx}{a(1 + \cos x)} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{1}{2}x)}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{a} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x + C.$$

Sehr leicht lassen sich die Integrale

$$\int \frac{\sin x \, dx}{a + b \cos x} \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos x \, dx}{a + b \cos x}$$

bestimmen. Es ist nämlich

$$\int \frac{\sin x \, dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b} \int \frac{d(a + b \cos x)}{a + b \cos x}$$

$$= -\frac{1}{b} \, l (a + b \cos x) + C.$$

Ferner ist

$$\int \frac{\cos x \, dx}{a + b \cos x} = \int dx \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b (a + b \cos x)} \right)$$

$$= \frac{x}{b} - \frac{1}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x} + C;$$

wodurch das gesuchte Integral auf das früher behandelte zurückgeführt ist.

Wir gehen nun zu dem allgemeineren Integral

$$\int \frac{(f + g \cos x) \, dx}{(a + b \cos x)^n}$$

über, wobei n eine ganze Zahl ist. Um eine bequeme Reductionsformel zu erhalten, bedienen wir uns eines von Euler gebrauchten

Kunstgriffes, indem wir setzen:

$$\int \frac{(f+g\cos x)dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{(B+C\cos x)\,dx}{(a+b\cos x)^{n-1}};$$

worin A, B, C unbestimmte Coefficienten sind, welche dergestalt ermittelt werden müssen, damit der aufgestellten Relation Genüge geschehe. Man differentiirt zu diesem Behuf dieselbe, dividirt durch dx und schafft die Nenner weg. Man bekommt dadurch folgende Gleichung:

$$f + g\cos x = A\cos x\,(a + b\cos x) + (n-1)\,Ab\,(1 - \cos^2 x) \\ + (B + C\cos x)\,(a + b\cos x).$$

Um die verlangte Identität herzustellen, ergeben sich daraus folgende drei Gleichungen:

$$(n-1)\,Ab + Ba - f = 0,$$
$$Aa + Bb + Ca - g = 0,$$
$$C - (n-2)\,A = 0.$$

Aus diesem letzteren entspringt:

$$A = \frac{ag - bf}{(n-1)(a^2-b^2)};\ B = \frac{af-bg}{a^2-b^2};\ C = \frac{(n-2)(ag-bf)}{(n-1)(a^2-b^2)}.$$

Dergestalt ergibt sich folgende Reductionsformel:

$$\int \frac{(f+g\cos x)\,dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{(ag-bf)\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)} \int \frac{(n-1)(af-bg)dx + (n-2)(ag-bf)\cos x \cdot dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

wodurch man zuletzt auf Ausdrücke von der Form:

$$\int \frac{\alpha\,dx}{a+b\cos x} \text{ und } \int \frac{\beta\cos x\,dx}{a+b\cos x}$$

geleitet wird, deren Integrale nach dem Vorhergehenden bekannt sind.

Für den Fall, daß $a = b$ ist, hat man unmittelbar

$$\int \frac{(f+g\cos x)\,dx}{a^n(1+\cos x)^n} = \frac{f-g}{a^n}\int \frac{dx}{(1+\cos x)^n} + \frac{g}{a^n}\int \frac{dx}{(1+\cos x)^{n-1}}$$

$$= \frac{f-g}{a^n \cdot 2^{n-1}} \int \frac{d\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos^{2n}\left(\frac{1}{2}x\right)} + \frac{g}{2^{n-2}\,a^n} \cdot \int \frac{d\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos^{2n-2}\left(\frac{1}{2}x\right)},$$

wodurch das gesuchte Integral auf das in §. 95 betrachtete zurückgeführt ist.

§. 98. **Die Integralausdrücke** $\int x^n \sin x\, dx$ **und** $\int x^n \cos x\, dx$. Wendet man auf das Integral $\int x^n \sin x\, dx$ die Methode der theilweisen Integration an, so erhält man:

$$\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\, dx.$$

Indem man dieselbe Regel für das Integral

$$\int x^{n-1} \cos x\, dx$$

benutzt, hat man wieder:

$$\int x^{n-1} \cos x\, dx = x^{n-1} \sin x - (n-1)\int x^{n-2} \sin x\, dx.$$

Setzt man das Verfahren weiter fort, so findet man endlich:

$$\int x^n \sin x dx = -\cos x[x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - ..]$$
$$- \sin x\,[nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots],$$

welche Reihe abbricht, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Ganz auf dieselbe Weise bestimmt man auch das zweite Integral

$$\int x^n \cos x\, dx,$$

für welches man erhält:

$$\int x^n \cos x\, dx = \sin x\,[x^n - n(n-1)\,x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\ldots]$$
$$+ \cos x\,[nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)\,x^{n-3} - \ldots].$$

Wäre n eine negative ganze Zahl, so würde man mit den vorstehenden Reductionen nicht ans Ziel gelangen. Die Methode der theilweisen Integration liefert uns in diesem Falle:

$$\int \frac{dx \sin x}{x^n} = -\frac{\sin x}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$
$$- \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\sin x\, dx}{x^{n-2}}$$

und

$$\int \frac{dx \cos x}{x^n} = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$
$$- \frac{1}{(n-1)\,(n-2)}\int \frac{\cos x\, dx}{x^{n-2}}.$$

Indem dergestalt mit der Verminderung von n fortgefahren wird, reducirt man die zwei gesuchten Integrale auf einen der beiden Ausdrücke

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ und } \int \frac{\cos x}{x}\, dx.$$

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß die Integrale von den Formen

$$\int f(x) \sin x \, dx \quad \text{und} \quad \int f(x) \cos x \, dx$$

sich in geschlossener Gestalt bewerkstelligen lassen, wenn f (x) von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ ist, und daß sie auf die von

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \text{ und } \int \frac{\cos x}{x} dx$$

zurückkommen, wenn f (x) die Form

$$A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots$$

hat.

Ist der Exponent n eine gebrochene positive oder negative Zahl, so läßt sich derselbe mit Hülfe der vorstehenden Formeln zwar verkleinern oder vergrößern; man wird aber immer zuletzt zu dem Integriren mittelst Reihen seine Zuflucht nehmen müssen.

§. 99. **Die Integralausdrücke** $\int e^{ax}\sin^n bx \, dx$ und $\int e^{ax}\cos^n bx \, dx$, worin a und b beliebige Constanten bezeichnen, und n als eine positive ganze Zahl vorausgesetzt wird. **Die theilweise Integration gibt** für den ersteren Ausdruck:

$$\int e^{ax}\sin^n bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}\sin^n bx - \frac{nb}{a} \int e^{ax} \sin^{n-1} bx \cos bx \, dx.$$

Eine weitere theilweise Integration liefert

$$\int e^{ax}\sin^{n-1}bx \cos bx \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax}\sin^{n-1}bx \cos bx \, dx - \frac{b}{a} \int (n-1) \, e^{ax} \sin^{n-2} bx \cos^2 bx \, dx$$

$$+ \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin^n bx \, dx$$

oder

$$\int e^{ax}\sin^{n-1}bx \cos bx \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax}\sin^{n-1} bx \cos bx - (n-1) \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx \cdot dx$$

$$+ \frac{nb}{a} \int e^{ax} \sin^n bx \, dx.$$

Indem man diesen Ausdruck mit dem ersteren verbindet, ergibt sich nach einfacher Reduction:

$$\int e^{ax}\sin^n bx\cdot dx = \frac{a \sin bx - nb \cos bx}{a^2+n^2b^2} e^{ax} \sin^{n-1} bx$$

$$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx\cdot dx.$$

Ein völlig analoges Verfahren führt zu einer Reductionsformel für das zweite Integral

$$\int e^{ax} \cos^n bx\cdot dx.$$

Es ist nämlich zuvörderst:

$$\int e^{ax} \cos^n bx\cdot dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax}\cos^n bx + \frac{nb}{a} \int e^{ax}\cos^{n-1}bx \sin bx\, dx.$$

Ferner ist:

$$\int e^{ax}\cos^{n-1}bx \sin bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos^{n-1} bx \sin bx$$

$$- \frac{nb}{a} \int e^{ax} \cos^n bx\cdot dx + \frac{(n-1)}{a} b \int e^{ax} \cos^{n-2} bx\cdot dx$$

Durch Substitution dieses Werthes in den vorhergehenden Ausdruck und Reduction entspringt:

$$\int e^{ax} \cos^n bx\cdot dx = \frac{a \cos bx + nb \sin bx}{a^2+n^2b^2} e^{ax} \cos^{n-1} bx$$

$$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx\cdot dx.$$

Je nachdem nun n gerade oder ungerade ist, führen diese Formeln auf eines der drei folgenden Integrale zurück:

$$\int e^{ax} dx \text{ oder } \int e^{ax} \sin bx\cdot dx \text{ oder } \int e^{ax} \cos bx\cdot dx,$$

von denen das erste unmittelbar bekannt ist und die zwei anderen aus den Formeln für $n=1$ abgeleitet werden. Es ist nämlich:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\cdot dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\cdot dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C.$$

Bemerkt mag noch werden, daß die zwei letzteren Integrale vermöge der bekannten Relationen, welche zwischen den goniometrischen Functionen und Exponentialgrößen bestehen, sehr leicht auch auf folgendem Wege hergeleitet werden können. Es ist

$$\int e^{(a+bi)x}\,dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C.$$

Man hat aber:

$$\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \frac{\cos bx + i \sin bx}{a+bi}\, e^{ax}$$

$$= \frac{(a-bi)(\cos bx + i \sin bx)}{a^2+b^2}\, e^{ax}.$$

Folglich:

$$\int e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)\,dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx\, e^{ax}}{a^2+b^2}$$

$$+ \frac{i(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2+b^2} + C,$$

Daraus folgt, wenn $C+Ci$ für die willkührliche Constante geschrieben wird, und die beiderseitigen reellen und imaginären Theile einander gleich gesetzt werden:

$$\int e^{ax} \cos bx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} + C$$

wie oben. — Die allgemeineren Integrale lassen sich hieraus wieder dadurch finden, daß man für die Potenzen des Sinus und Cosinus der einfachen Bogen ihre Ausdrücke in Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen nimmt, und dann die letzteren Formeln auf jedes einzelne Glied in Anwendung bringt.

§. 100. **Cyclometrische Differentiale.** Kommt in dem gegebenen Differentialausdrucke eine cyclometrische Function allein vor, so läßt sich die Integration eines solchen Ausdruckes auf die Integralien zurückführen, worin goniometrische Functionen an die Stelle cyclometrischer treten. Man erhält ohne weiteres folgende Gleichungen:

$$\int f\,[\text{arc}\,(\sin = x)]\,dx = \int f(z) \cos z\,dz,$$

wo $\text{arc}\,(\sin = x) = z$;

$$\int f\,[\mathrm{arc}\,(\cos = x)]\,dx = -\int f\,(z)\,\sin z\,dz,$$
wo $\mathrm{arc}\,(\cos = x) = z$;

$$\int f\,[\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x)]\,dx = \int f\,(z)\,\sec^2 z\,dz,$$
wo $\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x) = z$;

$$\int f\,[\mathrm{arc}\,(\cot = x)]\,dx = -\int f\,(z)\,\mathrm{cosec}^2 z\,dz,$$
wo $\mathrm{arc}\,(\cot = x) = z$.

Man hat so:

$$\int e^{a\,\mathrm{arc}\,(\sin = x)}\,dx = \int e^{az} \cos z\,dz;$$

$$\int \mathrm{arc}^n\,(\sin = x)\,dx = \int z^n \cos z\,dz,$$

wo die gleichgeltenden Integralausdrücke früher behandelt sind.

Das Integral des Differentialausdruckes

$$f\,(x)\,\mathrm{arc}\,(\sin = x)\,dx,$$

wo $f\,(x)$ eine algebraische Function von x bezeichnet, kann leicht auf das Integral eines algebraischen Ausdruckes gebracht werden. Man hat nämlich mittelst der theilweisen Integration:

$$\int f\,(x)\,\mathrm{arc}\,(\sin = x)\,dx = \mathrm{arc}\,(\sin = x)\int f\,(x)\,dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int f\,(x)\,dx. -$$

Mit gleicher Leichtigkeit findet man:

$$\int f\,(x)\,\mathrm{arc}\,(\cos = x)\,dx = \mathrm{arc}\,(\cos = x)\int f\,(x)\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int f\,(x)\,dx;$$

$$\int f\,(x)\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x)\,dx = \mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x)\int f\,(x)\,dx - \int \frac{dx}{1 + x^2} \int f\,(x)\,dx;$$

$$\int f\,(x)\,\mathrm{arc}\,(\cot = x)\,dx = \mathrm{arc}\,(\cot = x)\int f\,(x)\,dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} \int f\,(x)\,dx.$$

Die folgenden Beispiele werden den Gebrauch der vorstehenden allgemeinen Formeln erläutern.

1) $\int x^n\,\mathrm{arc}\,(\sin = x)\,dx = \dfrac{x^{n+1}\,\mathrm{arc}\,(\sin = x)}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

Für den speciellen Fall n=1 hat man

$$\int x\,dx \cdot \mathrm{arc}(\sin = x) = \frac{1}{2}x^2 \mathrm{arc}(\sin = x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{1}{4}\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) + C.$$

$$2)\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{arc}(\sin = x)dx = \mathrm{arc}(\sin = x)\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\int\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Für den speciellen Fall n=4 bekommt man:

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{arc}(\sin = x) = \mathrm{arc}(\sin = x)\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\int\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Nach §. 91 ist aber

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^2\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) + C.$$

Folglich:

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) =$$

$$\left[\frac{3}{16}\mathrm{arc}\,(\sin = x) - \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}\,x\right)\sqrt{1-x^2}\right]\,\mathrm{arc}\,(\sin = x)$$

$$+\frac{1}{16}\,x^4 + \frac{3}{16}\,x^3 + C,$$

wenn man erwägt, daß

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{arc}\,(\sin = x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc}^2\,(\sin = x).$$

$$3)\int x^n \cdot \mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x)\,dx = \frac{x^{n+1}\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x)}{n+1}$$

$$-\frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{1+x^2}$$

Für den speciellen Fall n=0 bekommt man

$$\int arc\,(tang = x)dx = x \cdot arc(tang = x) - \frac{1}{2}\, l\,(1 + x^2) + C.$$

$$4) \int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}\, arc\,(tang = x) = arc\,(tang = x) \int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$$
$$- \int \frac{dx}{1+x^2} \int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$$

Es ist aber

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = x - arc\,(tang = x).$$

Folglich:

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}\, arc\,(tang = x) = [x - arc\,(tang = x)]\, arc\,(tang = x)$$
$$- \int \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}\, arc\,(tang = x)$$

oder

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}\, arc\,(tang = x) = \left(x - \frac{1}{2}\, arc\,(tang = x)\right) arc(tang = x)$$
$$- \frac{1}{2}\, l\,(1+x^2) + C,$$

in Erwägung, daß

$$\int \frac{dx}{1+x^2}\, arc\,(tang = x) = \frac{1}{2}\, arc^2\,(tang = x).$$

In den Fällen, wo das Integral von f (x) dx keine algebraische Function bildet, bleibt nichts Anderes übrig als die Ausdrücke von der Form f (x) · arc (sin=x) und ähnliche in gleichgeltende Reihen umzuwandeln und hierauf die einzelnen Glieder derselben zu integriren.

3. Transcendente Exponentialintegrale.

§. 101. **Die Reihe für das Integral** $\int e^{-x^2}\,dx$. Wir wollen zu dem Schluß des Abschnitts über die Integration der transcendenten Differentiale noch einige Reihen mittheilen, auf welche wir bei dieser Gattung von Integralen unmittelbar geführt werden. Wir machen mit

der Reihe für das Integral $\int e^{-x^2} dx$, welches sehr häufig in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, den Anfang. Es ist

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1 \cdot 2} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{rc.};$$

folglich

$$\int e^{-x^2} dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^7}{7} + \text{rc.},$$

woraus

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = a - \frac{a^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^5}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^7}{7} + \text{rc.}$$

Diese für jeden Werth von a convergente Reihe ist abwechselnd größer oder kleiner als das in Frage stehende Integral, je nachdem man bei einem positiven oder negativen Gliede abbricht, was ein Mittel abgibt, die Grenze des Fehlers zu bestimmen, welchen man begeht, wenn man bei irgend einem Gliede der Reihe stehen bleibt. Diese Reihe wird man anwenden so lange die Werthe von a nicht sehr groß sind.

Ist dagegen a sehr groß, so kann man

$$\int e^{-x^2} dx = \int \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2} x\, dx = -\frac{1}{2x} e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x^2} dx}{x^2}$$

setzen; ferner ist

$$\int \frac{e^{-x^2} dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^3} \cdot e^{-x^2} x\, dx = -\frac{1}{2x^3} \cdot e^{-x^2} - \frac{3}{2} \int \frac{e^{-x^2} dx}{x^4};$$

u. s. w.: Folglich

$$\int e^{-x^2} dx = C - \frac{e^{-x^2}}{2x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \text{rc.}\right).$$

Bleibt man bei der in der Klammer befindlichen Reihe an dem Gliede

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{(2x^2)^{n+1}}$$

stehen, so hat man noch ein Ergänzungsglied in dem Betrage von

$$\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n+3)}{2^{n+2}} \int \frac{e^{-x^2} dx}{x^{2n+4}}$$

zuzufügen.

Um nun

$$\int_0^a e^{-x^2} dx$$

vermittelst der vorigen Reihe zu erhalten, bemerke man, daß

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx - \int_a^\infty e^{-x^2}\,dx$$

ist. Nun werden wir aber bald sehen, daß

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Die Substitution von a und 0 in die obige Reihe kommt demnach auf diejenige von ∞ und a zurück.

Um den Betrag des Ergänzungsgliedes zu schätzen, denke man sich

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+4}}\,dx$$

nach §. 76 in die Summe seiner einzelnen Differentiale zerlegt. Da e^{-x^2} für $x=a$ einen größeren Werth als für die nachfolgenden Werthe von x erhält, so ist das ganze Integral kleiner, als eine entsprechende Summe von Differentialen, deren jedes den Factor e^{-a^2} enthält, d. h.

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+4}}\,dx < e^{-a^2}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+4}},$$

d. h.

$$< \frac{e^{-a^2}}{2n+3}\cdot\frac{1}{a^{2n+3}}.$$

Folglich ist jetzt, da alle Glieder der obigen Reihe wie auch der Rest für $a=\infty$ verschwinden, und die Constante sich bei der Subtraction weghebt:

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-a^2}}{2a}\left(1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1\cdot 3}{(2a^2)^2} - \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{1\cdots(2n+1)}{(2a^2)^{n+1}}\right),$$

mit einem Ergänzungsgliede, dessen Betrag kleiner als

$$\frac{e^{-a^2}}{2a}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{(2a^2)^{n+2}}$$

ist. — Da für wachsende n die obige Reihe divergirt, auch der Betrag des Ergänzungsgliedes alsdann immer größer wird; so hat man n so zu wählen, daß derselbe so klein als möglich wird. Eine stärkere Annäherung zu erreichen, ist alsdann für noch größere n nicht mehr möglich.

Man hat eigene Tafeln für die speciellen Werthe des transcendenten Integrals

$$\int_0^a e^{-x^2}\, dx$$

berechnet. Nach dergleichen Tafeln erhält man z. B. folgende Werthe, wie sie auch aus den vorstehenden Formeln abgeleitet werden können.

$$\int_0^1 = 0{,}74682413$$

$$\int_2^0 = 0{,}88208139$$

$$\int_0^3 = 0{,}88620735$$

$$\int_0^\infty = 0{,}88622692$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^\infty = 0{,}42494591$$

$$\int_1^\infty = 0{,}13940279$$

$$\int_2^\infty = 0{,}00414553469$$

$$\int_3^\infty = 0{,}00001957729.$$

§. 102. **Die Reihen für das Integral** $\int \frac{e^x}{x}\, dx$. Um das fragliche Integral in eine unendliche Reihe zu entwickeln, setzt man eine solche an die Stelle von e^x; man erhält so

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx = C + lx + \frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}\,\frac{x^2}{1\cdot2} + \tfrac{1}{3}\,\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \ldots,$$

welche Reihe für jeden Werth von x convergirt, jedoch nur für kleine Werthe von x rasch zum Ziele führt.

Verlangt man eine für große Werthe von x brauchbare Reihe, so kann man, wie folgt, mittelst der theilweisen Integration dazu gelangen: Man hat

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\cdot e^x\, dx = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}\, dx.$$

Ebenso ist:

$$\int \frac{e^x}{x^2}\, dx = \frac{e^x}{x^2} + 2\int \frac{e^x}{x^3}\, dx;\ 2\int \frac{e^x}{x^3}\, dx = 2\,\frac{e^x}{x^3}$$

$$+ 2\cdot3 \int \frac{e^x}{x^4}\, dx;$$

Führt man so n Integrationen aus, so erhält man:

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \frac{e^x}{x}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1 \cdot 2}{x^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^3} + \cdots \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x^n}\right) + C,$$

mit einer Ergänzung im Betrage von

$$1 \cdot 2 \cdots (n+1) \int \frac{e^x}{x^{n+2}} dx.$$

Der Werth dieser Ergänzung hängt natürlich von den Grenzen der Integration ab; z. B. es sei die untere Grenze $= -\infty$; so ist der absolute Werth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{x^{n+2}} dx,$$

wenn, um ein Unendlichwerden zu vermeiden, a ebenfalls negativ gedacht wird, so daß die Null nicht im Integrationsintervall vorkommt, kleiner als

$$\frac{1}{a^{n+2}} \int_{-\infty}^{a} e^x dx,$$

d. h. kleiner als

$$\frac{e^a}{a^{n+2}},$$

mithin das Ergänzungsglied kleiner als

$$1 \cdot 2 \cdots (n+1) \frac{e^a}{a^{n+2}}.$$

Man kann demnach setzen:

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{x} dx = \frac{e^a}{a}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1 \cdot 2}{a^2} + \text{etc.} + \frac{1 \cdots n}{a^n}\right),$$

wobei der begangene Fehler kleiner als

$$\frac{e^a}{a^{n+2}} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n+1)$$

ist. Für $a = -10$ findet man z. B. schon durch 10 Glieder die 10 ersten Decimalstellen genau, weil dann der Betrag des Ergänzungsgliedes, wenn man dasselbe

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdots 11}{10^{12} \cdot e^{10}}$$

setzt, kleiner als 0,00000000002 ist. Man geht nämlich am besten bis zu demjenigen Gliede, für welches eben $n + 1 > a$ werden will, das Ergänzungsglied bis hierher im Abnehmen begriffen ist.

Verschiedene neuere Schriftsteller nennen das transcendente Integral

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{x} dx,$$

mit der unteren Grenze $= -\infty$ die Integral-Exponentielle von a, und bezeichnen es durch EJ (a). Um die Werthe desselben, wenn a nicht groß ist, zu berechnen, müssen wir zu der zuerst gegebenen Reihe zurückkehren; wir müssen deßhalb für x die Werthe a und $-\infty$ substituiren, schreiben aber, weil die Logarithmen der negativen Größen a und $-\infty$ imaginär sind, vorher $l(-x) + l(-1)$ an die Stelle von lx und schlagen $l(-1)$ zur Constanten. Anstatt $x = -\infty$ zu setzen, substituiren wir eine gegen das Unendliche hin wachsende Zahl $-n$ und erhalten:

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{x} dx = l(-a) + \frac{a}{1} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3}\frac{a^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

$$- \lim \left[ln - \frac{n}{1} + \frac{1}{2}\frac{n^2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3}\frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right].$$

Da die erste dieser beiden Reihen convergirt, auch der absolute Werth

$$\text{von} \int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{x} dx \text{ kleiner als } \frac{e^{-a}}{a},$$

also jedenfalls endlich ist, so muß der fragliche Grenzwerth ebenfalls ein bestimmter sein. Für $a = 10$ kann z. B. das Integral schon auf 5 Decimalstellen genau $= 0$ gesetzt werden. Berechnet man also den Werth der Reihe für $a = 10$, so findet man auf 5 Decimalstellen genau den fraglichen Grenzwerth $= -0{,}57721$, so daß man also hat:

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{x} dx = 0{,}57721 \cdots + l(-a) + \frac{a}{1} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots$$

In sehr genauem Zusammenhange mit dem eben betrachteten Integrale steht dasjenige von $\frac{dx}{lx}$. Setzt man nämlich in dem Integral

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \; x = lt,$$

also:

$$dx = \frac{dt}{t}, \; e^x = t,$$

so erhält man $\int \frac{dt}{lt}$. Das vorhin betrachtete Integral

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{x} dx$$

geht hierdurch in

$$\int_0^{e^a} \frac{dt}{lt}$$

über. Setzt man la für a, so findet man also

$$\int_{-\infty}^{la} \frac{e^x}{x}\, dx = \int_0^a \frac{dx}{lx}.$$

Das letztere Integral kann aus dem ersten gefunden werden, indem man la an die Stelle von a setzt. Man erhält also:

$$\int_0^a \frac{dx}{lx} = \frac{a}{la}\left(1 + \frac{1}{la} + \frac{1 \cdot 2}{(la)^2} + \cdots \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(la)^n}\right),$$

mit einem Reste, welcher kleiner als

$$1 \cdot 2 \cdots (n+1) \frac{a}{(la)^{n+2}}$$

ist. Ferner für kleine Werthe von la

$$\int_0^a \frac{dx}{lx} = K + \mathrm{ll}\frac{1}{a} + \frac{la}{1} + \tfrac{1}{2}\,\frac{(la)^2}{1 \cdot 2} + \tfrac{1}{3}\,\frac{(la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

wo K, wie wir später sehen werden, $= 0{,}577215664901 \ldots$ ist, und Constante des Integrallogarithmus genannt wird, weil neuere Schriftsteller das Integral $\int_0^a \frac{dx}{lx}$ den Integrallogarithmus von a nennen, und durch LJ (a) bezeichnen.

Es möge noch bemerkt werden, daß a in $\int_0^a \frac{dx}{lx}$ nur ächtgebrochene Werthe erhalten darf, weil für $a > 1$ der im Nenner stehende Logarithmus für $x = 1$ das Integral unendlich machen würde. Da die Logarithmen der ächten Brüche negative Zahlen sind, so sind die Werthe von $\int_0^a \frac{dx}{lx}$ negativ, wie man aus folgender Tabelle ersieht, welche die Werthe dieses Integrals für

$$a = e^{-1},\ e^{-2} \cdots e^{-10}$$

enthält, also zugleich als Tabelle der Werthe von

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{x}\, dx$$

für

$$a = -1,\ -2 \cdots -10$$

angesehen werden kann:

$$\begin{array}{ll} EJ(-1) = LJ(e^{-1}) = & -0{,}2193839 \\ -2 & -0{,}0489005 \\ -3 & -0{,}0130484 \\ -4 & -0{,}0037794 \\ -5 & -0{,}0014483 \\ -6 & -0{,}0003601 \\ -7 & -0{,}0001155 \\ -8 & -0{,}0000377 \\ -9 & -0{,}0000125 \\ -10 & -0{,}0000042. \end{array}$$

Das früher vorgekommene Integral

$$\int \frac{a^x}{x} dx$$

kann, wenn $x = \frac{t}{la}$ gesetzt wird, auf dasjenige von $\frac{e^x}{x} dx$ zurückgeführt werden.

4. Transcendente goniometrische Integrale.

§. 103. Die Integrale $\int \frac{\sin x}{x} dx$ und $\int \frac{\cos x}{x} dx$.

Wenn man für sin x die gleichgeltende Reihe substituirt, erhält man:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = C + x - \tfrac{1}{3} \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \tfrac{1}{5} \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot\cdot 5} - \tfrac{1}{7} \frac{x^7}{1 \cdots 7} + \text{etc.}$$

eine jederzeit convergirende Reihe. Läßt man die Constante C weg, so hat man das zwischen den Grenzen x und 0 angenommene Integral, welches von einigen Schriftstellern der Integralsinus von x genannt und durch SJ (x) bezeichnet wird, so daß SJ (a) =

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \tfrac{1}{3} \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \tfrac{1}{5} \frac{a^5}{1 \cdot 2 \cdot\cdot 5} - \tfrac{1}{7} \frac{a^7}{1 \cdots 7} + \text{etc.}$$

Ist a eine große Zahl, so müßte man in der vorigen Reihe schon eine größere Anzahl von Gliedern berechnen, bis eine raschere Convergenz einträte. Für diesen Fall setze man

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx - \int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Es wird sich nun bei der Lehre von den bestimmten Integralen her-

ausstellen, daß

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

ist, so daß es also jetzt nur auf die Entwickelung des Integrales

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

ankommt. Durch theilweise Integration findet man nun:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \frac{-\cos x}{x} - \int \frac{\cos x}{x^2} dx;$$

$$-\int \frac{\cos x}{x^2} dx = -\frac{\sin x}{x^2} - 2\int \frac{\sin x}{x^3} dx;$$

$$-2\int \frac{\sin x}{x^3} dx = 2\frac{\cos x}{x^3} + 2\cdot 3\int \frac{\cos x}{x^4} dx;$$

$$2\cdot 3\int \frac{\cos x}{x^4} dx = 2\cdot 3\frac{\sin x}{x^4} + 2\cdot 3\cdot 4\int \frac{\sin x}{x^5} dx, \text{ ꝛc.}$$

Setzt man diese Reductionen fort, so findet man allgemein

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = C - \frac{\cos x}{x}\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^4} - \cdots \pm \frac{2\cdots 2n}{x^{2n}}\right)$$

$$- \frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{2\cdot 3}{x^3} + \cdots \pm \frac{2\cdots(2n+1)}{x^{2n+1}}\right)$$

$$- 2\ldots(2n+2)\int \frac{\sin x}{x^{2n+3}} dx.$$

Nimmt man jetzt dieses Resultat zwischen den Grenzen ∞ und a, so bemerkt man, daß die mit $\sin x$ und $\cos x$ behafteten Reihen für $x = \infty$ verschwinden; der Werth des letzten Integrales

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^{2n+3}} dx$$

ist ferner zwischen den beiden Integralen enthalten, welche man erhält, indem man darin $\sin x$ einmal durch $+1$, einmal durch -1 ersetzt, d. h. zwischen

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+3}} \text{ und } -\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+3}}.$$

Der absolute Werth der letzteren Integrale ist aber

$$\frac{1}{(2n+2)\, a^{2n+2}},$$

so daß man also endlich hat:

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos a}{a}\left(1 - \frac{2}{a^2} + \ldots \pm \frac{2\ldots 2n}{a^{2n}}\right)$$

$$+ \frac{\sin a}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{2\cdot 3}{a^3} + \ldots \pm \frac{2\ldots(2n+1)}{a^{2n+1}}\right),$$

mit einem Fehler, welcher geringer als

$$\frac{2\ldots(2n+1)}{a^{2n+2}}$$

ist. Hieraus folgt endlich, wenn man

$$\int_0^a = \int_0^\infty - \int_a^\infty$$

setzt:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos a}{a}\left(1 - \frac{2}{a^2} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{a^4} - \ldots \pm \frac{2\ldots 2n}{a^{2n}}\right)$$

$$- \frac{\sin a}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{2\cdot 3}{a^3} + \frac{2\cdots 5}{a^5} - \ldots \pm \frac{2\cdots(2n+1)}{a^{2n+1}}\right),$$

wobei der absolute Werth des Fehlers kleiner als

$$\frac{2\ldots(2n+1)}{a^{2n+2}}$$

ist. Die Zahl n hat man wieder so zu wählen, daß noch $2n+1 < a$ ist, weil für ein größeres n der Fehler wieder im Steigen begriffen ist. Es mögen nun die Werthe des Integrals

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = SJ\,(a)$$

für $a = 1, 2 \ldots 10$ folgen:

SJ (0)	=	0,0000000
1		0,9460830
2		1,6054129
3		1,8486525
4		1,7582031
5		1,5499312
6		1,4246875
7		1,4545966
8		1,5741868
9		1,6650400
10		1,6583475
∞		1,5707963

Das Integral

$$\int \frac{\cos x}{x} dx$$

kann ebenfalls nicht in endlicher Form dargestellt werden. Man verwandelt deßhalb den Cosinus in eine unendliche Reihe, und erhält durch Integration der einzelnen Glieder

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = lx - \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{rc.} + C.$$

Um bestimmte Integrationsgrenzen einzuführen, setze man z. B. die obere = a, die untere = ∞; andere Grenzen können leicht nach dem Satze

$$\int_b^a = \int_\infty^a - \int_\infty^b$$

auf die genannten zurückgeführt werden. Die so entstehende Function

$$\int_\infty^a \frac{\cos x}{x} dx$$

wird häufig der Integralcosinus von a genannt und durch CJ (a) bezeichnet. Um dieses Integral aus der obigen allgemeinen Reihe herzuleiten, braucht man nur die Differenz der Werthe zu nehmen, welche für x=a und für x=∞, oder besser für x=n, wo n eine unbegrenzt wachsende Zahl vorstellt, hervorgehen. Man erhält so

$$\int_\infty^a \frac{\cos x}{x} dx = la - \frac{1}{2} \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4} \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{6} \frac{a^6}{1 \cdot \cdot 6} + \text{rc.}$$

$$+ \lim \left[l \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \frac{n^2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4} \frac{n^4}{1 \cdot \cdot 4} + \frac{1}{6} \frac{n^6}{1 \cdot \cdot 6} - \text{rc.} \right].$$

Da sich nun ähnlich wie bei dem Integral

$$\int_{-\infty}^a \frac{e^x}{x} dx$$

nachweisen läßt, daß das Integral zur Linken so lange a nicht = 0 ist, stets einen endlichen Werth hat, auch die Reihe in a wegen ihrer fortwährenden Convergenz einen bestimmten endlichen Werth darstellt, so muß auch der zur Rechten befindliche Grenzwerth eine bestimmte endliche Zahl geben, deren Werth merkwürdiger Weise mit der Constanten des Integrallogarithmus übereinstimmt. Diese war nämlich durch die Gleichung gegeben:

$$K = \lim \left[l \frac{1}{n} + n - \frac{1}{2} \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{4} \frac{n^4}{1 \cdot \cdot 4} + \text{rc.} \right].$$

Um nun die verlangte Identität nachzuweisen, bemerke man, daß die fraglichen Grenzwerthe auch unter der Form

$$\mathrm{l}\tfrac{1}{n} + \int_0^n \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx,\ \mathrm{l}\tfrac{1}{n} + \int_0^n \frac{1-\cos x}{x}\, dx$$

dargestellt werden können. Es würde sich also darum handeln, nachzuweisen, daß für unendlich große n,

$$\int_0^n \frac{1-\cos x}{x}\, dx = \int_0^n \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$$

oder

$$\int_0^n \frac{e^{-x}-\cos x}{x}\, dx = 0.$$

Diesen Nachweis wollen wir später bei Behandlung des bestimmten Integrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-\cos x}{x}\, dx$$

geben.

Für sehr große Werthe von a convergirt die Endformel

$$\int_\infty^a \frac{\cos x}{x}\, dx = K + \mathrm{l}a - \tfrac{1}{2}\,\frac{a^2}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{4}\,\frac{a^4}{1\cdots 4} - \tfrac{1}{6}\,\frac{a^6}{1\cdots 6} + \text{etc.}$$

erst spät. Eine bequemere Rechnung gibt sich dann aus Folgendem

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx = \frac{\sin x}{x} + \int \frac{\sin x}{x^2}\, dx;$$

$$\int \frac{\sin x}{x^2}\, dx = -\frac{\cos x}{x^2} - 2\int \frac{\cos x}{x^3}\, dx;$$

$$\int \frac{\cos x}{x^3}\, dx = \frac{\sin x}{x^3} + 3\int \frac{\sin x}{x^4}\, dx;$$

$$\int \frac{\sin x}{x^4}\, dx = -\frac{\cos x}{x^4} - 4\int \frac{\cos x}{x^5}\, dx, \text{ etc.}$$

Nach 2n derartigen Reductionen erhält man, wenn man ähnliche Ueberlegungen wie oben beim Integralsinus anstellt:

$$\int_\infty^a \frac{\cos x}{x}\, dx = \frac{\sin a}{a}\left(1 - \frac{1\cdot 2}{a^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{a^4} - \cdots \pm \frac{1\ldots 2n}{a^{2n}}\right)$$

$$- \frac{\cos a}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{a^3} + \cdots \pm \frac{1\ldots(2n+1)}{a^{2n+1}}\right),$$

mit einem Fehler, dessen absoluter Werth kleiner als

$$\frac{1 \ldots (2n+1)}{a^{2n+2}}$$

ist. Nach dieser Formel können für a = 0, 1, 2 ... 10, ∞ folgende Werthe des Integrales

$$CJ(a) = \int_{\infty}^{a} \frac{\cos x}{x} dx$$

berechnet werden:

CJ (0) =	− ∞
1	+ 0,3374039
2	+ 0,4229808
3	+ 0,1196297
4	− 0,1409816
5	− 0,1900297
6	− 0,0680572
7	+ 0,0766952
8	+ 0,1224338
9	+ 0,0553475
10	− 0,0454564
∞	0

IV. Bestimmte Integrale.

1. Eigenschaften und Werthermittelungen bestimmter Integrale.

§. 104. **Verschiedene Eigenschaften der bestimmten Integrale.** Ein bestimmtes Integral hat die Gestalt

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

und ist gleich der Summe einer Reihe von unendlich vielen unendlich kleinen Gliedern, die zwischen den bestimmten Grenzen f (a) dx und f(b)dx stetig neben einander liegen, dergestalt daß

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim \cdot \alpha\, [f(a) + f(a+\alpha) \ldots . + f(b-\alpha)].$$

In verschiedenen Fällen läßt sich aus dieser Formel der genaue Werth des bestimmten Integrals sofort herleiten, wie wir dies an folgenden zwei Beispielen zeigen wollen.

$$1)\int_b^a x\,dx = \lim\cdot\alpha\,[a+a+\alpha+a+2\alpha\ldots+a+(n-1)\,\alpha]$$

$$=\lim\cdot\alpha\,[(a+b-\alpha)\tfrac{n}{2}] = \lim\cdot\frac{b-a}{n}\cdot(a+b-\alpha)\,\frac{n}{2}$$

$$=\lim\cdot\frac{(b-a)\,(b+a-\alpha)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2},$$

in Erwägung daß $b-a=n\alpha$ ist.

$$2)\int_a^b e^x\,dx = \lim\cdot\alpha\,(e^a + e^{a+\alpha} + e^{a+2\alpha}\ldots + e^{a+(n-1)\alpha})$$

$$=\lim\cdot\alpha\cdot e^a\,\frac{(e^{n\alpha}-1)}{e^\alpha-1} = \lim\cdot\frac{\alpha}{e^\alpha-1}\,(e^b-e^a)$$

$$= e^b - e^a;$$

in Berücksichtigung, daß

$$\lim\cdot\frac{\alpha}{e^\alpha-1} = 1 \text{ ist.}$$

Aus der anderweitigen hierhergehörigen Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

wo $F(x)$ die Function darstellt, deren Differential $f(x)\,dx$ oder unbestimmtes Integral $\int f(x)\,dx$ ist, entspringen einfach folgende Relationen:

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x-c)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x)\,dx;$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx;$$

$$\int_0^{b-a} f(b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C,$$

in welcher u und v Functionen von x darstellen, liefert

$$\int_a^b u\,dv = u_b v_b - u_a v_a - \int_a^b v\,du,$$

wo die beigefügten a und b leicht zu deuten sind.

Zugleich ist klar, daß wenn f (x) innerhalb des Intervalls von a bis b einerlei Vorzeichen behält, auch dem bestimmten Integral dasselbe Vorzeichen zukommt. Ferner erhellt sofort, daß wenn f (g) die größte und f (k) die kleinste unter den Functionen f(a), f(a + α), f (a+2α) .... f (b—α) ist, innerhalb des Intervalls von x = a bis x=b die Relation:

$$\int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,f(g),$$

und

$$\int_a^b f(x)\,dx > (b-a).\ f(k),$$

oder auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a).\ f[a+\vartheta\,(b-a)]$$

besteht. Man vergleiche das hier Gesagte mit dem in §. 23 Angeführten.

§. 105. **Werthermittelungen der bestimmten Integrale.** — Mit Hülfe der vorstehenden Sätze hat es keine weitere Schwierigkeit den Werth irgend eines bestimmten Integrals genau oder wenigstens bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit zu berechnen. Um für alle Fälle einen genäherten Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

zu erhalten, wird man von der Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \ldots + \int_{a_{n-1}}^b f(x)\,dx$$

oder von der Gleichung:

$$\int_a^b f(x)dx = (a_1-a)f[a+\vartheta(a_1-a)] + (a_2-a_1)f[a_1+\vartheta_1(a_2-a_1)] + \text{etc.}$$

ausgehen, wo a_1, a_2, a_3 ... a_{n-1} zwischen a und b liegende Werthe von x darstellen und ϑ, ϑ_1, ... ϑ_{n-1} als ächte Brüche aufzufassen sind. Nimmt man der größeren Einfachheit halber die Intervalle $a_1 - a$, $a_2 - a_1$... gleich groß und gleich h an; so hat man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\,[f(a+\vartheta h) + f(a+h+\vartheta_1 h) \ldots + f(b-h+\vartheta_{n-1} h)].$$

Nimmt die Function f (x) innerhalb des Intervalls von $x = a$ bis $x = b$ fortwährend zu oder fortwährend ab, so liegt der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

offenbar zwischen den beiden Summen:

$$S = h\,[(fa) + f(a+h) + f(a+2h) \ldots + f(b-h)],$$

$$S_1 = h\,[(fa+h) + f(a+2h) + f(a+3h) \ldots + f(b)].$$

Nimmt man nun die halbe Summe dieser beiden Werthe oder den Ausdruck

$$h\,[\tfrac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) \ldots + f(b-h) + \tfrac{1}{2} f(b)]$$

als angenäherten Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

an, so begeht man einen Fehler, der kleiner als die halbe Differenz

$$S_1 - S = \pm h\,[\tfrac{1}{2} f(b) - \tfrac{1}{2} f(a)]$$

ist.

Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $a = 0$, $b = 1$ und $h = \frac{1}{4}$ z. B. hat man

$$h\,[\tfrac{1}{2} f(a) + f(a+h) \ldots \tfrac{1}{2} f(b)] =$$

$$\tfrac{1}{4}\,(\tfrac{1}{2} + \tfrac{16}{17} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{16}{25} + \tfrac{1}{4}) = 0{,}78.$$

Der genäherte Werth des Integrals

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ist folglich 0,78. Der begangene Fehler kann im vorliegenden Falle die Größe $\frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$ nicht übersteigen; und in der That beträgt derselbe ohngefähr $\frac{1}{50}$.

Wird die Voraussetzung, daß die Function f (x) von $x = a$ bis $x = b$ entweder stets im Wachsen oder stets im Abnehmen begriffen ist, nicht erfüllt; so kann man sich das Intervall $b - a$ jederzeit in mehrere andere Intervalle $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, ... $b - a_{n-1}$ zerlegt denken, in deren jedem die Function f (x) entweder immer zu- oder immer abnimmt; worauf sich dann die genäherten Werthe und die begangenen Fehler wie vorhin berechnen lassen.

In allen Fällen, selbst wenn die Function f(x) bald im Steigen bald im Fallen begriffen ist, wird der Fehler, welchen man begeht, wenn man die eine oder die andere der obenstehenden Summen S und S_1 als genäherten Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

betrachtet, offenbar kleiner als das Product von $nh = b - a$ mit dem größten numerischen Werth G, welchen die Differenz $f(x+\Delta x) - f(x)$ annehmen kann, wenn x zwischen den Grenzen b und a und Δx zwischen 0 und h liegend, vorausgesetzt wird. Man hat in der That z. B.:

$$\int_a^b f(x)\,dx - S = h\,[f(a+\vartheta h) - f(a)] + [f(a+h+\vartheta_1 h) - f(a+h)]\} + \text{ꝛc.};$$

folglich

$$\int_a^b f(x)\,dx - S < h \cdot n \cdot G,$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,dx - S < G\,(b-a).$$

§. 106. **Annähernde Berechnung bestimmter Integrale.** Da man bei der Anwendung der Integralrechnung häufig in den Fall kommt, die numerischen Werthe der bestimmten Integrale näherungsweise zu berechnen; so scheint es nicht unangemessen zu sein, noch ein Paar andere Verfahrungsweisen mitzutheilen, deren man sich bedient, um den angenäherten Zahlenwerth dergleichen bestimmter Integrale zu finden. Um das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

annäherungsweise zu bestimmen, fassen wir dasselbe, wie Poisson in seinem Lehrbuch der Mechanik gethan hat, als Summe nicht unendlich kleiner, sondern sehr kleiner Größen auf: Diese Summe wird dem gesuchten Integral desto näher kommen, je kleiner wir die sehr kleinen Größen feststellen. Indem wir nun das Intervall $b - a$ in n gleiche Theile zerlegen und ihre gemeinschaftliche Größe durch h bezeichnen, haben wir nach dem Taylorschen Lehrsatze, wegen $\int f(x)\,dx = F(x)$ oder $f(x) = F'(x)$ folgende Reihe von Gleichungen:

$$F(a+h) = F(a) + hf(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f'(a) + \ldots;$$

$$F(a+2h)=F(a+h)+hf(a+h)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f'(a+h)+\ldots;$$

$$F(a+3h)=F(a+2h)+hf(a+2h)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f'(a+2h)+\ldots;$$

. . . .

$$F(a+nh)=F(a+\overline{n-1}h)+hf(a+\overline{n-1}h)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f'(a+\overline{n-1}h)$$
$$+\ldots.$$

Addirt man diese Gleichungen, so kommt, wegen $nh=b-a$:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx=$$
$$h\Sigma f(a+mh)+\tfrac{1}{2}h^2\,\Sigma f'(a+mh)$$
$$+\tfrac{1}{6}h^3\,\Sigma f''(a+mh)+\text{etc.},$$

wo m eine ganze Zahl oder Null bedeutet, und das Zeichen Σ die Summe anzeigt, die sich auf die n Werthe von m erstrecken, welche zwischen $m=0$ und $m=n-1$ liegen. Ganz auf dieselbe Weise hat man:

$$f(b)-f(a)=h\Sigma\,f'(a+mh)+\tfrac{1}{2}h^2\Sigma\,f''(a+mh)+\ldots,$$

$$f'(b)-f'(a)=h\Sigma\,f''(a+mh)+\tfrac{1}{2}h^2\Sigma\,f'''(a+mh)+\ldots.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen entspringt, wenn man die dritte und höheren Potenzen der sehr kleinen Größe h außer Acht läßt:

$$\tfrac{1}{2}h^2\Sigma f'(a+mh)=\tfrac{1}{2}h\,[f(b)-f(a)]-\tfrac{1}{4}h^2\,[f'(b)-f'(a)];$$

$$\tfrac{1}{6}h^3\Sigma f''(a+mh)=\tfrac{1}{6}h\,[f'(b)-f'(a)].$$

Daraus entsteht folgende Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\Sigma f(a+mh)+\tfrac{1}{2}h\,[f(b)-f(a)]-\tfrac{1}{12}h^2\,[f'(b)-f'(a)];$$

oder was dasselbe ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\,[\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)\ldots+f(a+\overline{n-1}h)+\tfrac{1}{2}f(b)]$$
$$-\tfrac{1}{12}h^2\,[f'(b)-f'(a)].$$

Die Reihe wird dem Integrale desto näher kommen, je kleiner h oder $\frac{b-a}{n}$ und je geringer der Betrag des vernachlässigten $f''(x)$ innerhalb der Grenzen a und b ist.

Läßt man das letzte Glied $-\tfrac{1}{12}h^2\,[f'(b)-f'(a)]$ weg, so hat man zur näherungsweisen Bestimmung des Integrals die im vorigen Paragraphen aufgeführte Formel wieder.

Es sei $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ zu bestimmen.

Man erhält

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+2h} \dots + \frac{1}{1+(n-1)h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+nh)}\right)$$
$$- \frac{h^2}{16}$$

weil

$$f(x) = \frac{1}{x}, \; f(a) = 1, \; f(b) = \tfrac{1}{2};$$

$$f'(a) = -1 \text{ und } f'(b) = -\tfrac{1}{4} \text{ ist.}$$

Für $n = 3$, sonach $h = \frac{1}{3}$ ergibt sich hieraus:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{144} = 0{,}693056.$$

Für $n = 6$, mithin $h = \frac{1}{6}$ wird

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{6}{7} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{6}{9} + \tfrac{6}{10} + \tfrac{6}{11} + \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{576} = 0{,}693141;$$

welcher Werth bereits in der fünften Decimalstelle richtig ist.

Um noch eine andere Formel zur näherungsweisen Berechnung der Werthe der bestimmten Integrale zu erhalten, wollen wir von b auf a rückwärts schreiten, anstatt, wie vorhin geschah, von a auf b überzugehen. Wir finden durch ein dem vorhergehenden analoges Verfahren:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = h\Sigma f(b-mh) - \tfrac{1}{2}h^2 \Sigma f'(b-mh)$$
$$+ \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma f''(b-mh) - \text{rc.},$$

wo wieder m eine ganze Zahl oder Null bedeutet und die Charakteristik Σ die Summen anzeigt, die sich auf die n Werthe von m beziehen, welche zwischen $m=0$ und $m=n-1$ enthalten sind. Indem wir diese Formel mit der oben gewonnenen, nämlich mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\Sigma f(a+mh) + \tfrac{1}{2}h^2 \Sigma f'(a+mh) + \tfrac{1}{1.2.3} h^3 \Sigma f''(a+mh)$$
$$+ \text{rc.}$$

zusammenstellen und die halbe Summe der beiden Reihen als genä=

herten Werth des bestimmten Integrals ansehen, haben wir die Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\,\{\Sigma f(a+mh) + \tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]\}$$

$$+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\tfrac{1}{2}[f'(a)-f'(b)]$$

$$+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\{\Sigma f''(a+mh)+\tfrac{1}{2}[f''(a)+f''(b)]\}$$

$$+\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{2}[f'''(a)-f'''(b)] + \text{rc.}$$

in welcher dem m alle Werthe von $m = 1$ bis $m = n - 1$ beizulegen sind.

Das Integral

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}}\,dx$$

mittelst dieser Formel näherungsweise anzugeben. Es ist

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}};$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2};\ f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right);$$

$$f'''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right);$$

$$f^{IV}(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^8}-\frac{12}{x^7}+\frac{36}{x^6}-\frac{24}{x^5}\right) \text{ u. s. w.}$$

Mit Hülfe der Bernouillischen Formel finden wir:

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{x}}\,dx = e^{-\frac{1}{x}}\Big[x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}\left(\frac{1}{x}-2\right)-\tfrac{1}{24}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+6\right)$$

$$+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{12}{x^2}+\frac{36}{x}-24\right)$$

$$-\frac{1}{720}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{20}{x^3}+\frac{120}{x^2}-\frac{240}{x}+120\right)+\dots\Big]$$

welche Reihe sehr langsam convergirt. Schreiten wir nun durch die Intervalle von 0 bis x fort und machen successive $x = 0, h, 2h, \dots;$

so gibt uns die obige Formel folgende Gleichung:

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{x}}\,dx = h\left(e^{-\frac{1}{h}} + e^{-\frac{1}{2h}} \ldots + e^{-\frac{1}{(n-1)h}}\right) - \tfrac{1}{2}\,h\,e^{-\frac{1}{nh}}$$

$$-\tfrac{1}{4}\,h^2\,e^{-\frac{1}{nh}} \cdot \frac{1}{n^2h^2}$$

$$+\frac{h^3}{6}\left[e^{-\frac{1}{h}}\left(\frac{1}{h^4} - \frac{2}{h^3}\right) + e^{-\frac{1}{2h}}\left(\frac{1}{16\,h^4} - \frac{2}{8\,h^3}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.+ e^{-\frac{1}{(n-1)h}}\left(\frac{1}{(n-1)^4h^4} - \frac{2}{(n-1)^3h^3}\right)\right]$$

$$-\tfrac{1}{12}\,h^3\,e^{-\frac{1}{nh}}\left(\frac{1}{n^4h^4} - \frac{2}{n^3h^3}\right)$$

$$-\tfrac{1}{48}\,h^4\,e^{-\frac{1}{nh}}\left(\frac{1}{n^6h^6} - \frac{6}{n^5h^5} + \frac{6}{n^4h^4}\right) + \text{etc.}$$

Will man bei der Grenze $x=1$ stehen bleiben, so muß $h=\frac{1}{n}$ genommen werden. Dadurch kommt

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \frac{1}{n}\left(e^{-n} + e^{-\frac{n}{2}} + e^{-\frac{n}{3}} \ldots + e^{-\frac{n}{n-1}}\right)$$

$$-\frac{1}{2n\,e} - \frac{1}{4n^2\,e}$$

$$+\tfrac{1}{6}\left((n-2)\,e^{-\frac{n}{1}} + \frac{(n-4)}{16}e^{-\frac{n}{2}} + \frac{(n-6)}{81}e^{-\frac{n}{3}} \ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(n-2n+2)}{(n-1)^4}e^{-\frac{n}{n-1}}\right)$$

$$-\frac{1}{12n^3\,e} - \frac{1}{48n^4\,e} + \text{etc.}$$

Beschränkt man sich auf die hingeschriebenen Glieder und nimmt $n=10$, so findet man den Werth von

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}}\,dx$$

bis auf den millionsten Theil der Einheit genau.

2. Allgemeine bestimmte Integrale.

§. 107. **Allgemeine bestimmte Integrale.** Die Werthe einer großen Anzahl bestimmter Integrale sind nach verschiedenen Methoden berechnet worden. Die am häufigsten in der Anwendung vorkommenden dieser Werthe wollen wir nun mittheilen, und zwar mit denjenigen Fällen den Anfang machen, in denen derartige Werthe unmittelbar aus dem für das unbestimmte Integral gefundenen Ausdrucke sich herleiten lassen: die auf diesem Wege gewonnenen Integrale wollen wir allgemeine bestimmte Integrale heißen.

1) Aus der Gleichung

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

(mit Weglassung der Constante) entspringt, wenn der Exponent m größer als die Einheit vorausgesetzt wird:

$$\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}; \int_0^1 \frac{dx}{x^m} = \infty.$$

2) Desgleichen hat man

$$\int_0^1 (A+Bx+Cx^2+\ldots) = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{3} + \ldots$$

und

$$\int_0^1 \frac{x^m-1}{x-1} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots + \frac{1}{m}.$$

3) Aus der Gleichung

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{ax}\, dx = \infty; \quad \int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}.$$

4) Die Formeln

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{a}\right)$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$$

geben

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a} \quad \text{und} \quad \int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

5) Die im §. 92 abgehandelten Integrale

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

liefern

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{3\cdot5\cdot7\cdot9\ldots(2n+1)}.$$

Dividirt man das Erste dieser Integrale durch das Zweite und setzt $n=\infty$, so erhält man, wenn man berücksichtigt, daß dann beide Integrale einander gleich werden:

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots \times 3\cdot5\cdot7\cdot9\ldots}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots \times 2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots};$$

woraus

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots$$

In der That findet man, daß die Grenze des Verhältnisses der beiden Integrale

$$J = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{und}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, = \lim \frac{2n}{2n+1} = 1$$

ist. Das Integral

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

liegt aber, weil in seinen sämmtlichen Elementen $x^{2n+1}<x^{2n}<x^{2n-1}$ ist, zwischen beiden oben genannten Integralen, also ist umsomehr

$$\lim \frac{J}{J_1} = 1.$$

Man vergleiche damit den §. 125 der algebraischen Analysis, wo dieser Ausdruck auf eine andere Weise gefunden wurde.

6) Die theilweise Integration liefert

$$\int dx\, x^{n-1} e^{-x} = -x^{n-1} e^{-x} + (n-1) \int dx\, x^{n-2} e^{-x};$$

folglich wird, wenn n eine ganze positive Zahl ist:

$$\int_0^\infty dx\, x^{n-1} e^{-x} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1),$$

und

$$\int_0^\infty dx\, x^{n-1}\, e^{-ax} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{a^n}.$$

7) Die Formeln

$$\int dx \sin ax = -\frac{\cos ax}{a}$$

und

$$\int dx \cos ax = \frac{\sin ax}{a}$$

geben

$$\int_0^\pi dx \sin ax = \frac{1-\cos a\pi}{a}$$

und

$$\int_0^\pi dx \cos ax = \frac{\sin a\pi}{a}.$$

Folglich ist der Werth des ersten Integrals $= \frac{2}{a}$ wenn a eine ungerade ganze Zahl darstellt, dagegen $=0$, wenn a eine gerade ganze Zahl bedeutet. Das zweite Integral verschwindet jederzeit, wenn a eine ganze Zahl ist.

8) Die Gleichungen

$$\int dx\, x \sin ax = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$$

und

$$\int dx\, x \cos ax = \frac{x \sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2}$$

liefern, wenn a eine ganze Zahl ist:

$$\int_0^\pi dx\, x \sin ax = -\frac{\pi \cos a\pi}{a}$$

und

$$\int_0^{\pi} dx\ x \cos ax = \frac{\cos a\pi - 1}{a^2}.$$

Also wird das erste Integral entweder $+\frac{\pi}{a}$ oder $-\frac{\pi}{a}$, und das Zweite entweder $-\frac{2}{a^2}$ oder 0, je nachdem a ungerade oder gerade ist.

9) Wenn n eine gerade ganze Zahl ist, hat man

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots n}\frac{\pi}{2};$$

und

$$\int_0^{\pi/4} \tang^n x\, dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \pm 1 \mp \frac{\pi}{4}.$$

10) Wenn n eine ungerade ganze Zahl ist, wird

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)}{1\cdot3\cdot5\ldots(n-2)n}$$

und

$$\int_0^{\pi/4} \tang^n x\, dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{2}\, l(\tfrac{1}{2}).$$

11) Die Gleichungen

$$\int dx\, e^{-ax} \sin bx = -e^{-ax}\ \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2+b^2}$$

und

$$\int dx\, e^{-ax} \cos bx = -e^{-ax}\ \frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2+b^2}$$

geben

$$\int_0^{\infty} dx\ e^{-ax} \sin bx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

und

$$\int_0^{\infty} dx\ e^{-ax} \cos bx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Diese beiden Ausdrücke nähern sich beziehungsweise desto mehr den Grenzeu $\frac{1}{b}$ und 0, je näher die Größe a gegen Null rückt.

12) Man wird finden:

$$\int_0^{1} \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}\ [1 - \tfrac{1}{1}(\tfrac{1}{2}e)^2 - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}e^2)^2$$

$$- \tfrac{1}{5} \left(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} e^3\right)^2 - \text{2c.}\Big],$$

wenn man nur den Zähler nach Potenzen von x entwickelt und dann die einzelnen Glieder integrirt.

13) Es ist

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{a^{n+1}}.$$

Bei Herleitung dieser Formel sieht man, daß sie auch noch gilt, wenn a mit $a + b\sqrt{-1}$ vertauscht wird. Nun ist $(a + b\sqrt{-1})^{-(n+1)}$

$$= (a^2 + b^2)^{-\frac{(n+1)}{2}} \left[\cos (n+1) \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{b}{a}\right) - \sin (n+1) \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{b}{a}\right)\right]$$

(siehe Algebr. Analysis). Setzt man außerdem noch

$$e^{-(a+b\sqrt{-1})x} = e^{-ax}(\cos bx - \sqrt{-1} \cdot \sin bx),$$

und vergleicht dann in obigem Integral beiderseits die imaginären und reellen Theile, so folgt:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \sin \left((n+1) \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}\right).$$

14) Desgleichen

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \cos \left((n+1) \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}\right).$$

15) Aus der Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

folgt, wenn c das arithmetische Mittel von a und b, und die Function f(x) von solcher Beschaffenheit ist, daß sie zu beiden Seiten dieses Mittels dieselbe Reihe von Werthen durchläuft:

$$\int_a^b f(x)\, dx = 2 \int_a^c f(x)\, dx.$$

So wird z. B.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx;$$

und

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx.$$

16) Ist die Function f(x) so beschaffen, daß sie zu beiden Seiten des Mittelwerths von $x = c$ paarweise gleiche Werthe mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzt; so sind die beiden Integrale

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ und } \int_c^b f(x)\,dx$$

ebenfalls einander gleich, aber einander entgegengesetzt: d. h. es ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

So z. B. ist

$$\int_0^\pi \cos x\,dx = 0$$

und

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin x\,dx = 0.$$

§. 108. **Bemerkenswerthe Fälle bei dem Uebergange von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen.** Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

hat, wenn die Function f(x) innerhalb der gegebenen Grenzen a und b endlich und continuirlich bleibt, jederzeit einen endlichen bestimmten Werth, der einerseits von jenen Grenzen und anderseits von der Natur der Function abhängig ist. Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn jene Bedingung nicht mehr erfüllt ist, und zuweilen auch, wenn die Integrationsgrenzen aufhören endliche Größen zu sein. Einige einfache Beispiele werden dies zur Genüge zeigen.

Das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + C,$$

wo $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ unendlich sich herausstellt, wenn $x = a$ ist, gibt bei dem Uebergange zu dem bestimmten Integrale:

$$\int_0^x \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} - \frac{1}{a}.$$

Die rechte Seite dieses Ausdruckes hat einen negativen Werth, wenn a zwischen 0 und x liegt, während die Größe unter dem Integrationszeichen beständig positiv bleibt: Das negative bestimmte Integral kann sonach nicht als die Summe oder als das Integral der vorliegenden positiven Differentialelemente betrachtet werden.

Das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{x-a} = l\,(x-a) + C,$$

für welches $f\,(x) = \frac{1}{x-a}$ ebenfalls unendlich wird, wenn $x=a$ ist, liefert das bestimmte Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{x-a} = l\left(\frac{x-a}{-a}\right).$$

Dasselbe nimmt unter denselben Voraussetzungen einen imaginären Werth an, während die Größe unter dem Integralzeichen stets reell bleibt: es kann mithin das imaginäre bestimmte Integral nicht als die Summe der reellen Differentialelemente gelten.

Es wirft sich darum vor Allem hier die Frage auf, wie dergleichen Widersprüche beseitigt werden können und welche Bedeutung wir dem Ausdrucke

$$\int_a^b f\,(x)\,dx$$

beilegen müssen, wenn die Function $f\,(x)$ eine Unterbrechung der Continuität innerhalb des Intervalls $x=a$ bis $x=b$ erfährt. Wir antworten: Ereignet sich eine derartige Unterbrechung bei $x = c$, so kommt in der Reihe

$$f\,(a),\ f(a+\alpha), \ldots\ldots\ f\,(a+\overline{n-1}\alpha)$$

auch das Glied $f\,(c)$ vor, sobald $a + k\alpha = c$ wird. Wir denken uns deshalb das Integral in zwei andere zerlegt, welche die Intervalle a bis c und c bis b umfassen. Für $\frac{c-a}{n} = \alpha$ und $\frac{b-c}{n} = \alpha'$ wird dergestalt:

$$\int_a^c f\,(x)\,dx = \lim \cdot \alpha\,[f\,(a) + f\,(a+\alpha) \ldots + f\,(a+\overline{n-1}\alpha)],$$

$$\int_c^b f(x)dx = \lim \cdot \alpha'\,[f(c) + f(c+\alpha') \ldots + f(c+\overline{n-1}\alpha')];$$

oder mit anderen Worten:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$\lim\cdot\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx\right);$$

oder auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$\lim\left(\int_a^{c-\mu\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\nu\varepsilon}^b f(x)\,dx\right),$$

wobei ε und ε' unendlich kleine Größen bedeuten, dagegen μ und ν willkürliche Constanten darstellen, und $f(x)$ continuirlich bleibt, einerseits zwischen a und $c-\varepsilon$ oder a und $c-\mu\varepsilon$ und anderseits zwischen b und $c+\varepsilon'$ oder b und $c+\nu\varepsilon$. Dergestalt werden die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx \text{ und } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x},$$

in welchen die Function $f(x)$ unendlich oder discontinuirlich für $x=\infty$ oder $x=0$ wird, durch die Gleichungen bestimmt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \lim \int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{+\frac{1}{\nu\varepsilon}} e^x dx = \lim\left(e^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}\right) =$$

$$e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty;$$

und

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim \int_{\mu\varepsilon}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \frac{dx}{x} = \lim\, l\left(\frac{\frac{1}{\nu\varepsilon}}{\mu\varepsilon}\right)$$

$$= \lim\, l\cdot\left(\frac{\infty}{0}\right) = \infty.$$

Erleidet überhaupt an den zwischen a und b liegenden Stellen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ die Function $f(x)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, so ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \ldots + \int_{a_n}^b f(x)\,dx$$

$$= \lim\left(\int_a^{a_1-\mu_1\varepsilon} f(x)dx + \int_{a_1+\nu_1\varepsilon}^{a_2+\mu_2\varepsilon} f(x)dx \ldots\right.$$

$$\left. + \int_{a_n+\nu_n\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right),$$

wo ε wieder eine unendlich kleine Größe darstellt, und $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \ldots \mu_m \nu_n$ willkürliche Constanten bedeuten.

Im Falle daß die eine dieser Grenzen das negative Unendliche und die andere das positive Unendliche wird, ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\left(\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{a_1-\mu_1\varepsilon} f(x)dx + \int_{a_1+\nu_1\varepsilon}^{a_2-\mu_2\varepsilon} f(x)\,dx\right.$$

$$\left. \ldots + \int_{a_n+\nu_n\varepsilon}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)\,dx\right)$$

§. 109. **Unbestimmte Werthe der Integrale und deren sogenannte Hauptwerthe.** Die auf diesem Wege gefundenen Werthe der Integrale können völlig bestimmte endliche, oder unendliche, oder auch unbestimmte Größen sein, welche von den den willkürlichen Constanten μ, ν beigelegten Werthen abhängen. In dem letzteren Falle nennt Cauchy den besonderen Werth des Integrals, welcher dadurch erhalten wird, daß man in dem unbestimmten Ausdrucke sämmtliche willkürliche Constanten μ, ν der Einheit gleich annimmt, den Hauptwerth des Integrals.

So ist

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x} = \lim\left(\int_{-1}^{-\mu\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\nu\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right)$$

$$= \lim\left(l\,\mu\varepsilon + l\,\frac{1}{\nu\varepsilon}\right) = l\,\frac{\mu}{\nu},$$

welcher Werth völlig unbestimmt ist. Derselbe geht in Null über, wenn $\mu = \nu = 1$ gesetzt wird. Es wäre mithin Null der Hauptwerth des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x},$$

dessen allgemeiner Werth $= l\,\frac{\mu}{\nu}$ ist.

Die Gleichung

$$\int_0^x \sin ax\,dx = \frac{1}{a}(1 - \cos ax)$$

gibt den unbestimmten Werth:

$$\int_0^\infty \sin ax\,dx = \frac{1}{a}(1 - \cos\cdot\infty),$$

weil keine Grenze existirt, gegen welche der Cosinus eines Bogens convergirt, wenn der Bogen fortwährend wächst; übrigens liegt dieser unbestimmte Werth zwischen den Grenzen 0 und $\frac{2}{a}$.

Ebenso liefert die Gleichung

$$\int_0^x \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

den unbestimmten Werth

$$\int_0^\infty \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin\infty,$$

obschon derselbe zwischen den Grenzen $-\frac{1}{a}$ und $+\frac{1}{a}$ liegt.

§. 110. **Singuläre Werthe bestimmter Integrale.** Es lassen sich öfters aus den bestimmten Integralen Werthe ableiten, welche sich den gewöhnlichen Regeln der Berechnung der bestimmten Integrale entziehen; dergleichen Werthe werden singuläre Werthe bestimmter Integrale genannt. Eine solche Gattung singulärer Werthe entsteht häufig dadurch, daß man die Integrationsgrenzen an einer besonderen Stelle a unendlich nahe an einander rückt und die Function f (x) in der Nähe von x = a unendlich wird. Das bestimmte Integral

$$\int_a^{a+\alpha} f(x)\,dx$$

hat dann in der That einen Werth von der Form:

$$\alpha f(a + \vartheta\alpha),$$

wo ϑ als ein ächter Bruch aufzufassen ist. Liefert nun

$$\lim \cdot \int_a^{a+\alpha} f(x)\,dz$$

einen von Null verschiedenen Werth, der selbst unendlich werden kann, wenn a oder f (a) unendlich wird; so hat man eine Ausnahme von der Regel, daß der Werth eines zwischen gleichen Integrationsgrenzen genommenen Integrals verschwindet.

So verschwindet das Integral

$$\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + x^2}$$

nicht für $\varepsilon = 0$. Denn man hat

$$\int_0^x \frac{\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + x^2} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{\varepsilon}\right) - \text{arc}\,(\text{tang} = 0),$$

woraus für

$$\lim \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + x^2} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$= \text{arc}\,(\text{tang} = \infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Eine andere Klasse von singulären Werthen der bestimmten Integrale ergibt sich aus folgender Betrachtung. Kommt in dem Integral

$$\int_a^b f\,(x,\, k)\, dx$$

eine willkürliche Constante k vor, so wird der Werth des bestimmten Integrals offenbar von k abhängen. Legt man nun dem k einen besonderen Werth k′ bei, für welchen $f(x, k')$, ausgenommen für $x=c$, verschwindet; so darf man daraus noch nicht schließen, daß dann auch das Integral verschwinde. Denn der Ausdruck

$$\int_a^b f(x, k')dx = \lim \cdot \alpha\,[f\,(a, k') + f\,(a+\alpha, k') \ldots + f(a+\overline{n-1}\,\alpha, k')]$$

wird nur zum Verschwinden kommen, wenn sich $f\,(x,\, k')$ für jedes innerhalb des Intervalls a bis b enthaltene x annullirt. Dagegen darf man nicht behaupten, daß dieser Ausdruck Null werde, wenn für einen zwischen a und b gelegenen Werth $c = x$ die Größe $f\,(c,\, k')$ unendlich wird. Im Gegentheil kann das Integral

$$\int_a^b f\,(x, k')\, dx = \lim\, [\alpha f\,(c,\, k')]$$

noch einen gewissen von Null verschiedenen Werth haben.

Als Beispiel diene wieder das Integral

$$\int \frac{\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + x^2}.$$

Dasselbe liefert

$$\int_{-b}^{b} \frac{2\, dx}{\varepsilon^2 + x^2} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{b}{\varepsilon}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = -\frac{b}{\varepsilon}\right)$$

$$= 2 \text{ arc} \left(\text{tang} = \frac{b}{\varepsilon}\right)$$

woraus für $\varepsilon = 0$ der singuläre Werth des Integrals $= 2$ arc (tang$=\infty$) $= \pi$ hervorgeht.

3. Specielle bestimmte Integrale.

§. 111. **Specielle bestimmte Integrale.** Es ereignet sich öfters, daß man den Werth des Integrals

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

für gewisse specielle Werthe der Grenzen genau angeben kann, ohne den Ausdruck des unbestimmten Integrals zu kennen. Auch trifft es sich, daß das zwischen jenen speciellen Grenzen genommene Integral, wenn selbst die unbestimmte Integration sich bewerkstelligen läßt, eine einfachere Gestalt erhält oder sonstige bemerkenswerthe Eigenschaften besitzt, welche dem nach den gewöhnlichen Regeln gefundenen bestimmten Integrale nicht mehr zukommen. Dergleichen Integrale wollen wir specielle bestimmte Integrale nennen. Die Theorie derselben, sowie ihre Herleitung, bildet gegenwärtig einen sehr wichtigen Zweig der Analysis, weil bei den Anwendungen der Integralrechnung die Integrale oft blos deswegen gesucht werden, um ihre Werthe innerhalb bestimmter Grenzen auszumitteln, wie solche es gerade die besonderen Umstände des aufzulösenden Problems darbieten. Die Auffindung der wichtigsten dergleichen specieller bestimmter Integrale sei zunächst unsere Aufgabe.

Zur Erläuterung des eben Gesagten diene als Beispiel das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$$

Um den Werth desselben aufzufinden, bemerken wir, daß dieser Werth mit dem des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$$

identisch ist, weil sin x und cos x zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ganz die nämlichen Werthe annehmen. Es ist folglich

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx \right.$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Dasselbe Resultat würden wir auch mittelst des unbestimmten Integrals, welches $= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2 x + C$ gefunden haben. Allein es galt uns hier nur darum, zu zeigen, wie das richtige Verhältniß zwischen den Grenzen des Integrals und der Form der Differentialfunction zur Herleitung gewisser bestimmter Integrale führen kann, ohne den allgemeinen Ausdruck dieser Integrale zu kennen.

Als eine weitere Erläuterung des Gesagten wollen wir annehmen, daß der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 \frac{l\,(1+x)}{1+x^2} \, dx = J$$

gefunden werden solle. Man denke sich x als Tangente eines Winkels φ, mithin $dx = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$. Damit nun die Tangente das Intervall von 0 bis 1 durchlaufe, muß φ die Grenzwerthe 0 und $\frac{\pi}{4}$ erhalten, so daß nunmehr

$$J = \int_0^{\pi/4} l\,(1 + \text{tang}\,\varphi) \, d\varphi = \int_0^{\pi/4} l \cdot \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos \varphi} \, d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}\, l \cdot 2 \int_0^{\pi/4} d\varphi + \int_0^{\pi/4} l \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) d\varphi$$

$$- \int_0^{\pi/4} l \cdot \cos \varphi \, d\varphi$$

wird. Nun ist ersichtlich, daß die beiden letzteren Integrale gleich sind, weil in dem letzteren Integral von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ die nämlichen Bogen in umgekehrter Ordnung erscheinen, als wenn in dem anderen Aus-

druck $\frac{\pi}{4} - \varphi$ dieselben von $\frac{\pi}{4}$ bis 0 abnehmen. Es bleibt also nichts übrig, als

$$F = \tfrac{1}{2}\, l\, 2 \int_0^{\pi/4} d\varphi = \frac{\pi}{8}\, l\, 2.$$

Die Methoden, um dergleichen bestimmte Integrale aufzufinden, bestehen hauptsächlich darin: 1) Die Werthe der fraglichen Integrale aus anderen schon bekannten Integralen abzuleiten durch Differentiation oder Integration unter dem Zeichen $\int$; 2) Die Betrachtung der doppelten Integrale zu Hülfe zu nehmen; 3) Von den reellen Ausdrücken zu imaginären Ausdrücken überzugehen; 4) Besondere Transformationen vorzunehmen oder Beziehungen zwischen der Function, welche das vorgelegte Integral darstellt, und ihren Differentialquotienten aufzusuchen, dergestalt daß daraus die Natur jener Function erschlossen werden kann. Von den hier in Kürze angeführten Methoden möge nun Einiges und insbesondere Das was in der Anwendung am häufigsten vorkommt, mitgetheilt werden.

§. 112. **Differentiation und Integration unter dem Zeichen $\int$.** Der Ausdruck des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x, c)\, dx$$

hängt von den Integrationsgrenzen a, b, der Natur der Function und der in derselben vorkommenden constanten Größe c ab. Einer derartigen Auffassung gegenüber kann man somit den Werth des bestimmten Integrals als eine Function jener Integrationsgrenzen und dieser willkürlichen Constante betrachten und hiernach dem bestimmten Integral einen Differentialquotienten in Bezug auf eine oder mehrere gedachter Größen zuschreiben. Wir wollen dies in folgender Weise thun und vor der Hand nur die willkürliche Constante c sich ändern lassen, indem wir die Integrationsgrenzen als unabhängig davon ansehen. Es wäre sonach das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x, c)\, dx$$

eine Function von c, welche durch F (c) bezeichnet sein mag. Indem nun α einen unendlich kleinen Zuwachs von c darstellt, ergibt sich:

$$F(c+\alpha) - F(c) = \int_a^b f(x, c+\alpha)dx - \int_a^b f(x, c)\, dx$$

$$=\int_a^b dx\,[f(x, c+\alpha) - f(x, c)].$$

Wenn nun die Function f (x, c) für alle Werthe von x zwischen b und a, so wie für alle in Betracht zu ziehenden Werthe von c stetig bleibt, und dasselbe für $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ statt hat; so ist

$$f(x,c+\alpha)-f(x,c)=\alpha d\frac{f(x, c)}{dc}+\frac{\alpha^2}{2}d^2\frac{f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2},$$

wo $1 > \vartheta > 0$. Mithin ist jetzt

$$\frac{F(c+\alpha)-F(c)}{\alpha}=\int_a^b d\frac{f(x, c)}{dx}\cdot dx$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int_a^b d^2\frac{f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2}\,dx.$$

Läßt man jetzt α gegen Null eilen, so erhält man F′ (c) oder

$$\frac{d}{dc}\int_a^b f(x, c)\,dx=\int_a^b d\frac{f(x, c)}{dc}\,dx,$$

vorausgesetzt, daß

$$\lim \alpha\int_a^b d^2\frac{f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2}\,dx$$

$= 0$ ist.

Wenn die eben erwähnte Bedingung erfüllt ist, differentiirt man also ein bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x, c)\,dx$$

in Bezug auf c, indem man die Function f (x, c) unter dem Integralzeichen in Rücksicht auf diese Größe differentiirt.

Der Ausdruck

$$\lim \alpha\int_a^b d^2\cdot\frac{f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2}\,dx$$

verschwindet unter Andern jedesmal dann, wenn die beiden Integrale

$$\int_a^b \frac{df(x, c)}{dc}\,dx$$

und

$$\int_a^b d^2 \frac{f(x, c)}{dc^2} dx$$

nicht unendlich werden. Denkt man sich in der Gleichung

$$\frac{F(c+\alpha)-F(c)}{\alpha} = \int_a^b d \frac{f(x, c)}{dc} dx$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{d^2 f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2} dx$$

die Größe α vor der Hand noch endlich; so muß das Integral

$$\int_a^b d^2 \frac{f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2} dx$$

endlich sein, weil die linke Seite der Gleichung und das erste Integral auf der rechten Seite derselben es sind.

Ist nun der Werth des Integrals

$$\int_a^b d^2 \frac{f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2} dx$$

auch für $x = 0$ noch endlich, so muß er zwischen $\alpha = \alpha$ und $\alpha = 0$ ein endliches Maximum M erreichen, dergestalt daß dem absoluten Werthe nach

$$\frac{\alpha}{2}\int_a^b d^2 \frac{f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2} dx < \frac{\alpha}{2} M,$$

also

$$\lim \alpha \int_a^b d^2 \frac{f(x, c+\vartheta\alpha)}{dc^2} dx = 0$$

ist. Sollte die Function f imaginär sein, so muß man sie auf die Form $P+Q\sqrt{-1}$ bringen und auf die reellen Größen P und Q die obige Ueberlegung anwenden.

Die Integration eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x, c)\, dx$$

in Bezug auf die Constante c geschieht ebenfalls durch Integration

von f, so daß

$$\int dc \int_a^b f(x,c)\, dx = \int_a^b dx \int f(x,c)\, dc + C.$$

Will man die Richtigkeit dieser Gleichung durch Differentiation nachweisen, so findet man durch Anwendung der obigen Regel, daß

$$\int_a^b f(x,c) \text{ und } \int_a^b d\, \frac{f(x,c)}{dc}\, dx$$

nicht unendlich werden dürfen. Da das gegebene Integral immer als endlich vorausgesetzt wird, so ist also die Integration stets erlaubt, wenn

$$\int_a^b d\, \frac{f(x,c)}{dc}\, dx$$

nicht unendlich wird.

Das bestimmte Integral

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin cx}{x}\, dx$$

darf z. B. nicht in Bezug auf c differentiirt werden, weil das Integral

$$\int_0^\infty x \sin cx\, dx$$

unendlich ist. Die Integration in Bezug auf c ist dagegen stets erlaubt, weil

$$\int_0^\infty \cos cx\, dx$$

immer zwischen den Grenzen $\frac{1}{c}$ und $-\frac{1}{c}$ eingeschlossen bleibt.

Also ist

$$\int_0^c u dc = \int_0^\infty \frac{1 - \cos cx}{x^2}\, dx:$$

es würde aber keinen Sinn haben,

$$\frac{du}{dc} = \int_0^\infty \cos cx\, dx$$

zu setzen, indem letzteres Integral unbestimmt ist.

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Falle über, in welchem die Integrationsgrenzen a, b gleichzeitig von c abhängig sind. Der Werth des Integrals

$$\int_a^b f(x,c)\, dx$$

ist dann eine Function dreier Variabeln a, b, c, deren beide erste wiederum von der letzten abhängen. Man hat demnach, wenn F den Werth des Integrals darstellt,

$$\frac{dF}{dc} = \left(\frac{dF}{da}\right) \cdot \frac{da}{dc} + \left(\frac{dF}{db}\right)\frac{db}{dc} + \left(\frac{dF}{dc}\right),$$

wobei

$$\left(\frac{dF}{da}\right), \left(\frac{dF}{db}\right), \left(\frac{dF}{dc}\right)$$

die drei Derivirten sind, die man aus F erhält, indem man der Reihe nach a, b und c als unabhängige Veränderliche ansieht. Diese Differentialquotienten sind nun im vorliegenden Falle:

$$-f(a, c), f(b, c), \int_a^b d\frac{f(x, c)}{dc} dx;$$

wonach sich ergibt:

$$\frac{d\int_a^b f(x, c)\, dx}{dc} = \int_a^b \frac{df(x, c)\, dx}{dc}$$

$$+ f(b, c)\frac{db}{dc} - f(a, c)\frac{da}{dc}.$$

Bemerken müssen wir jedoch nochmals, daß das letzte Theorem wie sein Vorhergehendes analoges

$$\frac{d\int_a^b f(x, c)\, dx}{dc} = \int_a^b d\frac{f(x, c) dx}{dc}$$

nur so lange Gültigkeit behalten, als die Function

$$\int_a^b \frac{d^2 f(x, c)\, dx}{dc}$$

zwischen den Integrationsgrenzen und für alle in Anspruch genommenen Werthe von c nicht unendlich wird, wie denn auch zuweilen die Fälle, in denen eine der Integrationsgrenzen unendlich ist, oder beide es sind, bei der Anwendung eine specielle Untersuchung erfordern können.

§. 113. Anwendung der ersten Methode mittelst Differentiirens.

1) Wenn man die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$$

n mal hintereinander in Bezug auf a differentiirt, findet man

$$\int_0^\infty \frac{1\cdot2\cdot3\ldots n dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\pi}{2^n a^n \sqrt{a}};$$

woraus

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^n\sqrt{a}}.$$

2) Die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$$

liefert, wenn man sie n mal nacheinander in Bezug auf a differentiirt:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{a^{n+1}}.$$

3) Die Gleichungen

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cdot dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cdot dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

geben, wenn man sie n mal nacheinander in Bezug auf a differentiirt, die Ausdrücke:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos bx\cdot dx = 1\cdot2\cdot3\ldots n\ \frac{\cos(n+1)\,\mathrm{arc}}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}}\left(\mathrm{tang} = \frac{b}{a}\right);$$

und

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\sin bx\cdot dx = 1\cdot2\cdot3\ldots n\ \frac{\sin(n+1)\,\mathrm{arc}}{(a+b^2)^{\frac{n+1}{2}}}\left(\mathrm{tang} = \frac{b}{a}\right).$$

4) Es sei

$$u = \int_0^\infty \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx.$$

Wenn man in Bezug auf a differentiirt, entsteht:

$$\frac{du}{da} = \int_0^\infty \frac{2\sin ax\cos ax}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}\, dx,$$

d. h. $\frac{du}{da} = \frac{\pi}{2}$, so lange $a > 0$. Für $a = 0$ ist aber $u'_0 = 0$. Um

u zu erhalten, setze man

$$u - u_0 = \lim \frac{a}{n}\left(u_0' + u'_{\frac{a}{n}} + u'_{\frac{2a}{n}} \dots + u'_a\right)$$

$$= \lim \frac{a}{n} \cdot n \frac{\pi}{2} = a \frac{\pi}{2}.$$

Da nun

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin 0}{x}\right)^2 dx = u_0 = 0$$

ist, so ergibt sich

$$u = \int_0^\infty \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = \frac{a\pi}{2}.$$

§. 114. **Anwendungen der ersten Methode mittelst Integrirens.**

1) Wenn man in der Gleichung

$$\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m},$$

wo $m > 1$ vorausgesetzt wird, auf beiden Seiten mit dm multiplicirt und dann zwischen den Grenzen a und b in Bezug auf m integrirt, so bekommt man:

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{lx} dx = l \frac{b}{a}.$$

2) Man multiplicire die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$$

auf beiden Seiten mit da und integrire dann nach a von $a = c$ anfangend. Es entspringt dadurch:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} dx = l \frac{a}{c}.$$

3) Die Gleichungen

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

geben, wenn man mit da multiplicirt und in Bezug auf a integrirt, wiederum von a = c anfangend:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x} \sin bx\, dx = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{b}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{c}{b}\right)$$

$$= \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{b\,(a-c)}{b^2+ac}\right).$$

Setzt man $a = \infty$, $c = 0$, so kommt

$$\int_0^\infty \frac{\sin\, bx}{x}\, dx = \pm \frac{\pi}{2},$$

je nachdem b positiv oder negativ ist. Für $b = 0$ ist auch das Integral Null, und

$$\int_0^\infty \frac{\cos\, bx}{x}\, dx = \infty.$$

4) Durch Subtraction der eben erhaltenen Formeln

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x} = \tfrac{1}{2}\, l a^2$$

und

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x} \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\, l \frac{a^2+1}{c^2+1}$$

entsteht

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}-(e^{-cx}-e^{-ax}) \cos x\, dx}{x} = \tfrac{1}{2}\, l \cdot \frac{1+c^2}{1+\frac{1}{a^2}}.$$

Für $c=0$ und $a=\infty$ ergibt sich die früher einmal gebrauchte Formel:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - \cos\, x\, dx}{x} = 0.$$

§. 115. **Doppelte bestimmte Integrale.** Es sei f (x, y) eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y, welche innerhalb der Grenzen x_0, x_1 und y_0, y_1 stets einen endlichen Werth behält. Indem man eine solche Function in Bezug auf y bei constant bleibendem x integrirt und das so entstandene Resultat einer abermaligen Integration in Bezug auf x unterwirft; so hat man ein Doppelintegral, welches auf folgende Weise:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f\,(x,\, y)\, dy$$

bezeichnet wird. Der fragliche Ausdruck ist offenbar die Summe aller unendlich kleinen Werthe der zweiten Ordnung, welche die Function $f(x, y)\, dx\, dy$ annimmt, wenn man darin x zwischen den Grenzen x_0, x_1 nach dem unendlich kleinen Zuwachs dx und y zwischen den Grenzen y_0, y_1 nach dem unendlich kleinen Zuwachs dy sich ändern läßt. Oder mit andern Worten setzt man $\frac{y_1 - y_0}{n} = \beta$ und $\frac{x_1 - x_0}{m} = \alpha$, wo m und n unendlich wachsende Zahlen darstellen; so ist das in Frage stehende Doppelintegral der Grenzwerth folgender Doppelsumme:

$$\begin{aligned}\alpha\beta\ [&f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0+\beta) + \ldots + f(x_0, y_0+\overline{n-1}\beta)\\ &+ f(x_0+\alpha, y_0) + f(x_0+\alpha, y_0+\beta) \ldots + f(x_0+\alpha, y_0+\overline{n-1}\beta)\\ &+ f(x_0+2\alpha, y_0) + f(x_0+2\alpha, y_0+\beta) \ldots + f(x_0+2\alpha, y_0+\overline{n-1}\beta)\\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &+ f(x_0+\overline{m-1}\alpha, y_0) + f(x_0+\overline{m-1}\alpha, y_0+\beta) \ldots +\\ &\qquad\qquad + f(x_0+\overline{m-1}\alpha, y+\overline{n-1}\beta)].\end{aligned}$$

Aus dieser Definition ergibt sich, daß die Anordnung der Integration auf den Werth des bestimmten Doppelintegrals von keinem Einfluß ist, und daß man ohne Unterschied für obiges Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dy \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dx$$

oder

$$\int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, dx\, dy$$

setzen kann, so oft x_0, x_1, y_0, y_1 und f endlich sind.

Der Ausdruck

$$\int dx \int f(x, y)\, dy$$

ist der eines doppelten unbestimmten Integrals und die durch eine zweifache Operation des Integrirens erhaltenen Function $F(x, y)$ kann sich von der Function $F_1(x, y)$, welche eine zweifache unbestimmte Integration in der umgekehrten Ordnung liefert, wie es der

Ausdruck

$$\int dy \int f(x, y)\, dx$$

andeutet, nur durch das Hinzukommen der Glieder von der Form

$$\varphi(x) + \psi(y) + C$$

unterscheiden, wo φ, ψ willkürliche Functionen und C eine willkürliche Constante bezeichnen, welche Glieder durch eine zweimalige Operation Differentiirens, die eine in Bezug auf x und die andere in Bezug auf y zum Verschwinden kommen.

Insofern die Function f (x, y) innerhalb der doppelten Integrationsgrenzen durch das Unendliche geht, so kann die doppelte Integration verschiedene Resultate liefern, wenn man die einfachen Integrationen in verschiedener Ordnung vornimmt, wie dies an folgendem Beispiele ersichtlich ist.

Es sei das doppelte Integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$$

aufzusuchen, wo der Ausdruck $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ für die innerhalb der Integrationsgrenzen liegende Werthe $x = 0$, $y = 0$ sich unendlich herausstellt. Integrirt man nun zuerst in Beziehung auf x, so hat man

$$\int_{-1}^{1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{2}{1+y^2}.$$

Wird darauf in Bezug auf y integrirt, so bekommt man

$$2\int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} = \pi.$$

Die in umgekehrter Ordnung verrichtete Integration liefert dagegen zunächst den Ausdruck

$$\int_{-1}^{1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = -\frac{2}{1+x^2};$$

und hierauf das Resultat

$$-2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\pi,$$

welches von dem oben erhaltenen Werthe um 2π verschieden ist.

Es wirft sich hier die Frage auf, die Differenz der beiden Ausdrücke

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy$$

und

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, dx$$

zu ermitteln, wenn die Function f (x, y) innerhalb der Integrationsintervalle für $x = a$ und $y = b$ unendlich oder discontinuirlich wird, da die Identität jener beiden Ausdrücke dann nicht mehr behauptet werden darf. Wir betrachten zu diesem Behuf überhaupt eine Function F (x, y) von solcher Beschaffenheit, daß

$$\frac{d^2F(x, y)}{dx\, dy} = f(x, y)$$

ist. Es sei nun

$$\frac{d \cdot F(x, y)}{dx} = \varphi(x, y)$$

und

$$\frac{d\, F(x, y)}{dy} = \psi(x, y)$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft:

$$\varphi(x, y) = \int f(x, y)\, dy$$

und

$$\psi(x, y) = \int f(x, y)\, dx.$$

Hiernach kann das doppelte Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy\, dx,$$

sowohl durch:

$$\int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_0)]\, dx,$$

wie durch:

$$\int_{y_0}^{y_1} [\psi(x_1, y) - \psi(x_0, y)]\, dy$$

dargestellt werden, dergestalt daß im Allgemeinen, insofern f (x, y) innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich wird,

$$\int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]dx = \int_{y_0}^{y_1} [\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

ist. — Setzen wir nun voraus, daß $f(x,y)$ für $x=a$, $y=b$ unendlich sich herausstellt, und bezeichnen wir durch ε eine gegen Null convergirende positive Zahl; so ergibt sich nach der vorhergehenden Gleichung:

$$\int_{x_0}^{a-\varepsilon} [\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]dx + \int_{a+\varepsilon}^{x_1} [\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} [\psi(x_1,y) - \psi(a+\varepsilon,y) + \psi(a-\varepsilon,y) - \psi(x_0,y)]\,dy$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} [\psi(x_1,y)-\varphi(x_0,y)]\,dy - \int_{y_0}^{y_1} [\psi(a+\varepsilon,y)-\psi(a-\varepsilon,y)]\,dy,$$

da das Unendlichwerden von $f(x,y)$ nur dann eintritt, wenn $y=b$ und zugleich $x=a$ wird. An der Grenze entsteht:

$$\int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x,y_1)-\varphi(x-y_0)]dx = \int_{y_0}^{y_1} [\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)\,dy$$

$$-\lim \int_{y_0}^{y_1} [\psi(a+\varepsilon,y)-\psi(a-\varepsilon,y)]dy;$$

oder

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy\,dx - \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{y_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \lim \int_{y_0}^{y_1} [\psi(a+\varepsilon,y)-\psi(a-\varepsilon,y)]\,dy.$$

Hiernach wäre die Differenz zwischen den beiden Werthen bestimmt, welche sich für das Doppelintegral bei verschiedenen Anordnungen der Integration ergeben. In dem oben angeführten Beispiele hat man:

$$\psi(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ a=0;$$

$$\psi(a+\varepsilon,y) - \psi(a-\varepsilon,y) = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2};$$

$$\lim \int_{y_0}^{y_1} [\psi(a+\varepsilon, y) - \psi(a-\varepsilon, y)] dy = 2 \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + y^2} dy$$

$$= 2 \left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{1}{\varepsilon}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = -\frac{1}{\varepsilon}\right)\right],$$

welcher Werth sich auf 2π reducirt, wenn $\varepsilon = 0$ gesetzt wird. — Wenn innerhalb der Integrationsgrenzen mehrere Systeme von Werthen von x, y vorkommen, für welche f (x, y) unendlich wird; so zerlegt man das Doppelintegral

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dx\, dy$$

in mehrere Integrale, in welchen f (x, y) jedesmal stetig bleibt.

§. 116. **Beispiele zu der zweiten Methode.**

1) Um das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

zu bestimmen, multipliciren wir dasselbe mit einem andern Integral von derselben Form, worin blos y statt x gesetzt ist. Man erhält so:

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \cdot \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx.$$

Macht man nun $y = xt$, wo t eine neue Veränderliche bezeichnet, deren Grenzen wieder 0 und ∞ sind, und $dy = x\, dt$ ist; so bekommt man

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \cdot \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)}\, x\, dx \cdot dt.$$

Daraus entspringt, wenn man im zweiten Theil die Integration in Bezug auf x ausführt:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2};$$

folglich

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

ein bemerkenswerther Ausdruck, der vielfache Anwendung findet.

2) Aus der letzteren Gleichung entspringt, wenn man $x\sqrt{a}$ statt x setzt:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

Differentiirt man nun beide Theile der vorstehenden Gleichung n mal hinter einander in Bezug auf a, so erhält man, in Erwägung daß die successiven nach a genommenen Differentialquotienten von $\int e^{-ax^2}$ endlich bleiben von $x=0$ bis $x=\infty$, folgendes Resultat:

$$\int_0^\infty x^{2n}\, e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{a^n}.$$

Aus demselben entsteht, wenn auf beiden Seiten mit

$$\frac{(2\,b)^{2n}}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n)},$$

wo b eine willkürliche Constante bezeichnet, multiplicirt wird:

$$\int_0^\infty \frac{(2bx)^{2n}}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n)} e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{1\cdot2\ldots n}\left(\frac{b^2}{a}\right)^n.$$

Addirt man zur Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$$

alle Resultate, welche sich aus den vorhergehenden Gleichungen für $n=1, 2, 3\ldots$ ergeben; so erhält man:

$$\int_0^\infty \left[1 + \frac{(2bx)^2}{1\cdot2} + \frac{(2bx)^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{(2bx)^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots\right] e^{-ax^2}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\left[1 + \frac{1}{1}\,\frac{b^2}{a} + \frac{1}{1\cdot2}\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{b^2}{a}\right)^3 + \ldots\right],$$

oder

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{2}\left[e^{2bx} + e^{-2bx}\right] e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{a}}.$$

3) Nimmt man die willkürliche Constante b imaginär an, so entspringt aus dem letzten Resultat folgende bemerkenswerthe Formel:

$$\int_0^\infty \cos 2\,bx\; e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\; e^{-\frac{b^2}{a}},$$

oder für $a = m^2$:

$$\int_0^\infty \cos 2bx\; e^{-m^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,m}\; e^{-\left(\frac{b}{m}\right)^2}.$$

4) Aus den vorstehenden Gleichungen ergeben sich unmittelbar folgende Ausdrücke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x^{2n}\, dx = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi};$$

außerdem ist für alle ganzen positiven Werthe von n:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x^{2n+1}\, dx = 0,$$

indem die Elemente des Integrals sich paarweise gegenseitig tilgen.

§. 117. **Beispiele zu der dritten Methode**. Die Combination imaginärer Symbole läßt sich bei der Entwickelung bestimmter Integrale häufig mit Vortheil anwenden, wie dies nachstehende Beispiele zeigen werden.

1) Es sei

$$u = \int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)\, dt.$$

Daraus entspringt

$$\frac{du}{dr} = \int_0^{2\pi} e^{t\sqrt{-1}}\, f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)\, dt,$$

wenn $f'\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ und $f''\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ endlich bleiben, oder auch

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r\sqrt{-1}}\left[f\left(re^{2\pi\sqrt{-1}}\right) - f\left(re^0\right)\right] = 0,$$

weil $e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^0 = 1$.

Wenn also $f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)$ endlich bleibt für alle Werthe von r, z. B. zwischen r_0 und 0; so ist u von r unabhängig: man hat also z. B. nur $r=0$ zu setzen, um

$$u = \int_0^{2\pi} f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) dt = \int_0^{2\pi} f(0)\, dt = 2\pi f(0)$$

zu erhalten. — Es sei z. B.

$$f\left(re^{t\sqrt{-1}}\right) = l\left(1 - re^{t\sqrt{-1}}\right).$$

Diese Function ist endlich, so lange $r < 1$, mithin wird

$$\int_0^{2\pi} l\left(1 - re^{t\sqrt{-1}}\right) dt = 0.$$

Da nun

$$l\,(1-re^{t\sqrt{-1}}) = l\,(1-r\cos t - r\sqrt{-1}\sin t)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,l\,[(1-r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t] + \sqrt{-1}.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{-r\sin t}{1-r\cos t}\right)$$

(siehe algebraische Analysis §. 142); so ist

$$\int_0^{2\pi} l(1-2r\cos t+r^2)\,dt=0;\ \int_0^{2\pi} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right) = 0.$$

Wenn $a > 1$, so ist

$$\int_0^{2\pi} l\,(1-2a\cos t+a^2)\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} l\,a^2\left(1-\frac{2}{a}\cos t+\frac{1}{a^2}\right)dt = 2\pi\ la^2$$

$$+\int_0^{2\pi} l\left(1-\frac{2}{a}\cos t+\frac{1}{a^2}\right)dt.$$

Wegen $\frac{1}{a} < 1$ ergibt sich für $a > 1$ der Ausdruck:

$$\int_0^{2\pi} l\,(1-2a\cos t+a^2)\,dt = 2\pi\ la^2.$$

2) Setzt man in dem Ausdrucke

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,a}$$

$$a = \frac{(1+\sqrt{-1})}{\sqrt{2}}\ \alpha;$$

so bekommt man

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2x^2\sqrt{-1}}\,dx = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2\alpha}\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},$$

oder wenn man für die Exponentialgröße ihren Werth in Sinus und Cosinus setzt:

$$\int_0^{\infty}(\cos\alpha^2x^2-\sqrt{-1}\sin^2\alpha^2x^2)\,dx = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2\alpha}\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},$$

welches Resultat in die beiden folgenden zerfällt:

$$\int_0^{\infty}\sin\alpha^2x^2\cdot dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^{\infty}\cos\alpha^2x^2\cdot dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Aus demselben entsteht, wenn x für $\alpha^2 x^2$ gesetzt wird:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3) In das Integral

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}} - e^{-ab}}{b^2+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$$

führe man eine imaginäre Größe ein und setze

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+y\sqrt{-1})\, dx.$$

Man kann nun, um die Differentiirbarkeit von f (y) in Bezug auf y nachzuweisen, zeigen daß f(y), f′(y)... für keinen positiven Werth von y unendlich werden. Zuvörderst scheint der Ausdruck

$$F(x+y\sqrt{-1}) = \frac{e^{a(x+y\sqrt{-1})\sqrt{-1}} - e^{-ab}}{b^2+(x+y\sqrt{-1})^2}$$

für $y = b$, $x = 0$ wegen des verschwindenden Nenners unendlich zu werden. Es wird aber alsdann auch der Zähler Null und der Werth des Bruches ist gleich $\frac{ae^{-ab}}{2b}$; wonach sich die in Frage stehende Endlichkeit von f (y), f′ (y) ... nachweisen läßt, so lange y positiv ist.

Man hat nun

$$\frac{df}{dy} = \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} F'(x+y\sqrt{-1})\, dx$$

$$= \sqrt{-1}\,[F(\infty+y\sqrt{-1}) - F(-\infty+y\sqrt{-1})] = 0,$$

weil für jedes positive y die unter dem Integralzeichen befindliche Function für $x = \pm\infty$ verschwindet. Aus $\frac{df(y)}{dy} = 0$ entspringt wieder $f(\infty) - f(0) = 0$, und da f(y) für $y = \infty$ verschwindet, so bleibt $f(0) = 0$, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}} - e^{ab}}{b^2+x^2}\, dx = 0.$$

Durch die Vergleichung der reellen und imaginären Theile ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ab}}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{b}\, e^{-ab},$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{\cos\ ax}{b^2+x^2}\ dx = \frac{\pi}{2b}\ e^{-ab}.$$

4) Durch partielle Differentiation in Bezug auf a der vorstehenden Gleichung erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{b^2+x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}\ e^{-ab}.$$

Eine weitere Differentiation nach a ist aber unstatthaft, weil der zweite Differentialquotient von

$$\frac{x\ \sin\ ax}{b^2\ +\ x^2}$$

in Bezug auf a gleich

$$-\frac{x^3\ \sin ax}{b^2\ +\ x^2} = -\ x\ \sin\ ax\ +\ \frac{b^2 x\ \sin ax}{b^2+x^2}$$

ist, eine Function, welche in dem Intervall von $x=0$ bis $x=\infty$ nicht endlich bleibt, indem das Product x sin ax etwas Unendliches darstellen kann, sobald man sich x unter der Form

$$\frac{2n+1}{2a}\ \pi$$

denkt, wo n eine ganze beliebig große Zahl ist.

Dagegen kann man die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\cos\ ax}{b^2+x^2}\ dx = \frac{\pi}{2b}\ e^{-ab}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{b^2+x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}\ e^{-ab}$$

eine beliebige Anzahl mal in Bezug auf b differentiiren, weil die zu dergleichen Differentiationen erforderlichen Bedingungen erfüllt sind.

§. 118. Beispiele zu der vierten Methode.

1) Es sei

$$u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin\ x\ dx.$$

In dem Integral

$$\int_0^{1/2\pi} l\ \cos\ x\ dx$$

kommt nun genau dieselbe Summe einzelner Differentiale vor, wie in

u, nur in umgekehrter Ordnung; mithin ist auch

$$u = \int_0^{\pi/2} l \cos x \, dx;$$

folglich

$$2u = \int_0^{1/2\pi} (l \cos x + l \sin x) \, dx,$$

oder

$$2u = \int_0^{\pi/2} l \sin 2x \, dx + \int_0^{1/2\pi} l \tfrac{1}{2} \, dx,$$

oder

$$2u = \tfrac{1}{2} \int_0^{1/2\pi} l \sin 2x \, d.2x + \frac{\pi}{2} l \tfrac{1}{2}.$$

Das unbestimmte Integral von $l \sin 2x \cdot d\,2x$ hat ganz dieselbe Form wie das von $l \sin x \, dx$; nur erhält es einen doppelten so großen Umfang wie das andere, wenn beide zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommen werden. Hieraus folgt, wenn man weiter erwägt, daß in dem Intervall von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$ für $\sin x$ die nämlichen Werthe in umgekehrter Ordnung vorkommen wie in dem Intervall von $x = \frac{\pi}{2}$ bis $x = \pi$, die Relation:

$$\int_0^{1/2\pi} l \sin 2x \; d\,2x = \int_0^{\pi} l \sin x \, dx = 2u,$$

mit Hülfe deren sich ergibt:

$$u = \int_0^{\pi/2} l \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} l \tfrac{1}{2}.$$

2) Die beiden Integrale

$$\int_0^a f(x) \, dx \text{ und } \int_0^a f(a-x) \, dx$$

sind gleich, weil in beiden dieselben Elemente nur in umgekehrter Ordnung vorkommen. Mithin ist z. B.

$$\int_0^{\pi} x^2 l \sin x \, dx = \int_0^{\pi} (\pi-x)^2 l \sin (\pi-x) \, dx,$$

oder wegen

$$\sin(\pi - x) = \sin x,$$

$$0 = \int_0^\pi (\pi^2 - 2\pi x)\, l \sin x \cdot dx,$$

oder

$$\int_0^\pi x\, l \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi l \sin x\, dx.$$

Mit Berücksichtigung des vorhin gefundenen Ausdruckes findet man

$$\int_0^\pi x\, l \sin x\, dx = \frac{\pi^2}{2}\, l\, \tfrac{1}{2}.$$

3) Um das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{b^2 + x^2} \cdot \frac{\sin 2ax}{1 - 2r \cos 2ax + r^2}$$

zu bestimmen, erwägen wir zunächst, daß der zweite Factor des Integrals so oft $r < 1$

$$\frac{\sin 2ax}{1 - 2r \cos 2ax + r^2} = \sin 2ax + r \sin 4ax + r^2 \sin 6ax + r^3 \sin 8ax + \text{etc.}$$

ist Indem wir hierauf diese Entwickelung mit dem ersten Factor des Integrals multipliciren, gelangen wir zu einer Reihe in der Formel

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx \cdot \sin kx}{b^2 + x^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-kb}$$

enthaltener Ausdrücke. Setzen wir in dieser Formel nach einander

$$k = 2a,\ 4a,\ 6a \ldots;$$

so bekommen wir

$$\int \frac{x\, dx}{b^2 + x^2} \cdot \frac{\sin 2ax}{1 - 2r \cos 2ax + r^2} =$$

$$\frac{\pi}{2} \left(e^{-2ab} + r e^{-4ab} + r^2 e^{-6ab} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{2ab} - r} \ldots\ldots\ldots r < e^{2ab}$$

Durch Vertauschung des Zeichens von r erhalten wir:

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{b^2 + x^2} \cdot \frac{\sin 2ax}{1 + 2r \cos 2ax + r^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{2ab} + r}.$$

4) Multiplicirt man die beiden Theile der eben gefundenen zwei Gleichungen mit 4r da und integrirt dann in Bezug auf a, so findet man

$$\int_0^\infty \frac{dx}{b^2+x^2}\, l(1+r^2-2r\cos 2ax) = \frac{\pi}{b}\, l\,(1-re^{-2ab}),$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{b^2+x^2}\, l\,(1+r^2+2r\cos 2ax) = \frac{\pi}{b}\, l(1+re^{-2ab}).$$

Um zu der ersten dieser Gleichungen zu gelangen, muß man erwägen, daß

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4rda}{e^{2ab}-r} = \frac{\pi}{b}\cdot\frac{e^{-2ab}\,2brda}{1-re^{-2ab}}$$

und die dem zweiten Theile hinzuzufügende Constante Null ist, indem für a = 0 die beiden Glieder der Gleichung zum Verschwinden kommen. Denn man hat alsdann:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{b^2+x^2}\, l\,(1-r)^2 = \frac{\pi}{b}\, l\,(1-r),$$

welcher Werth ganz derselbe ist, den das zweite Glied der Gleichung im vorliegenden Falle annimmt. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die zweite der obigen Gleichungen.

§. 111. **Die Constante des Integrallogarithmus.** Diese Constante haben wir früher definirt:

$$K = \lim\left(l\,\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1\cdot 2}+\frac{1}{3}\,\frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\ldots\right),$$

oder

$$K = \lim\left(l\,\frac{1}{n}+\int_0^n \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx\right).$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um die fragliche Constante in ein bestimmtes Integral zu verwandeln. Bei unendlich großen n ist nämlich $l\,\frac{1}{n} = l\,\frac{1}{n+1}$, weil für den Unterschied beider Logarithmen

$$\lim l\,\frac{n+1}{n} = \lim l\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

wird.

Da ferner

$$l\,\frac{1}{n+1}=\int_0^n \frac{-1}{1+x}\cdot dx,$$

so ist jetzt

$$K = \lim \int_0^n \left(\frac{1-e^{-x}}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\frac{1}{1+x} - e^{-x}}{x}\, dx.$$

Die Constante K läßt sich auch auf folgende Weise in eine unendliche Reihe verwandeln. In der Gleichung

$$K = \lim \left(l\,\frac{1}{n} + \int_0^n \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx\right)$$

liegt es sehr nahe, für e^{-x} den bekannten Grenzwerth

$$e^{-x} = \lim \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

zu substituiren. Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, daß x immer klein gegen n sei. Im obigen Integrale wird aber das Integrationsintervall von $x = 0$ bis $x = n$ ausgedehnt; man muß deßhalb die Richtigkeit der Gleichung

$$\int_0^n \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx$$

oder diejenige von

$$\int_0^n \frac{e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx = 0$$

für $n = \infty$ beweisen. Man zerlege deßhalb das letzte Integral in

$$u = \lim \int_0^1 \frac{e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx$$

und

$$v = \lim \int_1^n \frac{e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx. —$$

Daß nun $u=0$ ist, geht aus der Substitution

$$e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = f(x)$$

hervor, wo $f(x)$ bei zunehmendem n jedenfalls verschwinden muß. Also ist

$$u = \lim \int_0^1 f(x)\,dx = \lim f(\vartheta_1 x) = 0,$$

wo $f(\vartheta_1 x)$ einen der Werthe von $f(x)$ vorstellt. — Was das Integral v betrifft, so ist dasselbe für jedes endliche n positiv, weil

$$e^{-\frac{x}{n}} = 1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} - \ldots > 1 - \frac{x}{n},$$

so lange $x < n$, mithin

$$e^{-x} > \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

ist. Das Integral

$$v = \int_1^n \frac{e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx$$

ist aber ferner kleiner als

$$w = \int_1^n \left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right] dx,$$

weil der in v von 1 bis n wachsende Nenner x in w immer $= 1$ bleibt. Man hat also

$$0 < \int_1^n \frac{e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx < \int_0^1 \left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right] dx,$$

d. h.

$$0 < v < \left[-e^{-n} + e^{-1} - \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right].$$

Der letzte Grenzwerth ist nun selber $= 0$, weil

$$\lim e^{-n} = 0,\ \lim \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1},$$

also ist $v = 0$.

Wir hätten also jetzt

$$K = \lim \left[l\frac{1}{n} + \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx \right].$$

In letzterem Integrale setze man $1-\frac{x}{n}=t$; somit wird

$$K = \lim \left[l\frac{1}{n} + \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,dt \right]$$

$$= \lim \left[l\frac{1}{n} + \int_0^1 (1+t+t^2+\ldots t^{n-1})\,dt \right],$$

oder

$$K = \lim \left[1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n} - ln \right].$$

Schließlich wollen wir noch zeigen, daß dieses Resultat sich mit wachsenden n immer mehr einer bestimmten Grenze nähert. Es ist nämlich auch

$$K = \lim \left[1-l(\tfrac{2}{1})+\tfrac{1}{2}-l(\tfrac{3}{2})+\tfrac{1}{3}-l(\tfrac{4}{3})+\ldots+\frac{1}{n} \right],$$

d. h.

$$K = 1-l(\tfrac{2}{1})+\tfrac{1}{2}-l(\tfrac{3}{2})+\tfrac{1}{3}-l(\tfrac{4}{3})+\ldots$$

Daß diese Reihe convergirt, geht aus dem Zeichenwechseln und dem Kleinerwerden der Glieder hervor. Es ist

$$l\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots > \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots,$$

$$\text{aber} < \frac{1}{n}: \text{d.h.} \frac{1}{n} > l\,\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

Jedes Glied der obigen Reihe ist mithin kleiner als das Vorhergehende.

4. Transformationen und Convergenz bestimmter Integrale.

§. 120. **Transformationen bestimmter Integrale.** Wenn bei bestimmten Integralen eine neue Variabele eingeführt worden ist, so hat man die damit verbundene Aenderung der Grenzen zu berücksichtigen. Setzt man nämlich $x = \varphi(t)$ in einem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

so bekommt man, wenn für t sein in x ausgedrückter Werth $\psi(x)$ substituirt wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f\varphi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt,$$

insofern man erwägt, daß an der untern Grenze t den Werth $\psi(a)$ und an der obern den Werth $\psi(b)$ angenommen hat.

Für das Integral

$$\int_a^b f(hx + k)$$

erhält man, wenn $hx+k=t$ gesetzt wird:

$$\int_a^b f(hx+k)\,dx = \frac{1}{h}\int_{ha+k}^{bh+k} f(t)\,dt.$$

Daraus entspringt für $a=0$ und $b=1$ die Relation:

$$\int_k^{h+k} f(t)\,dt = h\int_0^1 f(hx+k)\,dx;$$

und hieraus weiter, wenn $k=\alpha$ und $h=\beta-\alpha$ gesetzt wird:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = (\beta-\alpha)\int_0^1 f[\alpha+(\beta-\alpha)x]\,dx.$$

Durch welche Formel ein Integral mit beliebigen Grenzen auf ein anderes mit den Grenzen 0 und 1 zurückgeführt ist. Setzt man weiter

$x = \frac{z}{1+z}$, mithin $z = \frac{x}{1-x}$; so hat man zunächst

$$f[\alpha+(\beta-\alpha)x]\,dx = f\left(\frac{\alpha+\beta z}{1+z}\right) \cdot \frac{dz}{(1+z)^2}.$$

Für $x=0$ und $x=1$ erhält t beziehungsweise die Werthe 0 und ∞. Es wird folglich

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = (\beta-\alpha)\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha+\beta z}{1+z}\right) \cdot \frac{dz}{(1+z)^2},$$

durch welche Formel ein Integral mit beliebigen Grenzen auf ein anderes zurückgebracht wird, dessen Grenzen 0 und ∞ sind.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, wo die Gleichung $x = \varphi(t)$ nach x aufgelöst mehrere reelle Wurzeln darbietet. Es sei z. B.

$$u = \int_{-2}^{2} x^4\, dx = \frac{64}{5}.$$

Macht man nun $x = \sqrt{t}$, so ist die hiermit ausgesprochene Forderung unmöglich zu erfüllen, wenn man sich $\sqrt{t}$ immer positiv denkt, indem x die Werthe 2 bis — 2 erhalten soll, also $\sqrt{t}$ im Intervall von 0 bis — 2 negativ genommen werden muß. Man setze deswegen

$$u = \int_{0}^{2} x^4\, dx + \int_{-2}^{0} x^4\, dx,$$

und im ersten Integrale $x = +\sqrt{t}$ und im andern $x = -\sqrt{t}$. Dies gibt

$$u = \int_{0}^{4} \frac{t^2}{2\sqrt{t}} dt + \int_{4}^{0} \frac{t^2 dt}{-2\sqrt{t}} = \frac{4^{\frac{5}{2}} - 0}{5}$$

$$- \frac{0 - 4^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{64}{5}.$$

Es würde dagegen falsch gewesen sein,

$$\int_{-2}^{2} x^4\, dx = \int \frac{t^2 dt}{2\sqrt{t}}$$

zu setzen, indem wegen $t = x^2$ die Werthe 2 und — 2 von x dasselbe Resultat für die Grenzen des Integrals in t geliefert hätten, wodurch das letztere jedenfalls Null und nicht $\frac{64}{5}$ geworden wäre.

Es wirft sich somit die Frage auf, wie man im Allgemeinen, wenn in $x = \varphi(t)$ mehrdeutige Wurzelgrößen vorkommen, den richtigen Sinn derselben ermittelt. Wir überlegen so: Da x sich stetig ändern soll, so kann auch eine vorkommende Wurzelgröße z. B.: $\sqrt{r}$ sich nicht plötzlich in $-\sqrt{r}$ verwandeln, sondern es können die Zeichenwechsel der Wurzelgrößen erst dann eintreten, wenn letztere durch Null gegangen sind. Es ist aber auch $\sqrt{r}$ gleichbedeutend mit $\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\right)^{-1}$; wonach ein Unendlichwerden einer Wurzelgröße ebenfalls einen Zeichenwechsel herbeiführen kann. Um also die Werthe von t oder x anzugeben, bei welchen eine Spaltung des Integrals in zwei andere stattfinden muß, setze man $r = 0$ und $r = \infty$, aus welchen Gleichungen sich die fraglichen Werthe von t ergeben. Betrachtet man reelle Integrale und bekommt man imaginäre Wurzeln, so braucht wegen dieser keiner Veränderung vorzunehmen. — Wäre nun z. B. m

der einer Wurzel t entsprechende Werth von x, so müßte man u in

$$\int_{m}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{m} f(x)\,dx$$

zerlegen. In jedem dieser Integrale hat man dann für x seinen Werth in t mit dem richtigen Zeichen von t einzuführen. Fiele z. B. für $x = b$ die Wurzelgröße positiv aus, so müßte ihr das Zeichen $+$ in dem ganzen ersten Integral verbleiben; dagegen müßte in dem ganzen zweiten Integrale der Wurzelgröße das Zeichen $-$ beigelegt werden, wenn für $x=a$ dieselbe sich negativ herausstellte.

§. 121. **Einige Beispiele zur Erläuterung.**

1) Es sei

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + 2ax)\,dx.$$

Aus
$$x^2 + 2ax = t \text{ folgt}$$
$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + t}.$$

Das Null- und Unendlichwerden der Wurzelgröße liefert

$$t = -a^2 \quad \text{und} \quad t = \infty,$$

woraus
$$m = -a \quad \text{und} \quad m = \infty.$$

Man hat hiernach

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2+2ax)dx = \int_{\infty}^{\infty} f(x^2 + 2ax)\,dx$$
$$+ \int_{-a}^{\infty} f(x^2+2ax)dx + \int_{-\infty}^{-a} f(x^2+2ax)\,dx$$
$$= \int_{-a}^{\infty} f(x^2+2ax)dx + \int_{-\infty}^{-a} f(x^2+2ax)\,dx.$$

Da in $x = -a \pm \sqrt{a^2+t}$ für $x = +\infty$ die Wurzelgröße positiv, für $x = -\infty$ aber negativ sein muß; so ist

$$u = \int_{-a^2}^{\infty} f(t) \frac{dt}{2\sqrt{a^2+t}} + \int_{\infty}^{-a^2} f(t) \frac{dt}{-2\sqrt{a^2+t}},$$

wenn man erwägt, daß $t = \infty,\ -a^2,\ \infty$ wird für $x = \infty,\ -\infty$. Aus der Definition des bestimmten Integrals folgt unmittelbar

$$-\int_{\infty}^{-a^2} f(t) \frac{dt}{2\sqrt{a^2+t}} = \int_{-a^2}^{\infty} f(t) \frac{dt}{2\sqrt{a^2+t}}.$$

Mithin ist allgemein

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2+2ax)dx = \int_{-a^2}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{a^2+t}}.$$

2) Es sei

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx.$$

Man setze

$$ax - \frac{b}{x} = t \text{ oder } x = \frac{1}{2a}\left(t \pm \sqrt{t^2+4ab}\right).$$

Die Wurzelgröße gleich Null gesetzt liefert nur imaginäre Wurzeln, wenn $ab>0$; dagegen für

$$\sqrt{t^2+4ab} = \infty \text{ wird } t = \pm\infty,$$

also

$$x = \pm\infty \text{ und } \pm 0.$$

Man zerlegt folglich u in

$$\int_{0}^{\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx + \int_{-\infty}^{0} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx.$$

Für die obere Grenze des ersten Integrals muß, damit

$$x = \frac{1}{2a}\left(t \pm \sqrt{t^2+4ab}\right)$$

gleich $+\infty$ werde, die Wurzelgröße positiv und $t = +\infty$ sein; dieses Zeichen bleibt bis $x=0$, für welches also $t = -\infty$ ist. An der unteren Grenze des zweiten Integrales kann die Größe

$$t - \sqrt{t^2+4ab}$$

nur negativ und unendlich groß werden für $t = -\infty$. Die Wurzelgröße ist mithin im zweiten Integral negativ bis $x=0$, wo $t=+\infty$ wird. Es ist also endlich:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{2a} \cdot \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x^2+4ab}}\right) dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{2^a} \cdot \left(1 - \frac{t}{\sqrt{x^2+4ab}}\right) dt;$$

d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt,$$

unter der Voraussetzung, daß $ab > 0$.

Hieraus folgt z. B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt;$$

d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2ab}.$$

3) Es sei

$$u = \int_0^{2\pi} \sin x\, dx \text{ und } x = \operatorname{arc}(\sin = t),\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Den Werthen $t = 1$ und $t = -1$ entspricht $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3}{2}\pi$. Man zerlege darum u in

$$\int_{^3/_2\pi}^{2\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi/_2}^{^3/_2\pi} \sin x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx.$$

Im ersten Quadranten ist $\sqrt{1-t^2}$ positiv; diese Größe wechselt aber ihr Zeichen im zweiten Integrale und erhält im dritten ihr früheres Zeichen wieder. Also ist

$$u = \int_{-1}^{0} \frac{t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{1}^{-1} \frac{t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

4) In

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\frac{1}{2}x^2}{x+1}\right) dx$$

mache man

$$\frac{\frac{1}{2}x^2}{x+1} = t, \text{ also } x = t \pm \sqrt{t^2 + 2t}.$$

Die Gleichungen

$$\sqrt{t^2 + 2t} = \infty \quad \text{und} \quad \sqrt{t^2 + 2t} = 0$$

liefern

$$t = \infty,\ t = 0 \quad \text{und} \quad t = -2;$$

also

$$x = -1,\ \ x = 0,\ \ x = -2.$$

Hiernach zerlegt sich

$$u \text{ in } \int_0^{\infty} + \int_{-1}^{0} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-\infty}^{-2}.$$

Für $x = \infty$ kann nur das obere Zeichen gelten, dies gibt $t = \infty$; für $x = 0$ wird $t = 0$. Im Intervall von 0 bis -1 wird $t^2 + 2t$ negativ und $t = \infty$ für $x = -1$. Im dritten Integrale ist wieder $t^2 + 2t > 0$; x geht von -1 bis -2, also t von $-\infty$ bis -2; im letzten Integrale ist wieder $t^2 + 2t$ negativ und t geht von -2 bis $-\infty$. Hiernach ist

$$u = \int_0^{\infty} f(t)\left(1 + \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}}\right)dt + \int_{\infty}^{0} f(t)\left(1 - \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}}\right)dt$$

$$+ \int_{-2}^{-\infty} f(t)\left(1 + \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}}\right)dt + \int_{-\infty}^{-2} f(t)\left(1 - \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}}\right)dt,$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\frac{1}{2}x^2}{x+1}\right) dx = 2\int_0^{\infty} f(t) \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}}\, dt$$

$$- 2\int_{-\infty}^{-2} f(t) \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}}\, dt.$$

§. 122. **Endlichkeit und Convergenz der Integrale.** Es ist häufig von Nutzen, zu wissen, ob ein Integral einen endlichen Werth habe oder nicht. Integrale mit unendlichen Grenzen sind nicht selten unendlich; es kann dies aber auch bei solchen mit endlichen Grenzen vorkommen, wenn die zu integrirende Function innerhalb des Integrationsintervalles unendlich wird; alsdann ist aber nicht immer das Integral unendlich. — In dem Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

werde $f(x)$ für den zwischen b und a liegenden Werth m von x unendlich. Läßt sich nun das unbestimmte Integral oder die ursprüngliche Function $F(x)$ zu $f(x)$ finden, so darf man im Allgemeinen nicht immer

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

annehmen; denn diese Formel setzt die Stetigkeit von $F(x)$ von $x = a$

bis x=b voraus. Man zerlege deßhalb das gegebene Integral in

$$\int_a^{m-\alpha} + \int_{m+\alpha}^b + \int_{m-\alpha}^m + \int_m^{m+\alpha} f(x)\,dx$$

und denke sich α immer kleiner und kleiner werdend. Wenn nun f(x) sonst stetig ist, so sind die Werthe der beiden ersten Integrale $F(m-\alpha) - F(a)$ und $F(b) - F(m+\alpha)$. Was die beiden übrigen singulären Integrale betrifft, so ist z. B.

$$\int_m^{m+\alpha} f(x)\,dx$$

= einer Summe von Theilchen, welche, je näher x an m rückt, immer größer werden; dieselbe läßt sich also dadurch ausdrücken, daß man für f(x) überall einen gewissen Mittelwerth $f(m+\vartheta\alpha)$ setzt, wo ϑ ein ächter Bruch ist. Man erhält so

$$\int_m^{m+\alpha} f(x)\,dx = f(m+\vartheta\alpha)\int_m^{m+\alpha} dx,$$

d. h.

$$\int_m^{m+\alpha} f(x)\,dx = \alpha f(m+\vartheta\alpha);$$

ebenso

$$\int_m^{m-\alpha} f(x)dx = \alpha f(m-\vartheta_1\alpha).$$

Verschwindet also die Summe der Grenzwerthe

$$\lim \alpha f(m \pm \vartheta\alpha), \text{ wo } 1 > \vartheta > 0,$$

so ist blos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim[F(m-\alpha) - F(a) + F(b) - F(m+\alpha)].$$

Ist dagegen $\lim \alpha f(m \pm \vartheta\alpha)$ z. B. unendlich, so präsentirt sich alles in unbestimmten Formen. Ein paar Beispiele mögen dieß erläutern.

1) Eine Function f(x) stimme von $x=0$ bis $x=1$ mit $y=x$, von $x=1$ bis $x=2$ mit $y=x^2+1$ überein; man verlangt

$$\int_0^2 f(x)\,dx.$$

Das singuläre Integral für $m=1$, wo f(x) unstetig wird, ist Null, weil in $\lim \alpha f(m \pm \vartheta\alpha)$ der Factor $f(m \pm \vartheta\alpha) = 2$ oder 1 ist.

Die ursprüngliche Function befolgt von $x=0$ bis $x=1$ das Gesetz

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

von $x=1$ bis $x=2$ das Gesetz

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x - \tfrac{5}{6} + C.$$

Dieser letzten Function hat man noch den Werth $-\frac{5}{6}$ zugezählt, damit beide Functionen für $x=1$ denselben Werth geben; eine Unstetigkeit von F würde nämlich ein Unendlichwerden von $f(x)$ für $x=1$ nachziehen, was nicht stattfindet. Es ist nun $\lim F(1-\alpha) = \frac{1}{2} + C$, $\lim F(1+\alpha) = \frac{1}{3} + 1 - \frac{5}{6} + C = \frac{1}{2} + C$. Mithin

$$\int_0^2 f(x)dx = \tfrac{8}{3} + 2 - \tfrac{5}{6} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 0 = \tfrac{23}{6}.$$

2) Für das Integral

$$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\, lx}$$

ist, da $m=0$,

$$\lim \frac{\alpha}{\vartheta\alpha\, l\,(\vartheta\alpha)} = 0,$$

oder das singuläre Integral Null. Dennoch da die Urfunction llx,

ist $$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\, lx} = ll\,\frac{1}{e} - ll0 = l\,\frac{le}{l\infty} = -\infty.$$

3) Für das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

wo $m=1$, und

$$\lim \frac{\alpha}{\sqrt{1-(1-\alpha)^2}} = 0,$$

gilt die ursprüngliche Function

$$F = \operatorname{arc}\,(\sin = x).$$

Folglich ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}(\sin=1) - \operatorname{arc}(\sin=0) = \frac{\pi}{2}.$$

4) Aus dem Umstande, daß die ursprüngliche Function

$$\frac{-\frac{1}{3}}{3x-1} \text{ zu } \frac{1}{(3x-1)^2}$$

für $x=1$ und $x=0$ die endlichen Werthe

$$\frac{-\frac{1}{3}}{3-1},\ \frac{-\frac{1}{3}}{0-1}$$

liefert, darf noch nicht geschlossen werden, daß

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3x-1)^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{3-1} - \frac{-\frac{1}{3}}{0-1} = -\tfrac{1}{6} \text{ sei;}$$

hier ist nämlich für $m=\frac{1}{3}$, $f(x)=\infty$ und

$$\lim \frac{\alpha}{[3(\frac{1}{3}\pm\alpha)-1]^2} = \infty.$$

Die singulären Integrale sind also unendlich, die beiden andern

$$\int_0^{1/_3-\alpha} \text{ und } \int_{1/_3-\alpha}^1$$

jedenfalls positiv, weil

$$\frac{1}{(3x-1)^2} \text{ positiv, also } \int_0^1 \frac{dx}{(3x-1)^2} = \infty.$$

Integrale mit unendlichen Grenzen heißen divergent, wenn sie, obschon die zu integrirende Function nicht unendlich wird, unbestimmt oder unendlich ausfallen. Um dies zu erkennen, zerlege man sich das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

wo $f(x)$ positiv vorausgesetzt sein möge, in eine unendliche Anzahl aneinandergrenzender Integrale

$$\int_a^b + \int_b^{b+h} + \int_{b+h}^{b+2h} + \int_{b+2h}^{b+3h} + \text{ꝛc.}$$

Wenn nun von einer gewissen Stelle $x=b$ an die Function $f(x)$ stets abnimmt, was jedenfalls erfordert wird, insofern nicht die durch das

Integral vorgestellte Summe unendlich werden soll; so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$h \cdot f(b) > \int_b^{b+h} dx > h\,f(b+h)$$

$$h \cdot f(b+h) > \int_{b+h}^{b+2h} f(x)\,dx > hf(b+2h)$$

$$h \cdot f(b+2h) > \int_{b+2h}^{b+3h} f(x)\,dx > hf(b+3h)$$

. . . .

Durch Addition dieser Ungleichheiten entsteht

$$\int_a^b + h(f_b + f_{b+h} + ..) > \int_a^\infty f(x)\,dx > \int_a^b + h\,(f_{b+h} + f_{b+2h} + \ldots).$$

Hieraus geht hervor, daß das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

gleichzeitig mit der Reihe

$$f(b) + f(b+h) + f(b+2h) + \ldots$$

endlich oder unendlich ist. Vor allem muß also $f(\infty) = 0$ sein, wenn das Integral endlich werden soll. — Diese nämliche Bemerkung gilt auch für Integrale, in welchen $f(x)$ nicht immer einerlei Zeichen behält. So ist z. B.

$$\int_0^\infty x^5 \sin x$$

eine durchaus unbestimmte Summe.

Beispiele: 1) Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{1 + x^m}\,dx,$$

wo φ mit wachsendem x immer mehr $= c$ werden möge, ist endlich oder unendlich, je nachdem $m > 1$ oder nicht, weil dann das Integral von einer gewissen Stelle an mit der Reihe

$$c\left(\frac{1}{1 + b^m} + \frac{1}{1+(b+1)^m} + \ldots\right)$$

verglichen werden kann, deren Convergenz von $m > 1$ abhängt.

2) Das Integral

$$\int_0^\infty x \sin^2 x \, dx$$

ist unendlich, weil nicht für $x = \infty$: $\lim x \sin^2 x = 0$ ist.

3) Die Reihe, deren allgemeines Glied $x^{m-1} e^{-x}$, convergirt, weil für wachsende n das Grenzverhältniß

$$\lim \frac{(n+1)^m e^{-(n+1)}}{n^m e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt, daß, wenn m beliebig positiv ist, damit das singuläre Integral bei $x = 0$ verschwinde, das Integral

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} \, dx$$

bestimmt ist, mag auch m noch so groß sein.

4) Die Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{x e^{-\frac{1}{x^4}}}{1 + x^2}$$

divergirt, weil sie zuletzt immer mehr mit einer harmonischen übereinkommt. Folglich ist

$$\int_0^\infty \frac{x e^{-\frac{1}{x^4}}}{1 + x^2} \, dx = \infty.$$

V. Die Eulerschen Integrale.

§. 123. **Die Gammafunction.** Zum Schlusse des zweiten Kapitels wollen wir uns noch in gedrängter Kürze mit einigen merkwürdigen Gattungen von transcendenten Integralen beschäftigen. Diese Integrale sind deswegen schon von hoher wissenschaftlicher Bedeutung, weil eine große Menge von Integralen in letzter Instanz auf dieselben sich zurückführen läßt; dann haben gedachte Integrale eine vielseitige praktische Anwendbarkeit in verschiedenen Zweigen der mathematischen Physik, weshalb sie Gegenstand der Untersuchungen der ausgezeichnetsten Analytiker in der neueren Zeit gewesen sind. Die wichtigeren Eigenschaften jener Integrale, welche als die sichersten Anhalts-

punkte für eine zweckgemäße und erfolgreiche Erweiterung der gesammten Integralrechnung zu betrachten sind, scheinen darum in einem Lehrbuche, welches das Gepräge des jetzigen Zustandes der Wissenschaft an sich tragen soll, nicht fehlen zu dürfen.

Wir machen mit den sogenannten Eulerschen Integralen der ersten und der zweiten Art den Anfang. Es sind dies die beiden folgenden Integrale:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx,$$

mit denen sich Euler vielfach beschäftigt hat und in welchen p, q und n beliebige positive Größen bedeuten. Es ist zweckmäßig zunächst das Eulersche Integral der zweiten Art zu betrachten. Dasselbe wird gewöhnlich durch $\Gamma(n)$ dargestellt, wobei das Zeichen Γ die Stelle eines Functionszeichens vertritt. Dergestalt ist die Definition der Gammafunction in der Gleichung:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx$$

enthalten, statt deren man auch öfter eine davon wesentlich nicht verschiedene andere wählt. Setzt man nämlich

$$e^{-x} = z$$

so hat man

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(l\cdot\frac{1}{z}\right)^{n-1} dz.$$

Die theilweise Integration liefert

$$\int e^{-x}\,x^{n-1}\,dx = \frac{e^{-x}\,x^n}{n} + \frac{1}{n}\int e^{-x}\,x^n\,dx,$$

woraus, wenn n positiv vorausgesetzt wird, folgt:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int e^{-x}\,x^n\,dx,$$

oder

$$n\,\Gamma(n) = \Gamma(n+1).$$

Diese Formel drückt eine charakteristische Eigenschaft der Gammafunction aus; nach derselben ist diese Function für alle positiven Werthe

von n bekannt, wenn man ihre Werthe zwischen den Grenzen $n = 0$ und $n = 1$ kennt. Man erhält nach und nach:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1);$$
$$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1);$$
$$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1\,\Gamma(1);$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1\,\Gamma(1).$$

Es ist aber

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1;$$

folglich

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (n-1),$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Ebenso hat man z. B. für $n = \frac{1}{2}$ nach und nach:

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2});$$
$$\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{3}{2}\,\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2});$$
$$\Gamma(\tfrac{7}{2}) = \tfrac{5}{2}\,\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2});$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \ldots \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

Es ist aber, wenn $x = t^2$ gesetzt wird, allgemein

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,t^{2n-1}\,dt;$$

woraus speciell

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Folglich

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \ldots \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Für negative Werthe von n läßt die Function

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx$$

keine endliche Werthe mehr zu und die Gleichung

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

hat keine weitere Gültigkeit.

§. 124. **Die Betafunction.** Das Euler'sche Integral der ersten Art wird auch zuweilen die Betafunction genannt und hat in der Gleichung:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B(p, q)$$

seine Definition, wo B ein Functionszeichen bedeutet. Der Werth derselben wird nicht geändert, wenn man x mit 1—x vertauscht, was zur unmittelbaren Folge hat, daß die in Frage stehende Transcendente symmetrisch in Bezug auf p und q ist, dergestalt daß man immer hat

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Die wichtigste Eigenschaft der Betafunction besteht darin, daß sie jederzeit durch drei Gammafunctionen ausgedrückt werden kann.

Diese von Euler herrührende Fundamentaleigenschaft ergibt sich durch folgende Rechnung.

Man setze in die Gleichung

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx$$

statt x die Größe rz, wo r eine Constante und z die neue Veränderliche bedeutet; sie geht dadurch über in:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-rz}(rz)^{n-1}\,r\,dz$$

oder in:

$$\frac{\Gamma(n)}{r^n} = \int_0^\infty e^{-rz}\,z^{n-1}\,dz.$$

Man setze hierauf in der letzten Gleichung 1+r für r und p+q statt n; dadurch erhält man:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+r)^{p+q}} = \int_0^\infty e^{-(1+r)z}\,z^{p+q-1}\,dz.$$

Multiplicirt man die beiden Theile dieser Gleichung mit $r^{p-1}\,dr$ und integrirt dann, in Bezug auf r, zwischen den Grenzen $r=0$ und $r=\infty$,

so ergibt sich:

$$\Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{r^{p-1}\,dr}{(1+r)^{p+q}} = \int_0^\infty r^{p-1}\,dr \int_0^\infty e^{-(1+r)z} z^{p+q-1}\,dz.$$

Es ist aber, weil es erlaubt ist die Ordnung der beiden Integrationen umzukehren:

$$\int_0^\infty r^{p-1}\,dr \int_0^\infty e^{-(1+r)z}\; z^{p+q-1}\,dz =$$

$$\int_0^\infty z^{p+q-1}\; e^{-z}\,dz \int_0^\infty r^{p-1}\; e^{-zr}\,dr$$

$$= \int_0^\infty z^{p+q-1}\; e^{-z}\,dz \cdot \frac{\Gamma(p)}{z^p}$$

$$= \Gamma(p)\int_0^\infty z^{q-1}\; e^{-z}\,dz = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q).$$

Man hat also die bemerkenswerthe Relation:

$$\int_0^\infty \frac{r^{p-1}\,dr}{(1+r)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Das auf der linken Seite stehende Integral, welches mit

$$\int_0^\infty \left(\frac{r}{1+r}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{(1+r)^{q-1}} \cdot \frac{dr}{(1+r)^2}$$

offenbar gleichbedeutend ist, nimmt, wenn man darin $\frac{r}{1+r} = x$ setzt und bemerkt, daß unter solcher Voraussetzung für $r=\infty$ und 0 die Veränderliche x die Werthe 1 und 0 erhält, folgende Form an:

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx:$$

es ist also endlich

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Mit Hülfe dieser Formel wäre demnach die Betafunction auf die Gammafunction zurückgeführt. Aus der Eulerschen Formel würde sich eine Relation zwischen drei Gammafunctionen ableiten lassen, wenn man im Stande wäre den Werth des auf der linken Seite jener Formel

stehenden Integrales von vornherein aufzufinden. Es wird dies für den Fall möglich, in welchem $p+q=1$ ist. Man hat nämlich alsdann

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$$

weil

$$\Gamma(p+q) = \Gamma(1)=1.$$

Der Werth des letzteren Integrals läßt sich aber auf folgende Weise herleiten.

Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$$

ist offenbar eine Function von p, welche durch f(p) dargestellt werden mag. Setzt man $\frac{x}{a}$ an die Stelle von x, so entsteht durch Transformation

$$f(p)=a^{1-p}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{a+x}\text{, wenn } a > 0.$$

Nimmt man hier auch $\frac{1}{a}$ statt a, so ergeben sich folgende zwei Gleichungen;

$$a^{p-1} = \frac{1}{f(p)}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{a+x}$$

und

$$a^{-p} = \frac{1}{f(p)}\int \frac{x^{p-1}\,dx}{1+ax}.$$

Multiplicirt man die erste derselben mit $\frac{da}{1+a}$ und integrirt zwischen den Grenzen ∞ und 0, so ist der Definition zufolge:

$$f(p)= \frac{1}{f(p)}\int_0^\infty x^{p-1}\,dx \int_0^\infty \frac{da}{(1+a)\,(a+x)},$$

oder

$$f(p)=\frac{1}{f(p)}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x-1}\cdot lx\,dx.$$

Die hieraus entspringende Gleichung

$$f(p)^2 = \int_0^\infty \frac{a^{p-1}}{a-1} \, la \, da$$

multiplicire man mit dp und integrire beiderseits zwischen den Grenzen p und 1—p. Man bekommt dadurch

$$\int_{1-p}^{p} f(p)^2 dp = \int_0^\infty \frac{a^{p-1} - a^{-p}}{a-1} \cdot da.$$

Für die in dem letzten Integral befindliche Differenz $a^{p-1} - a^{-p}$ liefern aber die beiden ersten Gleichungen den Werth

$$\frac{1}{f(p)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}(a-1)(x-1)\,dx}{(a+x)(1+ax)},$$

so daß nunmehr

$$\int_{1-p}^{p} f(p)^2 dp = \frac{1}{f(p)} \cdot \int_0^\infty x^{p-1}(x-1)\,dx \int_0^\infty \frac{da}{(a+x)(1+ax)},$$

oder

$$\int_{1-p}^{p} f(p)^2 dp = \frac{1}{f(p)} \int_0^\infty x^{p-1}(x-1) \cdot \frac{2\,lx}{x^2-1} \, dx$$

$$= \frac{2}{f(p)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,lx\,dx}{1+x}.$$

Das letzte Integral ist aber, wenn $1 > p > 0$, gleichbedeutend mit

$$\frac{d\,f(p)}{dp} = f'(p).$$

Ferner verwandelt sich das gegebene Integral, wenn $\frac{1}{x}$ an die Stelle von x gesetzt wird, in:

$$\int_0^\infty \frac{x^{(1-p)-1}\,dx}{1+x},$$

so daß $f(p) = f(1-p)$ ist.

Weiter ist

$$\int_{1-p}^{p} f(p)^2 dp = \int_{1/2}^{p} f(p)^2 dp + \int_{1-p}^{1/2} f(p)^2 dp;$$

das letzte Integral ist aber gleichbedeutend mit

$$-\int_p^{1/2} f(1-p)^2 dp$$

oder mit

$$-\int_p^{1/2} f(p)^2 dp$$

oder mit

$$+\int_{1/2}^p f(p)^2 dp:$$

also

$$\int_{1-p}^p f(p)^2 dp = \int_{1/2}^p f(p)^2 dp$$

$$+\int_{1/2}^p f(p)^2 dp = 2\int_{1/2}^p f(p)^2 dp.$$

Aus diesen zwei Bemerkungen folgt, daß

$$\int_{\frac{1}{2}}^p f(p)^2 dp = \frac{f'(p)}{f(p)}.$$

Durch Differentiation in Bezug auf p entspringt hieraus

$$f^2 = \frac{1}{dp} d\left(\frac{f'}{f}\right) \text{ oder } ff' = \frac{f'}{f} \cdot \frac{1}{dp} d\left(\frac{f'}{f}\right)$$

Aus dieser die fragliche Function f (p) charakterisirenden Gleichung folgt, weil die beiden Seiten derselben bezüglich die genauen Derivirten von $\frac{1}{2} f^2$ und $\frac{1}{2} \frac{f'^2}{f^2}$ sind: die Relation

$$f^2 = \frac{f'^2}{f^2} + C.$$

Die Constante bestimmt man für $p=\frac{1}{2}$. Es ist nämlich dann

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} dx = \int_0^\infty \frac{2 \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \pi.$$

Ferner folgt aus $f(p) = f(1-p)$ daß $f'(p) = -f'(1-p)$, mithin ist $f'(\frac{1}{2}) = 0$. Mittelst dieser beiden Werthe ergibt sich die Con-

stante $= \pi^2$. Die Gleichung

$$f^2 = \frac{\left(\frac{df}{dp}\right)^2}{f^2} + \pi^2$$

auf die Form

$$dp = \mp \frac{1}{\pi} \frac{d\left(\frac{\pi}{f}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{f}\right)^2}}$$

gebracht, liefert

$$p + C = \pm \text{ arc } \left(\cos = \frac{\pi}{f}\right)$$

oder

$$f(p) = \frac{\pi}{\cos \pi (p+C)}.$$

Da nun $f(\frac{1}{2}) = \pi$ und $f(1) = \infty$ werden muß, so ist nothwendigerweise $C = -\frac{1}{2}$. Hieraus folgt endlich daß

$$f(p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx,$$

unter der Voraussetzung $1 > p > 0$.

Liegt p nicht innerhalb dieser Grenzen, so ist das Integral unendlich.

Mit Berücksichtigung des eben gefundenen Resultats haben wir also die Gleichung

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

insofern p zwischen 0 und 1 liegt.

Diese Formel, welche aussagt, daß das Product zweier Gammafunctionen, deren Veränderliche sich zur Einheit ergänzen, durch eine goniometrische Function ausgedrückt werden kann, ist höchst bemerkenswerth und in der Theorie jener Function von großer Wichtigkeit. Sie lehrt uns sofort die Werthe der Function $\Gamma(p)$ von $p = \frac{1}{2}$ bis $p=1$ finden, wenn die Werthe derselben von $p=0$ bis $p=\frac{1}{2}$ gefunden sind.

§. 125. **Formeln zur Berechnung des Logarithmus der Gammafunction.** Unsere Aufgabe wäre demnach jetzt eine Formel aufzustellen, mittelst welcher die Werthe der Gammafunction $\Gamma(p)$ in

dem Intervall von $p=0$ bis $p=\frac{1}{2}$ berechnet werden können. Zu diesem Zweck schlagen wir folgenden Weg ein. Wir differentiiren in Bezug auf p die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(p);$$

es entsteht dadurch

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx\, lx = d\,\frac{\Gamma(p)}{dp} = \Gamma'(p).$$

Es ist aber zufolge eines im §. 114 aufgestellten Beispiels

$$lx = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-xt})\,\frac{dt}{t}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die vorhergehende Gleichung wird:

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x}\, dx \int_0^\infty (e^{-t} - e^{xt})\,\frac{dt}{t}.$$

Durch Umkehrung der Integrationsordnung kommt:

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty (e^{-t}\, e^{-x}\, x^{p-1} - e^{-x(1+t)}\, x^{p-1})\, dx$$

oder

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(e^{-t}\,\Gamma(p) - \int_0^\infty e^{-x(1+t)}\, x^{p-1}\, dx\right).$$

Das Integral in x verwandelt sich in

$$\frac{1}{(1+t)^p}\int_0^\infty e^{-x}\, x^{p-1}\, dx,$$

wenn man $\frac{x}{1+t}$ an die Stelle von x setzt. Mithin ist jetzt

$$\Gamma'(p) = \Gamma(p)\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^p}\right);$$

woraus, wenn man bemerkt, daß

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = d\,\frac{l\,\Gamma(p)}{dp}$$

ist, entspringt:

$$d\,\frac{l\,\Gamma(p)}{dp}=\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^p}\right)$$

Es ist aber der auf der rechten Seite dieser Gleichung befindliche Ausdruck identisch mit

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{-t}-\frac{1}{1+t}\right)}{t}\,dt+\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^p}\right)\frac{dt}{t}.$$

Das erste dieser Integrale fällt nun mit dem negativen Werthe der Constante K des Integrallogarithmus zusammen. Es ergibt sich daher die Gleichung

$$\frac{d\,l\,\Gamma(p)}{dp}=-K+\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^p}\right)\frac{dt}{t};$$

welche, wenn man $\frac{1}{1+t}=x$ setzt und erwägt, daß den Grenzwerthen $t=\infty$ und $t=0$ die Werthe $x=0$ und $x=1$ entsprechen, sich in folgende umwandelt:

$$\frac{d\cdot l\,\Gamma(p)}{dp}=-K+\int_0^1\frac{1-x^{p-1}}{1-x}\,dx,$$

wo $K=0{,}5772156\ldots.$

Vertauscht man in der letzteren Formel p mit 1+p, so hat man

$$\frac{d\cdot l\,\Gamma(1+p)}{dp}=-K+\int_0^1\frac{1-x^p}{1-x}\,dx;$$

welche Gleichung mit Berücksichtigung daß

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2\ldots.+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}$$

ist, in

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+p)}{dp}=-K+\int_0^1(1+x+x^2\ldots x^{n-1})\,(1-x^p)\,dx$$

$$+\int_0^1\frac{x^n}{1-x}(1-x^p)\,dx$$

übergeht. Durch Integration der einzelnen Glieder erhalten wir:

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+p)}{dp} = -K + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}$$

$$-\left(\frac{1}{1+p} + \frac{1}{2+p} + \frac{1}{3+p} \dots + \frac{1}{n+p}\right)$$

$$+\int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\, x^n\, dx;$$

oder durch Vereinigung je zweier entsprechender Glieder in den untereinander stehenden Reihen:

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+p)}{dp} = -K + \tfrac{1}{1} \cdot \frac{p}{1+p} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p}{2+p} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{p}{3+p} \dots$$

$$+ \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{n+p} + \int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\, x^n\, dx.$$

Wir bemerken nun, daß der Ausdruck $\frac{1-x^p}{1-x}$ für keinen der in Anspruch genommenen Werthe von x unendlich wird; denn für $x=1$, in welchem Falle jener Bruch sich unter der unbestimmten Form darstellt, ist der wahre Werth desselben $= p$. Es erreicht mithin der fragliche Ausdruck jedenfalls im Intervall von $x=0$ bis $x=1$ ein endliches Maximum und Minimum. Bezeichnen wir diese mit A und B, so ist

$$\int_0^1 A x^n\, dx > \int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\, x^n\, dx > \int_0^1 B x^n\, dx;$$

oder

$$\frac{A}{n+1} > \int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\, x^n\, dx > \frac{B}{n+1}.$$

Bei unendlich wachsenden n rücken die zwei Grenzen der Null beständig näher, woraus folgt

$$\lim \int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\, x^n\, dx = 0.$$

Wir erhalten also die convergente Reihe:

$$d\,\frac{l\,\Gamma(1+p)}{dp} = -K + \tfrac{1}{1} \cdot \frac{p}{1+p} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p}{2+p} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{p}{3+p}$$

$$\dots + \text{in inf.}$$

Man kann diese Reihe in eine nach Potenzen von p fortschreitende verwandeln. Gibt man ihr nämlich folgende Form:

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+p)}{dp}=-K+\tfrac{1}{1}\cdot\frac{\frac{p}{1}}{1+\frac{p}{1}}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{p}{2}}{1+\frac{p}{2}}$$

$$+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\frac{p}{3}}{1+\frac{p}{3}}+\ldots$$

und bemerkt, daß sich jedes einzelne Glied nach der Formel

$$\frac{z}{1+z}=z-z^2+z^3-z^4\ldots$$

in eine convergente Reihe umwandeln läßt, sobald die Bedingung $1>p>-1$ besteht; so erhält man

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+p)}{dp}=-K+\tfrac{1}{1}\left(\frac{p}{1}-\left(\frac{p}{1}\right)^2+\left(\frac{p}{1}\right)^3-\left(\frac{p}{1}\right)^4+\ldots\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{p}{2}-\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^3-\left(\frac{p}{2}\right)^4+\ldots\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{p}{3}-\left(\frac{p}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{p}{3}\right)^4+\ldots\right)$$

$$+\ldots\ldots$$

Bezeichnet man der Abkürzung halber allgemein die Summe der convergenten Reihe

$$\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

mit Σ_n, so entspringt

$$d\,\frac{l\,\Gamma(1+p)}{dp}=-K+\Sigma_2 p-\Sigma_3 p^2+\Sigma_4 p^3-\ldots,$$

wo $1>p>-1$.

Wird diese Gleichung mit dp multiplicirt und hierauf integrirt, und dabei erwogen, daß für p=0 die Größe $\Gamma(1)=l(1)$ verschwindet; so hat man die wichtige Relation

$$l\,\Gamma(1+p)=-Kp+\tfrac{1}{2}\Sigma_2 p^2-\tfrac{1}{3}\Sigma_3 p^3+\tfrac{1}{4}\Sigma_4 p^4\ldots$$

Für negative p hat man noch

$$l\,\Gamma(1-p) = Kp + \tfrac{1}{2}\Sigma_2 p^2 + \tfrac{1}{3}\Sigma_3 p^3 + \tfrac{1}{4}\Sigma_4 p^4 \ldots$$

Addirt man die beiden letzteren Gleichungen und bemerkt, daß

$$l\,\Gamma(1+p) + l\,\Gamma(1-p) = l\,\frac{p\,\pi}{\sin\,p\,\pi},$$

so ergibt sich noch folgendes Resultat

$$\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{p\pi}{\sin p\pi} = \tfrac{1}{2}\Sigma_2 p^2 + \tfrac{1}{4}\Sigma_4 p^4 + \tfrac{1}{6}\Sigma_6 p^6 + \ldots,$$

durch dessen Substitution die obigen Relationen in die folgenden zur numerischen Berechnung bequemere übergehen:

$$l\,\Gamma(1+p) = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{p\pi}{\sin p\pi} - Kp - \tfrac{1}{3}\Sigma_3 p^3 - \tfrac{1}{5}\Sigma_5 p^5 - \ldots,$$

$$l\,\Gamma(1-p) = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{p\,\pi}{\sin p\pi} + Kp + \tfrac{1}{3}\Sigma_3 p^3 + \tfrac{1}{5}\Sigma_5 p^5 + \ldots;$$

wobei immer $1 > p > -1$ sein muß.

Mit Hülfe dieser Relationen findet man z. B., wenn 10 die Basis des logarithmischen Systems ist:

Für $p = 1{,}00$: $\log \Gamma(p) =$	0,0000000
1,05	0,9883379—1
1,10	0,9783407—1
1,15	0,9699007—1
1,20	0,9629225—1
1,25	0,9573211—1
1,30	0,9530202—1
1,35	0,9499515—1
1,40	0,9480528—1
1,45	0,9472677—1
$p = 1{,}50$ $\log \Gamma(p) =$	0,9475449—1
1,55	0,9488374—1
1,60	0,9511020—1
1,65	0,9542989—1
1,70	0,9583912—1
1,75	0,9633451—1
1,80	0,9691287—1
1,85	0,9757126—1
1,90	0,9830693—1
1,95	0,9911732—1
2,00	0,0000000.

§. 126. **Einige bemerkenswerthe Eigenschaften der Gammafunction.** Die oben gefundene Formel

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+p)}{dp}=-K+\frac{1}{1}\cdot\frac{p}{1+p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2+p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{3+p}+\cdots$$

kann auch benutzt werden, um die Function $\Gamma(1+p)$ in ein unendliches Product zu verwandeln. Multiplicirt man nämlich dieselbe mit dp und integrirt mit dem Bemerken, daß

$$\frac{1}{n}\int\frac{p\,dp}{n+p}=\frac{1}{n}\,p-l\left(1+\frac{1}{n}\,p\right)+\text{const}=l\left[\frac{e^{\frac{1}{n}p}}{1+\frac{1}{n}\,p}\right]+\text{const.}$$

ist; so bekommt man

$$l\,\Gamma(1+p)=-Kp+l\left(\frac{e^{p}}{1+p}\right)+l\left(\frac{e^{\frac{1}{2}p}}{1+\frac{1}{2}p}\right)+l\left(\frac{e^{\frac{1}{3}p}}{1+\frac{1}{3}p}\right)\cdots,$$

weil sich die beizufügende Constante in dem speciellen Fall $p=0$ annullirt. Durch Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen ergibt sich:

$$\Gamma(1+p)\cdot e^{Kp}=\frac{e^{p}}{1+p}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}p}}{1+\frac{1}{2}p}\cdot\frac{e^{\frac{1}{3}p}}{1+\frac{1}{3}p}\cdot\frac{e^{\frac{1}{4}p}}{1+\frac{1}{4}p}\cdots.$$

Für $p=1$ entsteht daraus, weil $\Gamma(2)=1$ ist:

$$e^{K}=\frac{1e}{2}\cdot\frac{2e^{\frac{1}{2}}}{3}\cdot\frac{3e^{\frac{1}{3}}}{4}\cdot\frac{4e^{\frac{1}{4}}}{5}\cdots\cdot$$

Erhebt man beide Seiten der letzteren Gleichung auf die p^{te} Potenz, so kommt

$$e^{pK}=\frac{1^{p}e^{p}}{2^{p}}\cdot\frac{2^{p}e^{\frac{1}{2}p}}{3p}\cdot\frac{3^{p}e^{\frac{1}{3}p}}{4p}\cdots$$

Indem man mit diesem Resultat in die vorige Relation dividirt, entspringt:

$$\Gamma(p+1)=\frac{2p}{1^{p-1}(1+p)}\cdot\frac{3p}{2^{p-1}(2+p)}\cdot\frac{4p}{3^{p-1}(3+p)}\cdots;$$

für $p=-\frac{1}{2}$ geht, nachdem man quadrirt hat, der von Wallis gefundene Ausdruck hervor:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Ferner entsteht durch Heben und Vertauschen von $p-1$ mit p:

$$\Gamma(p) = \lim \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{p(p+1)\cdots(p+n-1)} \cdot n^{p-1} \right\}.$$

Eine andere interessante von Legendre gefundene Eigenschaft der Gammafunction läßt sich auf folgende Weise ableiten. In der Gleichung

$$\frac{d\,l\,\Gamma(p)}{dp} = -K + \int_0^1 \frac{1-x^{p-1}}{1-x}\,dx$$

setze man an die Stelle von p nach und nach die Werthe p, $p+\frac{1}{n}$, $p+\frac{2}{n} \cdots p+\frac{n-1}{n}$, wo ein n eine ganze positive Zahl bedeutet, und addire alle Resultate. Man erhält

$$\frac{1}{dp}\,d\,l\left[\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)\right] =$$

$$-nK + \int_0^1 \frac{n - x^{p-1}\left(1 + x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{2}{n}} + \cdots x^{\frac{n-1}{n}}\right)}{1-x}\,dx$$

$$= -nK + \int_0^1 \frac{n - x^{p-1}\dfrac{1-x}{1-x^{\frac{1}{n}}}}{1-x}\,dx$$

$$= -nK + \int_0^1 \left(\frac{n}{1-z} - \frac{z^{p-1}}{1-z^{\frac{1}{n}}}\right)dz$$

In diesem Integrale mache man $z = x^n$, $dz = nx^{n-1}dx$.

Man erhält $\frac{1}{dp}\,dl\left[\Gamma(p)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)\right] =$

$$-nK + n\int_0^1 \left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n} - \frac{x^{np-1}}{1-x}\right)dx$$

$$= -nK + n\int_0^1 \left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n} - \frac{1}{1-x}\right)dx + n\int_0^1 \frac{1-x^{np-1}}{1-x}\,dx.$$

Nun ist $\int\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n} - \frac{1}{1-x}\right)dx = -l\,\frac{1-x^n}{1-x} = -l(1+x+\cdots x^{n-1})$,

also der Werth dieses Integrales $= -ln$, während

$$-nK + n\int_0^1 \frac{1-x^{np-1}}{1-x}\,dx = \frac{d\,l\,\Gamma(np)}{dp}$$

ist. Also folgt durch beiderseitige Integration in Bezug auf p:

$$l\left[\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)\right]=$$

$$lC + l\Gamma(np) + p\cdot nl\frac{1}{n},$$

wo lC eine unbekannte Constante vorstellt. Durch Uebergang zu den Zahlen folgt jetzt

$$\Gamma(p)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{C\,\Gamma(np)}{n^{np}}.$$

Um die Constante zu bestimmen, setze man $p = \frac{1}{n}$, nachdem man beiderseits quadrirt hat, und fasse die entstehenden 2n Factoren zur linken in der Weise zusammen, daß

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\frac{n-1}{n} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}};\quad \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}};$$

$$\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{n-1}{n}\pi},$$

lasse aber $\Gamma(1)^2 = 1$ beiderseits weg. So entsteht

$$\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi} = \frac{C^2}{n^2}.$$

Es ist aber

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}},$$

also

$$C = \sqrt{(2\pi)^{n-1}}\cdot n.$$

Also ist endlich:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right) = \Gamma(np).\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{np-\frac{1}{2}}}$$

Für $p = \frac{1}{n}$ folgt die schon von Euler angegebene Formel:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$$

Um die Richtigkeit der eben angeführten Relation nachzuweisen, verfahren wir wie folgt:

Der Ausdruck $x^n - 1$ verschwindet, wenn x einem der n verschiedenen Werthe gleich wird, welche aus

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

für $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$ hervorgehen. Nach der Lehre von den Gleichungen ist also $x^n - 1$ gleich einem Producte von n verschiedenen Factoren

$$x - \cos\frac{2k\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n},$$

deren erster $= x - 1$ ist; mithin kommen in dem Ausdrucke $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ nur noch die auf $k = 1, 2, 3 \ldots n-1$ Bezug habenden Factoren vor. Derselbe verwandelt sich für $x = 1$ in den Werth n, während die $n-1$ Factoren

$$1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$= 2\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \sqrt{-1}\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

ein Product

$$2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{n-1}{n}\pi$$

multiplicirt mit $n-1$ Factoren

$$-\sqrt{-1} \cdot \left(\cos\frac{k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

liefern. Nach §. 136 der algebraischen Analysis ist aber das Product dieser $n-1$ Factoren

$$= (-\sqrt{-1})^{n-1}\left\{\cos\frac{\pi}{n}\Big(1 + 2 \cdots n-1\Big) + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{n}\Big(1 + 2 \cdots n-1\Big)\right\}$$

$$=(-\sqrt{-1})^{n-1}\left\{\cos(n-1)\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$=(-\sqrt{-1})^{n-1}\left\{\cos\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right\}^{n-1}$$

$$=(-\sqrt{-1})^{n-1}\cdot(\sqrt{-1})^{n-1}=(-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1})^{n-1}=+1.$$

Es ist also stets

$$n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\ldots\sin\frac{n-1}{n}\pi.$$

§. 127. **Erweiterung der Eulerschen Relation.** Dirichlet hat auf eine sehr sinnreiche Weise die Eulersche Relation erweitert, und so ein Resultat erhalten, das die vielfachste Anwendung zuläßt. Um zu jener bemerkenswerthen Formel zu gelangen, gehen wir von der identischen Gleichung:

$$\beta\int_0^{1-x} y^{\beta-1}\,dy=(1-x)^\beta,$$

oder

$$\beta\int_0^1\int_0^{1-x} x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,dx\,dy=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\,dx$$

aus. Der Eulerschen Relation zufolge ist aber

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\,dx=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}.$$

Also

$$\iint x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,dx\,dy=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1+\beta)}{\beta\cdot\Gamma(1+\alpha+\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)},$$

unter der Voraussetzung, daß das doppelte Integral sich nur auf alle positiven Werthe der Veränderlichen x, y erstreckt, welche, weil in der ersten Gleichung y immer $< 1 - x$ ist, der Ungleichheit $x + y < 1$ Genüge thun.

Wenn wir in dieser Gleichung x mit $\left(\frac{x}{a}\right)^p$ und y mit $\left(\frac{y}{b}\right)^q$ vertauschen, so entsteht die Formel:

$$\iint x^{p\alpha-1}y^{q\beta-1}dx\,dy=\frac{a^{p\alpha}b^{\beta q}}{pq}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)},$$

oder, wenn man α in $\frac{\alpha}{p}$ und β in $\frac{\beta}{q}$ übergehen läßt:

$$\iint x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,dx\,dy = \frac{a^\alpha\,b^\beta}{pq}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}\right)},$$

wo sich das doppelte Integral nur auf alle positiven Werthe von x und y erstreckt, welche der Bedingung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q < 1$$

entsprechen, und wo die Constanten α, β, a, b, p, q positiv vorausgesetzt werden.

Es sei nun n die Anzahl der Veränderlichen x, y, z ⋯; ferner erstrecke sich die einfache Integration auf alle positiven Werthe dieser Veränderlichen, welche die Bedingung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \cdots < 1$$

für positiv a, b, c ⋯ p, q, r ⋯ erfüllen. Unter solchen Verbindungen hat man

$$\iiint \cdots x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,z^{\gamma-1} \cdots dx\,dy\,dz \cdots =$$

$$\frac{a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma \cdots}{p\,q\,r \cdots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)\cdots}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\cdots\right)},$$

vorausgesetzt, daß die Constanten α, β ⋯ ebenfalls positiv sind. Um die Richtigkeit dieser Gleichung nachzuweisen, kann man dieselbe Aenderung der Veränderlichen wie vorhin vornehmen, so daß es sich nur darum handelt, die Gültigkeit der Gleichung

$$\iiint \cdots x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,z^{\gamma-1} \ldots dx\,dy\,dz = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\cdots}{\Gamma(1+\alpha+\beta+\gamma\cdots)}$$

für den Fall zu zeigen, daß die Veränderlichen x, y, z ⋯ die Bedingung $x+y+z \cdots < 1$ erfüllen.

Zunächst ist für $x+y+z<1$ das dreifache Integral

$$\iiint x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx \int_0^{1-x} y^{\beta-1}\,dy \int_0^{1-x-y} z^{\gamma-1}\,dz\,.$$

weil in dem letzten Integrale z immer kleiner als die obere Grenze $1-x-y$ ist. Führt man die neuen Veränderlichen u und v ein, und setzt $y = u\,(1-x)$, $z = v\,(1-x-y)$; so werden die Grenzen von u und v gleichfalls 0 und 1 sein und man erhält

$$\iiint x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, z^{\gamma-1}\, dx\, dy\, dz =$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} dx \int_0^1 u^{\beta-1}\, (1-x)^{\beta} du \int_0^1 v^{\gamma-1}\, (1-x-y)^{\gamma}\, dv =$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta+\gamma}\, dx \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma}\, du \int_0^1 v^{\gamma-1} dv.$$

Die Integration in Bezug auf die verschiedenen Veränderlichen können jetzt unabhängig von einander bewerkstelligt werden.

Da nun ist

$$\int_0^1 v^{\gamma-1}\, dv = \frac{1}{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)};$$

ferner

$$\int_0^1 u^{\beta-1}\, (1-u)^{\gamma}\, du = \frac{\Gamma(\beta)\, \Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\beta+\gamma)};$$

dann

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\, (1-x)^{\beta+\gamma}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(1+\beta+\gamma)}{\Gamma(1+\beta+\gamma+\alpha)};$$

so wird endlich

$$\iiint x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, z^{\gamma-1}\, dx\, dy\, dz = \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)\, \Gamma(\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+\gamma)},$$

übereinstimmend mit der Aussage.

Auf demselben Wege kann man unter ähnlichen Voraussetzungen das vierfache Integral

$$\iiiint x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, z^{\gamma-1}\, t^{\delta-1}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

in ein Product von vier einfachen Integralen zerlegen, welche sich sämmtlich mittelst der Eulerschen Formel durch Gammafunctionen ausdrücken lassen, und dergestalt weiter aufsteigen, so daß die oben aufgeführte Formel für jede beliebige Anzahl von Veränderlichen als bewiesen angesehen werden kann.

§. 128. **Einige specielle Fälle der Dirichlet'schen Formel.**

1) Für den Fall, in welchem $p=q=2$ ist, erhält man

$$\int\int x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, dx\, dy = \frac{a^\alpha b^\beta}{4}\, \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Hieraus entspringt wieder für $\alpha=\beta=1$ die Formel

$$\int\int dx\, dy = \frac{ab}{4}\cdot\frac{\pi}{2}. -$$

2) Das Integral

$$8\int\int\int (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

zerlege man sich in 2 Theile. Für den mit x^2 behafteten Theil ist, wenn man wieder $p=q=r=2$, $\alpha=3$, $\beta=1$, $\gamma=1$; für den mit y^2 ist $\alpha=1$, $\beta=3$, $\gamma=1$. Die Summe beider ist also

$$8\, \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})}\left(\frac{a^3bc+ab^3c}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\,\pi\, abc\,(a^2+b^2)$$

3) Für den Fall, daß $p=q=r=2$ und $\alpha=\beta=\gamma=1$, erhält man

$$\int\int\int dx\, dy\, dz = \frac{abc}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi. -$$

4) Für den Fall, daß $p=q=r=4$ und $\alpha=\beta=\gamma=1$, kommt

$$\int\int\int dx\, dy\, dz = \frac{1}{6}\, abc\, \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^3}{\Gamma(\frac{3}{4})}. -$$

§. 129. **Verschiedene durch Gammafunctionen ausdrückbare Integrale.** Da den Fundamentaleigenschaften der Gammafunction (§. 123) gemäß

$$\frac{1}{s^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-sx}\, dx$$

ist, so hat man offenbar

$$\int_0^\infty \frac{\cos bs\, ds}{s^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \cos bs\, ds\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-sx}\, dx,$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin bs\, ds}{s^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \sin bs\, ds \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-sx}\, dx.$$

Indem man die Integrationsordnung umkehrt, ergibt sich, wenn die Gleichungen 11 des §. 107 zu Hülfe genommen werden:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bs\, ds}{s^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int x^{n-1}\, dx \int_0^\infty e^{-sx} \cos bs\, ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1}\, dx\, \frac{x}{b^2+x^2};$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin bs\, ds}{s^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int x^{n-1}\, dx \int_0^\infty e^{-sx} \sin bs\, ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1}\, dx\, \frac{b}{b^2+x^2}.$$

Schreibt man in beiden Integralen bz statt x, so wird unter der Voraussetzung eines positiven endlichen b:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bs\, ds}{s^n} = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{z^n\, dz}{1+z^2};$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin bs\, ds}{s^n} = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{z^{n-1}\, dz}{1+z^2}.$$

Um die Werthe der beiden auf der ersten Seite befindlichen Integrale zu erhalten, setze man in der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{r^{p-1}\, dr}{1+r} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

wo $1 > p > 0$, statt r die neue Variable z^2 und mache dann $p = \frac{n+1}{2}$ und $p = \frac{n}{2}$. Man bekommt auf diese Weise:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bs\, ds}{s^n} = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}},\quad 1 > n > 0;$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bs\, ds}{s^n} = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{2}};\quad 2 > n > 0.$$

Für alle anderen Werthe von n werden die in Frage stehenden Integrale unendlich. Für n=1 fällt das zweite Integral noch endlich aus: es ist nämlich

$$\int_0^\infty \frac{\sin bs\, ds}{s} = \frac{\pi}{2},$$

wobei b zwischen 0 und + ∞ liegen muß.

Macht man in den beiden vorhergehenden Gleichungen s=x und n=1−m und berücksichtigt die Formel

$$\Gamma(1-m)\,\Gamma(m) = \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}m\pi\cos\frac{1}{2}m\pi},$$

so entsteht

$$\int_0^\infty x^{m-1}\cos bx\,dx = \frac{\Gamma(m)\cos\frac{1}{2}m\pi}{(\pm b)^m};\ 1 > m > 0;$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\sin bx\,dx = \frac{\pm\Gamma(m)\sin\frac{1}{2}m\pi}{(\pm b)^m};\ 1 > m-1$$

Man hat hier doppelte Zeichen beigefügt, weil, je nachdem b positiv oder negativ ist, der Sinus, aber nicht der Cosinus das Zeichen ändert. Die beiden letzteren Formeln lassen sich in die nachstehende zusammenziehen, welche von Euler herrührt:

$$\int_0^\infty x^{m-1}\,e^{bx\sqrt{-1}}\,dx = \frac{\Gamma(m)}{(\pm b)^m}\,e^{\pm\frac{1}{2}m\pi\sqrt{-1}};\ 1 > m > 0\cdot$$

Für den speciellen Fall $m = \frac{1}{2}$ entspringt

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}\ .$$

Für $x = t^2$ wird noch

$$\int_0^\infty \cos(bt^2)\,dt = \int_0^\infty \sin(bt^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

und

$$\int_0^\infty e^{bt^2\sqrt{-1}}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\,e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}\ .$$

Werden die Integrale zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen, so ist auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(bt^2)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(bt^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{bt^2\sqrt{-1}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}},$$

weil die Integrale von $t = 0$ bis $t = -\infty$ die nämlichen Werthe haben, wie die von $t = 0$ bis $t = +\infty$. Setzt man noch in dem Integrale $t = u + \frac{k}{b}$, wodurch die Integrationsgrenzen nicht geändert werden; so entsteht

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(bu^2+2ku)\sqrt{-1}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{k^2}{b}\right)\sqrt{-1}}$$

§. 130. **Reihesummirung mittelst der Gammafunction.** Die Formel

$$\int_0^{\infty} x^{q-1} (1-x)^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}$$

kommt auch öfters zur Anwendung, um die Summe der Reihe

$$\frac{A_0}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+p-1)} + \frac{A_1 u}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots(\alpha+\beta+p-1)}$$
$$+ \frac{A_2\, u^2}{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta+1)\cdots(\alpha+2\beta+p-1)} + \cdots\cdot$$

zu finden, wenn die der einfacheren Reihe

$$A_0 + A_1 u^2 + A_2 u^2 + \cdots$$

bekannt ist. Man hat nämlich, wenn p als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird

$$\int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{p-1}\, dx = \frac{1\cdot 2 \cdots\cdots (p-1)}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+p-1)};$$

und wenn wir das beliebige $q = \alpha + n\beta$ setzen:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots(p-1)} \int_0^1 e^{\alpha+n\beta-1} (1-x)^{p-1}\, dx =$$

$$\frac{1}{(\alpha+n\beta)(\alpha+n\beta+1)\cdots\cdots(\alpha+n\beta+p-1)},$$

und durch Multiplication mit $A_n u^n$:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdots(p-1)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}\,dx\,A_n\,(ux^\beta)^n =$$

$$\frac{A_n u^n}{(\alpha+n\beta)(\alpha+n\beta+1)\cdots(\alpha+n\beta+p-1)}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung nach und nach $n = 0, 1, 2, 3 \cdots$ und addiren sämmtliche Glieder, so entsteht:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdots(p-1)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}dx\Big\{A_0 + A_1 ux^\beta + A_2(ux^\beta)^2 + \ldots\Big\}$$

$$= \frac{A_0}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+p-1)} + \frac{A_1 u}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots(\alpha+\beta+p-1)}$$

$$+ \frac{A_2 u^2}{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta+1)\cdots(\alpha+2\beta+p-1)} + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Ist nun die Summe der Reihe

$$A_0 + A_1 u + A_2 u^2 \cdots$$

bekannt und heißt dieselbe $F(u)$, so läßt sich auch die unter dem Integralzeichen vorkommende Reihe summiren, vorausgesetzt jedoch, daß β eine positive Größe ist. Es besteht hiernach die Relation:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdots(p-1)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}F(ux^\beta)\,dx$$

$$= \frac{A_0}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+p-1)} + \frac{A_1 u}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots\cdots(\alpha+\beta+p-1)}$$

$$+ \frac{A_2 u^2}{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta+1)\cdots\cdots(\alpha+2\beta+p-1)} + \cdots\cdots\cdots$$

Kann man nun den Werth des vorstehenden Integrals finden, so gelangt man auf diesem Wege zu völlig entwickelten Ausdrücken.

Ein bemerkenswerthes Beispiel liefert hierzu $F(u) = (1+u)^\gamma$, wo mithin $A_0, A_1, A_2 \cdots$ die Binomialcoefficienten des Exponenten γ bedeuten, welche der Abkürzung halber durch $\gamma_1, \gamma_2 \cdots$ dargestellt werden mögen. Es ist so

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots(p-1)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}(1+ux^{\beta})^{\gamma}\,dx =$$

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+p-1)}+\frac{\gamma_1 u}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots(\alpha+\beta+p-1)}$$

$$+\frac{\gamma_2 u^2}{(\alpha+2\beta)\cdots(\alpha+2\beta+p-1)}+\cdots$$

wobei die Bedingung $1 > u > -1$ stattfindet, weil die Reihe $1+\gamma_1 u+\gamma_2 u^2+\cdots$ im Allgemeinen nur für solche u gleich $(1+u)^{\gamma}$ ist. Das auf der linken Seite befindliche Integral läßt sich hier auf eine Reihe einfacherer Integrale zurückführen, deren Behandlung keine Schwierigkeit darbietet. So z. B. für $\alpha=\beta=1$, $\gamma=-1$ und $p=3$ findet sich

$$\frac{(1+u)^2}{2u^3}\,l(1+u)-\frac{1}{2u^2}-\frac{3}{4u}=$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{u}{2\cdot3\cdot4}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot5}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot6}+\cdots$$

wo $1 > u > -1$.

Die Reihe $1+\gamma_1 u+\gamma_2 u^2+\cdots$ ist auch gleich $(1+u)^{\gamma}$, für $u=1$, wenn $\gamma > -1$. Die obenstehende allgemeine Formel gibt aber für $u=-1$, $\gamma > -1$:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdots(p-1)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}(1-x^{\beta})^{\gamma}\,dx =$$

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}-\frac{\gamma_1}{(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+\beta+p-1)}$$

$$+\frac{\gamma_2}{(\alpha+2\beta)\ldots(\alpha+2\beta+p-1)}\cdots$$

Für $\beta=1$ erhält man hieraus, weil p eine positive ganze Zahl ist:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(p+\gamma)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(\alpha+p+\gamma)}=$$

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}-\frac{\gamma_1}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+p)}+\frac{\gamma_2}{(\alpha+2)\ldots(\alpha+p+1)}\cdots$$

Wer noch anderweitige Reihensummirungen mittelst der Gammafunctionen, oder andere durch dieselbe ausdrückbare Integrale, sowie

überhaupt noch weitere bemerkenswerthe Eigenschaften dieser Functionen kennen lernen will, den verweisen wir auf folgende Werke:

1) Analytische Studien von Schlömilch, aus denen wir das Beispiel über Reihensummirung, sowie das über Integration mittelst der Gammafunctionen entlehnt haben.

2) Legendre, Traité des fonctions elliptiques et des Intégrales Eulériennes.

3) Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc., Sect. 3, in Comment. soc. reg. scient. Gottingensis. Vol. II.

4) Dirichlet in verschiedenen Bänden von Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik.

VI. Die periodischen Functionen.

§. 131. **Die zwei Fourierschen Reihen.** Bei verschiedenen Anwendungen des höheren Calcüls auf Mechanik und Physik findet man sich öfters veranlaßt, eine beliebige Function f(x) einer einzigen Veränderlichen in eine nach den Cosinus oder Sinus des Vielfachen jener Veränderlichen fortlaufende Reihe zu verwandeln. Angenommen also die beiden Gleichungen

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots\ldots,$$
$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots.$$

wären innerhalb eines bestimmten Intervalles $x=a$ bis $x=b$ gültig, so handelt es sich zunächst darum, die von x unabhängigen Größen A_0, A_1, A_2 .... und B_1, B_2 B_3 .... zu ermitteln. Durch eine sehr einfache Rechnung läßt sich dies bewerkstelligen.

Aus der hypothetischen Gleichung

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots\ldots$$

ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned}2f(x)\cos mx\,dx = 2A_0 \cos mx\,dx \;&+ A_1 [\cos(m-1)x + \cos(m+1)x]\,dx\\ &+ A_2 [\cos(m-2)x + \cos(m+2)x]\,dx\\ &+ \ldots\ldots\\ &A_n [1 + \cos 2nx]\,dx\\ &+ A_{n-1}[\cos x + \cos(2n+1)x]\,dx\\ &+ \ldots\ldots\end{aligned}$$

wenn man jedes einzelne Cosinusproduct durch eine entsprechende

Cosinussumme ersetzt. Es ist aber für jedes ganze positive m das Integral

$$\int_0^\pi \cos mx\, dx = 0;$$

mithin erhält man, wenn man innerhalb der Grenzen $x=0$ und $x=\pi$ integrirt und $m=0, 1, 2 \cdots n$ setzt:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx$$

und

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx,$$

so daß man setzen kann:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx + \frac{2}{\pi}\Sigma\left[\cos nx \int_0^\pi \cos nx\; f(x)\; dx\right],$$

wo Σ die Summe aller Glieder bedeutet, welche aus dem in der Klammer befindlichen allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn man darin statt n nach und nach alle positiven ganzen Zahlen von der Einheit an gerechnet setzt.

Eben so leicht ergibt sich aus der hypothetischen Gleichung:

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots\ldots,$$

wenn man sie mit 2 sin mx dx multiplicirt, dann jedes einzelne Sinusproduct in eine gleichgeltende Cosinusdifferenz zerfällt und zwischen denselben Grenzen integrirt:

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx;$$

so daß man hat

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\Sigma\left[\sin nx \int_0^\pi \sin nx\; f(x)\; dx\right];$$

wo das Zeichen Σ wieder andeutet, daß man die Summe aller Glieder nehmen soll, welche aus

$$\sin nx \int_0^\pi \sin nx\; f(x)\; dx$$

entstehen, wenn n nach und nach $=1, 2, 3 \cdots$ wird. Die beiden vorstehenden Reihen werden die Fourier'schen Reihen genannt, weil Fourier zuerst auf ihre hohe Wichtigkeit in der mathematischen Physik

aufmerksam gemacht und ihre Natur näher kennen gelehrt hat. Nach Poisson's wohlgegründeter Bemerkung beruht jedoch die hier angegebene kurze Rechnung vorzugsweise auf der Annahme, daß jede beliebige Function sich in eine convergente Reihe entwickeln läßt, deren Glieder nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen der Veränderlichen x fortschreiten. Wir haben darum vor Allem diesen Fundamentalsatz, so weit er wahr ist, durch wirkliche Summation der Fourierschen Reihen nachzuweisen, was in den folgenden Paragraphen geschehen soll, in dem Gegenwärtigen den Grenzwerth des Integrales

$$\int_a^b f(t)\,\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt$$

für unendliche wachsende n zu bestimmen suchend, da wir diesen Grenzwerth bei der fraglichen Untersuchung nöthig haben.

Wir bestimmen deßhalb den Grenzwerth

$$u = \lim \int_0^a F(t) \sin nt\, dt\,, \;\cdots\; n = \infty$$

welcher sich für $t = \frac{\pi x}{n}$ in

$$u = \lim \frac{\pi}{n} \int_0^{\frac{na}{\pi}} F\left(\frac{\pi x}{n}\right) \sin \pi x\, dx$$

transformirt. Man denke sich nun die der oberen Grenze $\frac{na}{\pi}$ nächst niedere gerade Zahl 2m, so daß $\frac{na}{\pi} = 2m + \beta$, wo $\beta < 2$. Alsdann ist

$$u = \lim \frac{\pi}{n} \int_0^{2m} + \lim \frac{\pi}{n} \int_{2m}^{2m+\beta} F\left(\frac{\pi x}{n}\right) \sin nx\, dx.$$

Den letzten Grenzwerth kann man wegen des endlichen Abstandes β der Integrationsgrenzen, und weil F als endlich vorausgesetzt wird, weglassen, weil $\lim \frac{1}{n} = 0$. Das andere Integral aber mit den Grenzen 2m und 0 zerlege man in folgende zwei Reihen, so daß $u = \lim (P + N)$:

$$P = \frac{\pi}{n}\left[\int_0^1 + \int_2^3 + \int_4^5 + \ldots \int_{2m-2}^{2m-1} F\left(\frac{\pi x}{n}\right) \sin \pi x\, dx\right]$$

$$N = \frac{\pi}{n}\left[\int_1^2 + \int_3^4 + \int_5^6 + \ldots \int_{2m-1}^{2m} F\left(\frac{\pi x}{n}\right) \sin \pi x \, dx\right].$$

Wir wollen nun vorläufig voraussetzen, daß F (t) positiv sei und von $t = 0$ bis $t = a$ stets abnehme. Da in den in P vorkommenden Intervallen die Sinus positiv sind, so ist P kleiner als eine Reihe von Integralen, in deren Jedem für $F\left(\frac{\pi x}{n}\right)$ sein größter Anfangswerth, also bezüglich F (0), $F\left(\frac{2\pi x}{n}\right)$, $F\left(\frac{4\pi x}{n}\right)\ldots$ gesetzt ist: demnach z. B.

$$\frac{\pi}{n}\int_2^3 F\left(\frac{\pi x}{n}\right) \sin \pi x \, dx < \frac{\pi}{n}\int_2^3 F\left(\frac{2\pi}{n}\right) \sin \pi x \, dx,$$

d. h.

$$< \frac{2}{n} F\left(\frac{2\pi}{n}\right). -$$

In N dagegen sind die Intervalle von solcher Beschaffenheit, daß $\sin \pi x$ stets negativ ist; setzt man mithin auch hier wieder in den einzelnen Integralen die größten Anfangswerthe von $F\left(\frac{\pi x}{n}\right)$, so erfolgt eine Zunahme im Negativen, lso eigentlich eine Abnahme. Wollte man überall die Endwerthe der immer abnehmenden Function F (t) setzen, so würden die entgegengesc ten Erscheinungen eintreten. Mithin ist

$$P < \frac{\pi}{n}\left[\frac{2}{\pi}F(0) + \frac{2}{\pi}F\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots \frac{2}{\pi}F\left(\frac{\overline{2m-2}\,\pi}{n}\right)\right],$$

$$N > \frac{\pi}{n}\left[-\frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{2}{\pi}F\left(\frac{3\pi}{n}\right) - \cdots - \frac{2}{\pi}F\left(\frac{\overline{2m-1}\,\pi}{n}\right)\right],$$

$$P > \frac{\pi}{n}\left[\frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{2}{\pi}F\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \cdots + \frac{2}{\pi}F\left(\frac{\overline{2m-1}\,\pi}{n}\right)\right],$$

$$N < \frac{\pi}{n}\left[-\frac{2}{\pi}F\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \frac{2}{n}F\left(\frac{4\pi}{n}\right) - \cdots - \frac{2}{\pi}F\left(\frac{2m\pi}{n}\right)\right].$$

Addirt man die beiden mittleren, so wie die zwei übrigen Ungleichheiten, und bemerkt, daß $\lim (P + N) = u$ ist, so kommt

$$\frac{2}{n}\left[F(0) - F\left(\frac{2m\pi}{n}\right)\right] > u > 0.$$

Für $n = \infty$ ist also wegen der Endlichkeit von $F(0)$, $F\left(\frac{2m\pi}{n}\right)$, offenbar $u = 0$.

Die Gleichung

$$\lim \int_0^a F(t) \sin nt \, dt = 0$$

setzt aber nicht nothwendig voraus, daß die positive Function $F(t)$ immer abnehme; denn im entgegengesetzten Falle würden sich in den Ungleichungen des vorigen Beweises nur die Zeichen $>$, $<$ umkehren. Durch Subtraction zweier Gleichungen von der Form:

$$\lim \int_0^b = 0 \text{ und } \lim \int_0^a = 0,$$

wo a und b einerlei Zeichen haben, erhält man

$$\int_a^b F(t) \sin nt \, dt = 0,$$

wenn zwischen b und a die Function $F(t)$ fortwährend im Zu- oder Abnehmen begriffen ist, indem man sich $F(t)$ zwischen a und 0 in demselben Sinn fortgesetzt denken kann. Nimmt aber $F(t)$ bald zu, bald ab, so kann man das Integral in mehrere zerlegen, in deren Jedem nur Zunehmen oder nur Abnehmen von $F(t)$ stattfindet; durch das Verschwinden dieser Theil-Integrale kommt also auch das Ganze wieder zum Verschwinden. — Endlich darf selbst $F(t)$ negativ werden; denn wenn in gewissen Intervallen, weil $-F(t)$ alsdann positiv ist,

$$\lim \int_a^b -F(t) \sin nt \, dt = 0;$$

so wird auch allgemein

$$\lim \int_a^b F(t) \sin nt \, dt = 0.$$

Es erhellet leicht, daß man durch einen ähnlichen Gedankengang auch den Satz hätte beweisen können:

$$\lim \int_a^b F(t) \cos nt \, dt = 0.$$

Setzen wir z. B.

$$F(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t},$$

welche Function immer endlich bleiben muß, so daß z. B. für $t = 0$, $f'(0)$ endlich ist; so folgt

$$\int_0^b \frac{f(t) - f(0)}{t} \sin nt \, dt = 0,$$

d. h.

$$\int_0^b f(t) \frac{\sin nt}{t} dt = f(0) \int_0^b \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Durch Transformation von t in $\frac{t}{n}$ im letzten Integrale erhält man

$$\int_0^b \frac{f(t)}{t} \sin nt \, dt = f(0) \int_0^{nb} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Dieser Werth ist je nach dem Zeichen von nb oder b verschieden. Setzt man nämlich $\frac{t}{b}$ für t, so wird er

$$f(0) \int_0^n \frac{\sin \frac{t}{b}}{t} dt = \pm \frac{\pi}{2} f(0),$$

jenachdem b positiv oder negativ ist. — Das allgemeine Integral

$$\int_a^b f(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \int_0^b f(t) \frac{\sin nt}{t} dt - \int_0^a f(t) \frac{\sin nt}{t} dt$$

hat also ebenfalls je nach den Zeichen von a und b sehr verschiedene Werthe; haben a und b gleiche Zeichen, so ist

$$\int_0^b = \int_0^a = \pm \frac{\pi}{2} f(0),$$

also das Integral Null. Ist $b > 0$ und $a < 0$, so ist das erste der beiden letzteren Integrale $= \frac{\pi}{2} f(+0)$, das andere $= -\frac{\pi}{2} f(-0)$, also

$$\int_a^b f(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \pi \frac{f(+0) + f(-0)}{2}.$$

Man hat hier auf den Fall einer unstetigen Function Rücksicht genommen, denn in dem einen Integrale geht t aus dem Positiven, im Andern aus dem Negativen gegen Null. Ist die Function stetig, so ist

$$\int_a^b f(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt = \pi f(0).$$

Auf diesem Wege findet man, daß also allgemein

$$\lim \int_a^b f(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt = 0, \text{ oder } = \frac{\pi}{2} f(+0), \text{ oder}$$
$$= \pi \frac{f(+0)+f(-0)}{2},$$

jenachdem a oder b gleiche Zeichen haben, oder a verschwindet, oder $a < 0$ und $b > 0$ ist.

In diesem Satze wollen wir nun $f(t) = F(t)\cdot\frac{t}{\sin t}$ setzen. Da alsdann $f(0) = F(0)$, so ist auch

$$\lim \int_a^b F(t)\cdot\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt = 0, \text{ oder } = \frac{\pi}{2} F(+0), \text{ oder}$$
$$= \pi \frac{F(+0)+F(-0)}{2},$$

jenachdem b und a gleiche Zeichen haben, oder a verschwindet oder endlich a negativ und b positiv ist. Diese Formel setzt indessen voraus, daß $F(t)\frac{\sin nt}{\sin t}$ immer stetig ist; was z. B. im Allgemeinen schon nicht mehr der Fall ist, wenn $a = \frac{\pi}{2}$ und $b \overline{\overline{>}} \pi$; denn für $x=\pi$ ist $\sin \pi = 0$. Das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(2z-\pi)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz = u,$$

welches für $z = \pi - t$ in

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2t)\frac{\sin \overline{2n+1}(\pi-t)}{\sin t}\,dt$$

übergeht, ist unendlich, wenn nicht etwa für $t=0$, $f(\pi)=0$ oder $\sin \overline{2n+1}\pi$ Null ist. In der That, ist n eine ganze Zahl; so ist

$\sin \overline{2n+1}(\pi-t) = \sin \overline{2n+1}\,t$, also

$$u = \lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - 2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = \frac{\pi}{2} f(\pi - 0),$$

d. h.

$$\lim \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2z - \pi) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz = \frac{\pi}{2} f(\pi - 0),$$

wenn n ganz ist.

§. 132. **Summirung der beiden oben aufgestellten Fourier'schen Reihen.** Um zu entscheiden, ob die Fourier'schen Reihen für jede beliebige Function, wofern sie nur nicht zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$ unendlich wird, Gültigkeit haben, wollen wir den entgegengesetzten Weg einschlagen, d. h. eine Summirung der bereits bestimmten Reihen versuchen und dabei von der linken Seite der oben zwei aufgestellten Gleichungen ganz abstrahiren. Hiernach käme es nur darauf an, die Summen der Reihen

$$\sin x \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx + \sin 2x \int_0^{\pi} f(x) \sin 2x \, dx + \cdots$$
$$+ \sin nx \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx;$$

und

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \cos x \int_0^{\pi} f(x) \cos x \, dx$$

$$+ \cos 2x \int_0^{\pi} f(x) \cos 2x \, dx \cdots + \cos nx \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

zu finden. Diese Reihen lassen sich nun offenbar auf folgende Form bringen:

$$\int_0^{\pi} f(t) [\sin x \sin t + \sin 2x \sin 2t \cdots + \sin nx \sin nt] \, dt,$$

$$\int_0^{\pi} f(t) [\tfrac{1}{2} + \cos x \cos t + \cos 2x \cos 2t \cdots + \cos nx \cos nt] \, dt.$$

Indem man jedes Sinus- und Cosinusproduct wie oben zerlegt, bekommt man

$$\sin x \sin t + \sin 2x \sin 2t \cdots + \sin nx \sin nt =$$

$$\tfrac{1}{2}[\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\cos 3(x-t)\cdots\cdot+\cos n(x-t)]$$
$$-\tfrac{1}{2}[\cos(x+t)+\cos 2(x+t)+\cos 3(x+t)\cdots+\cos n(x+t)];$$

und ähnlich

$$\tfrac{1}{2}+\cos x\cos t+\cos 2x\cos 2t\cdots\cdot+\cos nx\cos nt=$$
$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}[\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\cos 3(x-t)\cdots+\cos n(x-t)]$$
$$+\tfrac{1}{2}[\cos(x+t)+\cos 2(x+t)+\cos 3(x+t)\cdots\cos n(x+t)].$$

Wenn man die im §. 146 der algebraischen Analysis aufgestellten Formeln in Anwendung bringt, findet man

$$\sin x\sin t+\sin 2x\sin 2t\cdots\cdot+\sin nx\sin nt=$$
$$\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{4\sin\frac{x-t}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\frac{x+t}{2}}{4\sin\frac{x+t}{2}};$$

und

$$\tfrac{1}{2}+\cos x\cos t+\cos 2x\cos 2t\ldots.+\cos nx\cos nt=$$
$$\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{4\sin\frac{x-t}{2}}+\frac{\sin(2n+1)\frac{x+t}{2}}{4\sin\frac{x+t}{2}}.$$

Die Summe unserer beiden Reihen erhält man also aus

$$\tfrac{1}{4}\int_0^\pi f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt\mp\tfrac{1}{4}\int_0^\pi f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x+t}{2}}{\sin\frac{x+t}{2}}dt,$$

je nachdem man das obere oder untere Zeichen nimmt.

Wenn wir nun in dem ersten Integrale $x-t=2z$ und in dem zweiten $x+t=2z$ setzen, so hängen gedachte Summen von

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{x-\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz$$
$$\mp\tfrac{1}{2}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+\pi}{2}} f(2z-x)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz$$

ab.

Dies vorausgesetzt, nehmen wir nun an, daß x zwischen 0 und π fällt, mithin die beiden Grenzen des zweiten Integrales positiv sind und die untere Grenze des ersteren negativ ist. Nach dem im vorhergehenden Paragraphen Bewiesenen wird alsdann für $n=\infty$ das zweite Integral Null, während das erste Integral sich auf $\frac{\pi}{2}f(x)$ reducirt. Die zwei in Untersuchung stehenden Summen bilden demnach unter der Bedingung, daß die Veränderliche innerhalb der Grenzen 0 und π liegt und $f(x)$ zwischen diesen Grenzen endlich und stetig bleibt, eine convergirende Reihe, welche $\frac{\pi}{2}f(x)$ zur Summe hat.

Erleidet aber die Function $f(x)$ eine Unterbrechung der Continuität dergestalt, daß sie von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen übergeht, so ist der Werth der Summen der beiden fraglichen Reihen gleich der halben Summe der beiden Werthe, welche die Function $f(x)$ an jener Stelle annimmt.

Es ist noch übrig, die Werthe jener zwei Summen für die Grenzwerthe 0 und π anzugeben. Die beiden Integrale, von denen diese Summen abhängen, reduciren sich für $x=0$ auf:

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0} f(-2z)\,\sin\frac{(2n+1)z}{\sin z}\,dz$$

$$\mp\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2z)\sin\frac{(2n+1)z}{\sin z}\,dz=\left[\tfrac{1}{2}f(+0)\mp\tfrac{1}{2}f(+0)\right]\frac{\pi}{2}$$

und für $x=\pi$ auf:

$$\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} f(\pi-2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz$$

$$\mp\tfrac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} f(2z-\pi)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz=\frac{\pi}{2}\left[\tfrac{1}{2}f(\pi-0)\mp\tfrac{1}{2}f(\pi-0)\right]$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke wieder mit $\frac{2}{\pi}$, so findet man, daß der Werth der Sinus- oder Cosinusreihe für $x=0$ bezüglich 0 und $f(+0)$ und derjenige für $x=\pi$ bezüglich 0 und $f(\pi-0)$ ist.

Faßt man das hier Gesagte zusammen, so läßt es sich in folgende

zwei Sätze bringen. Bleibt die Function f (x) endlich und stetig von $x=0$ bis $x=\pi$, so gelten die zwei Gleichungen:

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots, \quad (1)$$

wo

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\, f(x)\, dx,$$

und

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots, \quad (2)$$

wo

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx \text{ und } A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nx\, f(x)\, dx,$$

für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\pi$. An beiden Grenzen gilt jedoch nur die Cosinusreihe; erleidet sie aber innerhalb dieses Intervalles eine Unterbrechung der Continuität, ohne jedoch dabei unendlich zu werden, so sind die Summen der obigen Reihen gleich der halben Summe aus den beiden Werthen, welche dem f (x) an besagter Stelle zukommen.

§. 133. **Umformungen der Fourier'schen Reihen.** Die beiden oben erhaltenen Formeln, deren zwei Theile eine periodische Function von x sind, während f (x) keine derartige Function zu sein braucht, lassen sich durch geeignete Transformationen in andere umändern, so daß darin x nicht mehr zwischen den Grenzen 0 und π eingeschlossen ist, sondern zwischen den ganz beliebigen Grenzen $-k$ und $+k$ liegt. Um dahin zu gelangen, setzen wir $\frac{\pi x}{a}$ für x, zugleich f(x) statt $f\left(\frac{\pi x}{a}\right)$; was zulässig ist, weil f eine ganz willkürliche Function andeutet. Auf diese Weise erhalten wir:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{a} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \ldots, \quad (3)$$

gültig unter der Bedingung $a > x > 0$, und wobei irgend ein Coefficient

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

ist.

Aehnlicherweise finden wir

$$f(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{a} + \dots, \quad (4)$$

gültig unter der Bedingung, daß $a > x > 0$, und wo der Coefficient

$$B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx$$

ist.

Wenn wir in den beiden letzten Formeln $2k$ für a und $x+k$ für x setzen, und wieder erwägen, daß das Zeichen f eine ganz willkürliche Function andeutet; so bekommen wir folgende zwei Formeln:

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi(x+k)}{2k} + A_2 \cos\frac{2\pi(x+k)}{2k} + \dots, \quad (5)$$

wo

$$A_n = \frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(x) \cdot \cos\frac{n\pi(x+k)}{2k}\, dx;$$

und

$$f(x) = B_1 \sin\frac{\pi(x+k)}{2k} + B_2 \sin\frac{2\pi(x+k)}{2k} + \dots, \quad (6)$$

wo

$$B_n = \frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(x) \cdot \sin\frac{n\pi(x+k)}{2k}\, dx;$$

welche für sämmtliche zwischen den Grenzen $-k$ und $+k$ liegenden Werthe von x stattfinden.

Wenn man die beiden Gleichungen (1) und (2) zusammenaddirt und von der Summe die Hälfte nimmt, ergibt sich die Formel:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots,$$

wobei

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \text{ und } B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Wenn man die Gleichungen (3) und (4), (5) und (6) auf die nämliche Weise verbindet, ergeben sich die Formeln:

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int_0^a f(x)\,dx + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + \cdots$$

$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + \cdots;$$

wo

$$A_n = \frac{1}{a}\int_0^a f(x) \cos\frac{n\pi x}{a} dx \text{ u. } B_n = \frac{1}{a}\int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

$$f(x) = \frac{1}{4k}\int_{-k}^{k} f(x)dx + A_1\cos\frac{\pi(x+k)}{2k} + A_2\cos\frac{2\pi(x+k)}{2k} + \cdots$$

$$+ B_1\sin\frac{\pi(x+k)}{2k} + B_2\sin\frac{2\pi(x+k)}{2k} + \cdots;$$

wo

$$A_n = \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(x) \cos\frac{n\pi(x-k)}{2k}\, dx$$

und

$$B_n = \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(x) \cos\frac{n\pi(x+k)}{2k}\, dx.$$

§. 134. **Beispiele zu den Fourier'schen Reihen.** Die Allgemeinheit der beiden Fourier'schen Reihen läßt eine große Menge specieller Beispiele zu, von denen wir einige in Kürze mittheilen wollen, indem die dabei auszuführenden Integrationen keine weiteren Schwierigkeiten darbieten.

Zur Anwendung über die erste Reihe mögen folgende Beispiele dienen.

1) Es sei $f(x) = \frac{1}{2} x$; man findet:

$$\tfrac{1}{2} x = \sin x - \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{3} \sin 3x - \tfrac{1}{4} \sin 4x + \cdots,$$

wo $\pi > x > -\pi$.

2) Für $f(x) = 1$ bekommt man:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots,$$

wo $\pi > x > 0$.

3) Für $f(x) = \cos x$ wird

$$\cos x = \frac{2}{\pi}\left[(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3})\sin 2x + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5})\sin 4x + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7})\sin 6x + \cdots\right],$$

wo $\pi > x > 0$.

4) Für $f(x) = e^{ax} - e^{-ax}$ erhält man mit Berücksichtigung der Formel

$$\int e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{a \sin nx - n \cos nx}{a^2 + n^2} e^{ax}$$

die Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \frac{\sin x}{a^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2x}{a^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{a^2 + 3^2} - \cdots$$

wo $\pi > x > -\pi$.

Zur Anwendung über die zweite Formel nachstehende vier Beispiele:

1) Für $f(x) = x$ hat man:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right],$$

wo $\pi > x > -\pi$.

2) Für $f(x) = \sin x$ entsteht:

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right],$$

wo $\pi > x > 0$.

3) Für $f(x) = \frac{\pi}{4}$ entspringt:

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \tfrac{1}{3} \cos 3x + \tfrac{1}{5} \cos 5x - \tfrac{1}{7} \cos 7x + \ldots,$$

wo $\pi > x > -\pi$.

4) Für $f(x) = e^{ax} + e^{-ax}$ mit Berücksichtigung der Relation

$$\int e^{ax} \cos nx \, dx = \frac{n \sin nx + a \cos nx}{a^2 + n^2} e^{ax}$$

ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{a\pi} + e^{-a\pi}} = \frac{1}{2a} - \frac{a \cos x}{a^2 + 1^2} + \frac{a \cos 2x}{a^2 + 2^2} - \cdots,$$

wo $\pi > x > -\pi$.

VII. Die Fourier'schen Integrale.

§. 135. Die zwei Theoreme von Fourier.

Wenn man in den Gleichungen (3) und (4) des §. 133:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{a} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \cdots$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos \frac{n\pi t}{a} dt,$$

$$f(x) = B_1 \sin \frac{\pi x}{a} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$$

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin \frac{n\pi t}{a} dt,$$

welche für $a > x > 0$ gelten, a immer größer werden läßt; so liegt der Gedanke sehr nahe, beide Reihen als Integrale aufzufassen, indem dieselben wegen des unendlich kleinen Factors $\frac{2}{a}$ in den Coefficienten, als eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Theilchen betrachtet werden können. Schreibt man dieselben wie folgt:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{2}\frac{\pi}{a}\int_0^a f(t) + \frac{\pi}{a}\int_0^a f(t) \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{a} t\, dt$$

$$+ \frac{\pi}{a}\int_0^a f(t) \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{a} t\, dt + \frac{\pi}{a}\int_0^a f(t) \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi x}{a} dt \cdots\Big]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\pi}{a}\int_0^a f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi t}{a} dt$$

$$+ \frac{\pi}{a}\int_0^a f(t) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi t}{a} dt$$

$$+ \frac{\pi}{a}\int_0^a f(t) \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi t}{a} dt + \cdots\Big]$$

und setzt die kleine Größe $\frac{\pi}{a} = du$, so erhält man für $a = \infty$, da alle Glieder von der nämlichen Form und nur in du, 2du, 3du ⋯ unterschieden sind:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_0^\infty f(t) \cos ux \cos ut\, dt \\ f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_0^\infty f(t) \sin ux \sin ut\, dt \end{aligned}\right\} \infty > x > 0.$$

Da jedoch diese Ableitungen, mit welchen Fourier die Aufgabe gelöst hat, jede beliebige Function von x in ein bestimmtes Integral

zu verwandeln, wegen des Ueberganges zum Unendlichen in Hinsicht der Strenge vielleicht etwas zu wünschen übrig lassen könnten, auch diese beiden Formeln nur für positive x stattfinden; so wollen wir lieber eine directe Auswerthung der etwas allgemeineren Integrale

$$U = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \cos ux \int_a^b f(t) \cos ut\, dt$$

$$V = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \sin ux \int_a^b f(t) \sin ut\, dt$$

vornehmen. Dieselben können in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b f(t) \left[\cos u(t-x) \pm \cos u(t+x)\right] dt.$$

Auf diesen Ausdruck lassen sich die früher gehabten Formeln anwenden, wenn man die Integrationsordnung umkehrt. Hierzu ist jedoch eine kleine Vorsicht nothwendig. Es ist nämlich allgemein

$$\int_\alpha^\beta du \int_a^b f(t, u)\, dt = \int_a^b dt \int_\alpha^\beta f(x, u)\, du,$$

so oft

$$\int_\alpha^\beta \frac{d f(t, u)}{dt}\, du$$

für alle zwischen b und a liegende Werthe von t endlich ist. In unserem Falle müßte also

$$\int_0^\infty \frac{d f(t) [\cos u(t-x) \pm \cos u(t+x)]}{dt}\, du$$

endlich sein, was man vorher zu untersuchen hat. Alsdann ist

$$\left.\begin{matrix} V \\ U \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \lim \int_a^b f(t)\, dt \int_0^n [\cos u(t-x) \pm \cos u(t+x]\, du,$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim \int_a^b f(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x}\, dt \pm \frac{1}{\pi} \lim \int_a^b f(t) \frac{\sin n(t+x)}{t+x}\, dt.$$

Durch Transformation von t in t+x und t in t—x gehen diese zwei Integrale in folgende über:

$$\frac{1}{\pi} \lim \int_{a-x}^{b-x} f(t+x) \frac{\sin nt}{t}\, dt,$$

und

$$\frac{1}{\pi}\lim\int_{a+x}^{b+x} f(t-x)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt.$$

Nun ist

$$\lim\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\frac{\sin nt}{t} = 0 \text{ oder } \frac{\pi}{2}F(+0) \text{ oder } \frac{\pi}{2}F(-0)$$

$$\text{oder } \pi\frac{F(+0)+F(-0)}{2},$$

jenachdem α und β gleiche Zeichen haben, oder α Null ist oder β verschwindet, oder α und β verschiedene Zeichen haben, wo $\beta > 0$, $\alpha < 0$. Nehmen wir nun das erste Integral vor. 1) Wenn $x > b$, also auch $> a$; so haben $b-x$ und $a-x$ gleiche Zeichen; also ist das Integral $= 0$. 2) Wenn $x = b$, so ist die obere Grenze Null; also das Integral

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}f(b-0) = \frac{1}{2}f(b-0).$$

3) Wenn x zwischen b und a liegt, haben $b-x$ und $a-x$ entgegengesetzte Zeichen; also ist das Integral

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi\frac{[f(x+0)+f(x-0)]}{2}.$$

4) Wenn $x = a$, ist die untere Grenze Null; also das Integral

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}f(a+0) = \frac{1}{2}f(a+0).$$

5) Wenn $x < a$, also auch $< b$; so haben $b-x$ und $a-x$ gleiche Zeichen, mithin verschwindet das Resultat.

In Betreff des zweiten Integrales wollen wir a und b als positiv voraussetzen. Wenn man nun x blos als positiv oder Null voraussetzt, so sind $a+x$ und $b+x$ beide positiv; also das Integral Null. Nur für $a=0$, wenn gleichzeitig $x=0$ wird, tritt der Werth

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b f(t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt = \frac{1}{2}f(0)$$

ein.

Addirt man jetzt die beiden obigen Integrale, so hat man für U folgende Ergebnisse:

Das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} du\cos ux\int_a^b f(t)\cos ut\,dt, \qquad b > a > 0$$

ist Null, wenn x außerhalb der Integrationsgrenzen a und b liegt; dann $\frac{1}{2}$ f (b—0) für x=b; ferner $\frac{1}{2}$ f (a+0) für x=a und endlich

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

wenn b > x > a, d. h. = f (x), so oft f (x) stetig ist. Für a=0 tritt in der Formel

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \cos ux \int_0^b \cos ut\, f(t)\, dt, \qquad b > 0$$

eine Verschiedenheit für x=0 ein; der Werth ist nämlich

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_0^b \cos ut\, f(t)\, dt = f(0).$$

Subtrahirt man hingegen die obigen Integrale, so erhält man für V Folgendes: Das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \sin xu \int_0^b \sin tu\, f(t)\, dt, \qquad b > a > 0$$

ist ebenfalls = 0, wenn x > b oder x > a; dann $\frac{1}{2}$ f (b—0); ferner $\frac{1}{2}$ f (a+0) an den Grenzen und

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

oder im Falle einer stetigen Function = f (x), wenn b > x > a. Für a=0 bleibt Alles bestehen, nur verschwindet das Integral für x=0.

Für negative Werthe von x wechselt V, als von sin ux abhängig, aber nicht U, welches cos ux enthält, sein Zeichen. Für negative x erhält man also die absoluten Werthen entsprechenden Fnnctionen V = — f (— x), U = f (— x).

§. 136. **Anderweitige Formen der beiden Theoreme.** Für a=0 und b=∞ gehen die Resultate des vorigen Paragraphen in Folgende über, welche für jeden positiven Werth von x gelten:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^\infty f(t) \cos ut\, dt, \qquad x \geqq 0.$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\, du \int_0^\infty f(t) \sin ut\, dt, \qquad x > 0.$$

Im Falle für irgend einen Werth von x eine Unterbrechung der Continuität eintritt, hat man an die Stelle von f (x) das arithmetische

Mittel aus den beiden Werthen zu setzen, welche hier dem f (x) entsprechen. Diese zwei Formeln können, weil die Producte cos ux cos ut, sin ux sin ut nicht mit u ihr Zeichen wechseln, also

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}$$

ist, auch geschrieben werden:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos ux \, du \int_{0}^{\infty} \cos ut \, f(t) \, dt, \qquad x \geqq 0 \cdots 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin ux \, du \int_{0}^{\infty} \cos ut \, f(t) \, dt, \qquad x > 0 \cdots 2)$$

Addirt man die beiden Gleichungen 1) und 2) so erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{0}^{\infty} f(t) \cos u\,(t-x) \, dt, \qquad x > 0.$$

Ohne die Einschränkung $x > 0$ haben wir aber schon im vorigen Paragraphen bewiesen, daß immer

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{a}^{b} f(t) \cos u\,(t-x) \, dt, \qquad b > x > a;$$

daß aber diese Formel an den Grenzen a und b nur die halben Werthe von f (x) und außerhalb derselben das Resultat Null liefert. Sie ist ferner unabhängig von den Zeichen von b und a und liefert im Falle einer Discontinuität das arithmetische Mittel von $f(x+0)$ und $f(x-0)$. Als speciellen Fall kann man noch für $a = -\infty$, $b = \infty$ die für alle reelle x geltende Formel

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u\,(t-x) \, dt, \quad \infty > x > -\infty \cdots 3)$$

anführen.

Da $\sin u\,(t-x)$ mit u sein Zeichen ändert, so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u\,(t-x) \, dt = 0;$$

denn die positiven Elemente heben sich gegen die negativen. Multiplicirt man diese Gleichung mit $\sqrt{-1}$ und addirt das Product zu 3), so erhält man, da

$$\cos u\,(t-x) + \sqrt{-1} \sin u\,(t-x) = e^{u\,(t-x)\sqrt{-1}}:$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{u(t-x)\sqrt{-1}} \, dt.$$

$$\cdots \infty > x > -\infty \cdots 4)$$

Substituirt man in

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\, e^{u(t-x)\sqrt{-1}}\, dt\, du$$

den Ausdruck

$$f(t,y)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(t,v)\, e^{w(v-x)\sqrt{-1}}\, dv\, dw;$$

so erhält man einen entsprechenden Ausdruck für Functionen zweier Variabeln:

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(t,v)\, e^{(\overline{t-x}\, u+\overline{v-x}\, w)\sqrt{-1}}\, dt\, du\, dv\, dw.$$

§. 137. **Gebrauch der Fourier'schen Theoreme zur Auffindung bestimmter Integrale.**

1) Es sei $f(x)=e^{-ax}$. Die beiden Theoreme, wenn man die Gleichungen 11 des §. 107 berücksichtigt, geben sogleich

$$\frac{\pi}{2}\, e^{-ax}=\int_0^\infty \frac{a\cos ux}{a^2+u^2}\, du,\quad \frac{\pi}{2}\, e^{-ax}=\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{a^2+u^2}\, du,$$

wobei $x>0$, welche Resultate vollkommen mit denen übereinstimmen welche im §. 117 auf anderem Wege hergeleitet wurden.

2) Setzt man $f(x)=\sin ax$ in der Formel

$$\frac{\pi}{2}\, f(x)=\int_0^\infty \cos xu\, du\int_0^c f(t)\cos ut\, dt,$$

wo $c>x>0$;

so erhält man

$$\frac{\pi}{2}\sin ax=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos c\,(a+u)}{a+u}\cos xu\, du$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos c\,(u-a)}{u-a}\cos xu\, du$$

$$+\int_0^\infty \frac{a\cos xu\, du}{a^2-u^2},\ \text{wo } c>x>0,$$

weil

$$\int_0^{\infty} \sin a t \cos ut\, dt = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos (a+u) c}{a+u} + \cos\frac{(a-u) c}{a-u}\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{a+u} + \frac{1}{a-u}\right\}$$

ist.

Setzt man nun in dem ersten Integrale der vorstehenden Gleichung $a+u=z$, und im zweiten Integrale derselben $u-a=z$; so bekommt man:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos c\,(a+u)}{a+u}\cos xu\, du + \int_0^{\infty}\frac{\cos c\,(u-a)}{u-a}\cos xu\, du$$

$$= -\int_a^{\infty}\frac{\cos cz}{z}\cos x\,(z-a)\, dz + \int_{-a}^{\infty}\frac{\cos cz}{z}\cos x\,(z+a)\, dz$$

$$= -2\sin ax\int_a^{\infty}\frac{\cos cz}{z}\sin xz\, dz + \int_{-a}^{+\infty}\frac{\cos cz}{z}\cos x\,(z+a)\, dz,$$

wenn man nämlich das zweite Integral in zwei andere von $-a$ bis $+a$ und von $+a$ bis ∞ zerfällt, wo sich dann das letztere mit dem ersteren der obigen Integrale vereinigen läßt. Das zweite Integral ist aber, wenn es wieder in zwei andere von $-a$ bis 0 und von 0 bis $+a$ zerlegt wird gleichgeltend mit

$$-\int_0^{a}\frac{\cos cz}{z}\cos x\,(-z+a)\, dz + \int_0^{a}\frac{\cos cz}{z}\cos x\,(z+a)\, dz$$

oder mit

$$-2\sin ax\int_0^{a}\frac{\cos cz}{z}\sin xz\, dz.$$

Wird dieser Werth mit

$$-2\sin ax\int_a^{\infty}\frac{\cos cz}{z}\sin xz\, dz$$

verbunden, so gibt deren Summe

$$-2\sin ax\int_0^{\infty}\frac{\cos cz}{z}\sin xz\, dz = \sin ax\left\{\int_0^{\infty}\frac{\sin (c-x)\, z}{z}\, dz\right.$$
$$\left.-\int_0^{\infty}\frac{\sin (c+x)\, z}{z}\, dz\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0, \text{ wobei } c > x.$$

Es ergibt sich zuletzt, wenn wir c ins Unendliche fortschreiten lassen, das Resultat:

$$\frac{\pi}{2} \sin ax = \int_0^\infty \frac{a \cos xu}{a^2-u^2}\, du, \text{ wo } x > 0.$$

3) Setzt man f (x) = cos ax, so ergibt sich die Formel

$$\frac{\pi}{2} f(x) = \int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^c f(t) \sin ut\, dt, \text{ wo } c > x,$$

wenn man ein ähnliches Verfahren einhält, folgende Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} \cos ax = -\int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2-u^2}\, du, \text{ wo } x > 0.$$

Den Leser, welcher sich über die periodischen Functionen und die Fourier'sche Integrale weiter unterrichten will, verweisen wir auf:

1) Repertorium der Physik von Dove, Band 5
2) Denkschriften der Berliner Academie vom Jahre 1836.
3) Fourier, théorie de la chaleur.
4) Exercices de mathématiques par Cauchy.

§. 138. **Die Dirichlet'sche Methode zur Reduction vielfacher Integrale.** Die meisten in endlicher Form dargestellten bestimmten Integrale haben unendliche Grenzen, und Dirichlet hat eine sehr geistreiche Methode gegeben, Integrale mit veränderlichen Grenzen auf solche mit unendlichen Grenzen zurückzuführen. Sein Verfahren besteht darin, die zu integrirende Function mit einem Factor zu multipliciren, welcher in der Art discontinuirlich ist, daß er für alle Werthe der Variabeln, welche in den Integrationsintervallen liegen, der Einheit gleichkommt, für alle übrigen aber verschwindet. Das Product kann man nun zwischen unendlichen Grenzen integriren, ohne einen Fehler zu begehen, weil durch den discontinuirlichen Factor alle nicht zu den Integrationsintervallen gehörige Differentiale von selbst ausgeschieden werden. Hernach lassen sich die Integrationen oft zum Theil ausführen. Die Lehre von den Fourier'schen Integralen liefert sehr einfache sogenannte Discontinuitätsfactoren, z. B.

$$\frac{2}{\pi f(x)} \int_0^\infty \cos ux\, du \int_a^b f(t) \cos ut\, dt$$

welcher so oft x zwischen a und b liegt, gleich 1 ist; außerhalb dieses Intervalles aber verschwindet, und außerdem eine willkürliche Function enthält. Für f (x) = 1 und a = 0 führt sich die letzte Integration sehr leicht aus und man erhält

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin bu \cos xu}{u}\, du,$$

wo jedoch b und x positiv sein müssen; dieser Factore ist also gleich 1 oder gleich Null, jenachdem $x < b$ oder $x > b$. Für $x = b$ ist er $= \frac{1}{2}$. Dieses Resultat findet man auch leicht, wenn man

$$\sin bu \cos xu = \tfrac{1}{2}(\sin \overline{b + x}u + \sin \overline{b - x}u)$$

setzt und bedenkt, daß

$$\int_0^\infty \frac{\sin cu}{u}\, du = \pm \frac{\pi}{2}$$

oder 0, jenachdem $c > 0$, $c < 0$ oder $c = 0$.

Diese Methode läßt sich auf das dreifache Integral

$$V = -\frac{1}{n-1}\iiint \frac{dx\, dy\, dz}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]^{\frac{n-1}{2}}}$$

anwenden, dessen partieller Differentialquotient nach α eine physikalische Bedeutung hat, wenn die Variabeln alle mögliche positive und negative Werthe erhalten können, welche der Ungleichheit

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right) + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1$$

genügen. Um die Integrationsgrenzen unendlich zu machen, muß man vorher mit dem Factor

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \cos\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right] u\, du,$$

welcher offenbar Null ist, so oft nicht

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1,$$

multipliciren. Indem wir zur Abkürzung $r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$ setzen, so finden wir, daß V der reelle Theil von

$$U = \frac{-2}{\pi(n-1)}\int_0^\infty du \frac{\sin u}{u} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\, dy\, dz}{r^{n-1}} e^{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) u \sqrt{-1}}.$$

Hier läßt sich nun direct noch keine Integration ausführen; dieß wird aber ermöglicht, wenn man zufolge der Formel

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{bx\sqrt{-1}}\, dx = \frac{\Gamma(m)}{b^m} e^{\frac{1}{2} m\pi\sqrt{-1}},\quad 1 > m > 0$$

des §. 129 setzt:

$$\frac{1}{r^{n-1}} = \frac{1}{(r^2)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{e^{-\frac{n-1}{4}\pi\sqrt{-1}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{r^2 t\sqrt{-1}}\, t^{\frac{n-3}{2}}\, dt.$$

So wird U ein fünffaches Integral, in welchem man jedoch die Integrationen nach x, y, z zuerst vollziehen kann.

Man findet nämlich

$$U = -\frac{1}{\pi}\frac{e^{-\frac{n-1}{4}\pi\sqrt{-1}}}{\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du\int_0^\infty dt\, t^{\frac{n-3}{2}} e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t\sqrt{-1}}\, T,$$

wo

$$T = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{\left[x^2\left(t+\frac{u}{a^2}\right) - 2\alpha t x + y^2\left(t+\frac{u}{b^2}\right) - 2\beta t y + \ldots - 2\gamma t z\right]\sqrt{-1}}\, dx\,dy\,dz.$$

T kann aber als Product dreier einfacher Integrale aufgefaßt werden, welche einzeln mittelst der Formel des §. 129:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Bs^2\sqrt{-1}}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{B}}\; e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$$

ausgeführt werden können. Setzt man nämlich in derselben $s = x - \frac{\alpha t}{B}$, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(Bx^2 - 2\alpha t x + \frac{\alpha^2 t^2}{B}\right)\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{B}}\, e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(Bx^2 - 2\alpha t x)\sqrt{-1}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{B}}\, e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\; e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{B}\sqrt{-1}}.$$

Für $B = t + \frac{u}{a^2}$ folgt hieraus das eine der fraglichen Integrale nach x, y, z, und wenn man das Product derselben in U einführt, erhält man, wenn man

$$\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

setzt und sonst reducirt;

$$U=\frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}}}{\Gamma\frac{n+1}{2}}\iint_0^\infty du\,dt\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{e^{ut\left(\frac{\alpha^2}{u+a^2t}+\frac{\beta^2}{u+b^2t}+\frac{\gamma^2}{u+c^2t}\right)\sqrt{-1}}\,t^{\frac{n-3}{2}}}{\sqrt{\left(t+\frac{u}{a^2}\right)\left(t+\frac{u}{b^2}\right)\left(t+\frac{u}{c^2}\right)}}.$$

Der oben erwähnte partielle Differentialquotient dieses Ausdruckes in Bezug auf α ist, wenn der Kürze halber

$$M=\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}$$

gesetzt wird, nachdem man vorher t in $\frac{u}{w}$ transformirt hat:

$$\frac{\alpha}{a^2}\frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}}}{\Gamma\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty\frac{w^{1-\frac{n}{2}}dw}{\sqrt{\left(1+\frac{w}{a^2}\right)\left(1+\frac{w}{b^2}\right)\left(1+\frac{w}{c^2}\right)}}\int_0^\infty\frac{2\sqrt{-1}\sin u}{u^{2-\frac{n}{2}}}e^{Mu\sqrt{-1}}du.$$

Da es sich, um $\frac{dV}{d\alpha}=X$ zu finden, nur um den reellen Theil des letzten Integrals handelt; so wollen wir denselben für

$$e^{-\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}}\left[\int_0^\infty\frac{e^{(1+M)u\sqrt{-1}}}{u^{2-\frac{n}{2}}}du-\int_0^\infty\frac{e^{(1-M)u\sqrt{-1}}}{u^{2-\frac{n}{2}}}du\right]=R$$

bestimmen, weil $2\sqrt{-1}\sin u=e^{u\sqrt{-1}}-e^{-u\sqrt{-1}}$. Wenn nun n zwischen 2 und 3 liegt, so daß $2-\frac{n}{2}$ zwischen 0 und 1 liegt, so ist die Formel des §. 129 anwendbar:

$$\int_0^\infty u^{m-1}e^{Bu\sqrt{-1}}du=\frac{\Gamma(m)}{(\pm B)^m}e^{\pm\frac{m\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

jenachdem $B\gtrless 0$. Man wird also unterscheiden müssen, ob $M>1$ oder $M<1$. Im ersten Falle ist

$$R=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left((M+1)^{1-\frac{m}{2}}-(M-1)^{1-\frac{m}{2}}\right),$$

also der reelle Theil Null. Im andern, wo $M<1$ findet man

$$R = \frac{e^{-\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\left[\frac{e^{\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(1+M)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{e^{\left(1-\frac{n}{2}\right)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(1-M)^{\frac{n}{2}-1}}\right]$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(1+M)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{e^{(1-n)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(1-M)^{\frac{n}{2}-1}}\right]$$

dessen reeller Theil mit Berücksichtigung von

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) = \frac{-\pi}{\sin\frac{n\pi}{2}}$$

sich als

$$\frac{\pi}{2}\frac{(1-M)^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}$$

herausstellt.

Da nun M selber von w, welches immer in positiven Grenzen liegt, abhängt, so modificirt sich der Werth X noch, jenachdem die Constanten $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ beschaffen sind. Für

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} < 1$$

ist nämlich umsomehr $M < 1$. Also ist in diesem Falle, wenn man den zweiten Werth substituirt:

$$X = \frac{\alpha\pi^{n/2}}{a^2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty dw\cdot\frac{w^{1-\frac{n}{2}}(1-M)^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{w}{a^2}\right)^3\left(1+\frac{w}{b^2}\right)\left(1+\frac{w}{c^2}\right)}}.$$

Ist aber

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} > 1,$$

so ist M nicht für alle Werthe von $w < 1$, sondern nur für diejenigen, welche größer als die positive Wurzel w_1 der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2+w} + \frac{\beta^2}{b^2+w} + \frac{\gamma^2}{c^2+w} = 1.$$

Das Integral X entbehrt also derjenigen Theile R, für welche $w < w_1$, so daß nur übrig bleibt:

$$X = \frac{\alpha \pi^{3/2}}{a^2 \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)} \int_{w_1}^{\infty} \frac{w^{1-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2+w}-\frac{\beta^2}{b^2+w}-\frac{\gamma^2}{c^2+w}\right)^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{w}{a^2}\right)^3\left(1+\frac{w}{b^2}\right)\left(1+\frac{w}{c^2}\right)}}\, dw.$$

VIII. Die elliptischen Functionen.

§. 139. **Elliptisches Integral erster Gattung.** Eine merkwürdige Klasse von trancendeuten Integralen bilden die sogenannten elliptischen Integrale, früher elliptischen Functionen. Diese Functionen bieten schon an und für sich interessante analytische Eigenschaften dar und gestatten vielfältige Anwendungen in den verschiedenen Zweigen der Mathematik, weshalb sie denn auch die Aufmerksamkeit der neueren Analytiker im hohen Grade in Anspruch genommen haben. Schon Euler legte durch seine sinnreiche Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}} = 0$$

den Grund zu den elliptischen Transcendenten, welche insbesondere von Legendre in seinen exercices de calcul intégral und in seinem traité des fonctions elliptiques, von Abel und Jacobi in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik und in dem von Jacobi herausgegebenen Werke „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ mit der größten Gründlichkeit und Ausführlichkeit behandelt worden sind. Ihren Namen verdanken diese Functionen dem besonderen Umstande, daß sie bei der Bestimmung der Länge eines elliptischen Bogens in Betrachtung kommen.

Die elliptische Function der ersten Art ist:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}$$

wo c eine die Einheit nicht übersteigende Constante bezeichnet. Mit derselben fällt das Integral:

$$\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

zusammen, wenn darin $x = \sin \varphi$ gesetzt wird. Insofern der Betrag des Integrals von c und φ abhängig ist, kann man, wie Legendre

vorgeschlagen und auch allgemein angenommen ist, setzen:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}} = F(c, \varphi);$$

die Constante c wird im Allgemeinen der **Modulus** und die unabhängige Veränderliche φ die **Amplitude** des Integrales genannt.

Setzen wir

$$u = F(c, \varphi),$$

um auszudrücken, daß φ die Amplitude ist, für welche die Function F den Werth u hat; so können wir mit Jacobi schreiben

$$\varphi = \text{am}\, u$$

wo die Anfangsbuchstaben am des Wortes Amplitude andeuten, daß diese Gleichung nichts anders als die Umkehrung der Gleichung

$$u = F(c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}$$

ist

Wenn die Amplitude einen Viertelkreis beträgt, so heißt die elliptische Function vollständig und man bezeichnet sie blos durch: F (c).

Wenn die Werthe der Function für alle zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Werthe von φ berechnet sind, so können sie wegen der periodischen Function von $\sin^2 \varphi$ auch für alle beliebigen Werthe von φ als bestimmt angesehen werden. Denn man hat z. B.

$$F(c, \tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = 2F(c) - F(c, \tfrac{1}{2}\pi - \varphi);$$
$$F(c, \pi + \varphi) = 2F(c) + F(c, \varphi);$$
$$F(c, \tfrac{3}{2}\pi + \varphi) = 4F(c) - F(c, \tfrac{1}{2}\pi - \varphi);$$
$$F(c, 2\pi + \varphi) = 4F(c) + F(c, \varphi).$$

§. 140. **Das Additions- und Subtractions-Theorem für die elliptischen Integrale der ersten Art.** Es seien φ, ψ, μ die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks, worin der der Seite μ gegenüberliegende Winkel M durch die Relation $\sin M = c \sin \mu$ bestimmt ist, dergestalt, daß, wenn der Kürze halber

$$\cos M = \sqrt{1-c^2 \sin^2 \mu} = \Delta \mu$$

gesetzt wird, die Grundformel der sphärischen Trigonometrie die Relation

$$\cos \mu = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi . \Delta \mu$$

gibt. Setzt man in diese Relation statt $\cos \mu$ seinen aus der Gleichung $1-c^2 \sin^2 \mu = (\Delta \mu)^2$ entnommenen Werth, löst dann die Da-

durch gewonnene Gleichung in Bezug auf $\Delta\mu$ auf, indem man die Wurzel unberücksichtigt läßt, welche für $\Delta\mu$ einen negativen Werth geben würde; so bekommt man

$$\Delta\mu(1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi) = -c^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi$$
$$+\sqrt{1-c^2(1-\cos^2\varphi\cos^2\psi+\sin^2\varphi\sin^2\psi-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)}.$$

Man findet aber bald, daß die Größe unter dem Wurzelzeichen mit

$$(1-c^2\sin^2\varphi)^2(1-c^2\sin^2\psi)^2 = (\Delta\varphi)^2\cdot(\Delta\psi)^2$$

gleichbedeutend ist, wobei $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ Größen darstellen, welche beziehungsweise aus φ und ψ auf gleiche Weise zusammengesetzt sind, wie $\Delta\mu$ aus μ. Dieser Bezeichnung zufolge ergibt sich:

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi\cdot\Delta\psi - c^2\sin\cdot\varphi\sin\cdot\psi\cos\cdot\varphi\cos\cdot\psi}{1-c^2\sin^2\cdot\varphi\sin^2\cdot\psi},$$

woraus nach einigen Transformationen, in Erwägung, daß

$$\sin^2\mu = \frac{1-(\Delta\mu)^2}{c^2}$$

ist, entspringt:

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Wenn man nun diese Gleichung differentiirt, indem man φ und ψ als veränderlich und μ als constant ansieht und dabei die in Beziehung auf die Veränderlichen φ, ψ symmetrische Function

$$(1+c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\cos\varphi\cos\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi - \sin\varphi\sin\psi$$
$$+c^2\sin\varphi\sin\psi(\sin^2\varphi+\sin^2\psi-\cos^2\varphi\cos^2\psi-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)$$

mit $K(\varphi,\psi)$ bezeichnet; so erhält man:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{K(\varphi,\psi)}{(1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi^2)} + \frac{d\psi}{\Delta\psi}\cdot\frac{K(\varphi,\psi)}{(1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)^2};$$

oder

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}} = 0;$$

woraus durch Integration entsteht;

$$F(c,\varphi)+F(c,\psi) = \text{const.}$$

Um die Integrationsconstante zu bestimmen, setze man in der zum Grund gelegten Relation

$$\cos\mu = \cos\varphi\cos\psi - \sin\psi\sin\varphi\,\Delta\mu$$

$$\psi = 0, \text{ was } \varphi = \mu \text{ gibt};$$

man erhält dadurch, weil $F(c, 0) = 0$ ist, $F(c, \mu) = \text{const.}$ Man hat also die Gleichung:

$$F(c, \varphi) + F(c, \psi) = F(c, \mu),$$

wobei die Amplituden φ, ψ, μ durch die Relation

$$\cos\mu = \cos\varphi \cos\psi - \sin\psi \sin\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\mu}$$

mit einander verbunden sind.

In dem vorstehenden Satze ist die Addition der elliptischen Functionen erster Art enthalten, da sich ein elliptisches Integral finden läßt, welches der Summe zweier gegebenen Integrale derselben Gattung gleich ist; sein Modulus c ist derselbe, während seine Amplitude μ durch einen der vier unten stehenden Gleichungen bestimmt wird:

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi - c^2 \sin\varphi \sin\psi \cos\varphi \cos\psi}{1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi};$$

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi \cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi \cos\varphi\,\Delta\varphi}{1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi};$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi};$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\operatorname{tang}\varphi\,\Delta\psi + \operatorname{tang}\psi\,\Delta\varphi}{1 - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}.$$

Wäre $u = \frac{1}{2}\pi$, so würde die Gleichung

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}$$

bestehen, mit Hülfe deren ψ durch φ bestimmt wird. $F(c, \varphi)$ und $F(c, \psi)$ heißen complementäre Integrale, wenn sie zusammen das vollständige Integral $F(c)$ ausmachen. Wenn zwei Moduli c, b durch die Gleichung $c^2 + b^2 = 1$ mit einander in Verbindung stehen, so heißt der Eine das Complement des Andern.

Eleganter noch gestalten sich die obigen Resultate, wenn man zu den umgekehrten elliptischen Integralen übergeht. Setzt man nämlich

$$F(c, \varphi) = u, \; F(c, \psi) = v \text{ und } F(c, \mu) = w;$$

so ist

$$\varphi = \operatorname{am} u, \; \psi = \operatorname{am} v, \text{ und } \mu = \operatorname{am} w.$$

Die Gleichung

$$F(c, \varphi) + F(c, \psi) = F(c, \mu)$$

verwandelt sich hiernach in $u + v = w$ und es ist $\mu = \operatorname{am}(u + v)$.

Ferner treten an die Stelle der vorhin aufgeführten drei letzteren Gleichungen die folgenden:

$$\sin \text{am} (u+v) = \frac{\sin \text{am}\, u \cos \text{am}\, v\, \Delta\, \text{am}\, v + \sin \text{am}\, v \cos \text{am}\, u\, \Delta\, \text{am}\, u}{1-c^2 \sin^2 \text{am}\, u \sin^2 \text{am}\, v};$$

$$\cos \text{am} (u+v) = \frac{\cos \text{am}\, u \cos \text{am}\, v - \sin \text{am}\, u \sin \text{am}\, v\, \Delta\, \text{am}\, u\, \Delta\, \text{am}\, v}{1-c^2 \sin^2 \text{am}\, u \sin^2 \text{am}\, v};$$

$$\text{tang}\, \text{am} (u+v) = \frac{\text{tang}\, \text{am}\, u\, \Delta\, \text{am}\, v + \text{tang}\, \text{am}\, v\, \Delta\, \text{am}\, u}{1-\text{tang}\, \text{am}\, u\, \text{tang}\, \text{am}\, v\, \Delta\, \text{am}\, u\, \Delta\, \text{am}\, v}.$$

Diese Formeln sind den goniometrischen Formeln vollkommen analog, welche letztere in der That aus denselben hervorgehen, wenn der Modulus sich auf Null reducirt, wodurch $\sin \text{am}\, u$ in $\sin u$ und $\Delta\, \text{am}\, u$ in 1 übergeht. Die goniometrischen Formeln können demnach als specielle Fälle der elliptischen Formeln angesehen werden. Wie für die gesammte Goniometrie die Relationen für $\sin (u+v)$ und $\cos (u+v)$ die Grundlage bilden, so machen in ganz ähnlicher Weise die Relationen für $\sin \text{am} (u+v)$ und $\cos \text{am} (u+v)$ die Grundlage für die Theorie der inversen elliptischen Functionen $\sin \text{am}\, u$, $\cos \text{am}\, u$, $\text{tang}\, \text{am}\, u$ u. s. w. aus, welche in der neueren Zeit vorzugsweise *elliptsche Functionen* im Gegensatze zu den *elliptischen Integralen* genannt worden sind.

Da

$$\int_0^{-\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \psi}} = -\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \psi}},$$

was nach unserer Bezeichnung zusammenfällt mit

$$F(c, -\psi) = -F(c, \psi);$$

so sei:

$$F(c, \varphi) - F(c, \psi) = F(c, \mu).$$

Mittelst dieser Formel läßt sich ein elliptisches Integral finden, das die *Differenz* zweier gegebenen Integrale ausmacht, seine Amplitude μ wird durch eine oder die andere nachstehender vier Gleichungen bestimmt:

$$\Delta \mu = \frac{\Delta \varphi\, \Delta \psi + c^2 \sin \varphi \sin \psi \cos \varphi \cos \psi}{1-c^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi};$$

$$\sin \mu = \frac{\sin \varphi \cos \psi\, \Delta \psi - \cos \varphi \sin \psi\, \Delta \varphi}{1-c^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi};$$

$$\cos \mu = \frac{\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi\, \Delta \varphi\, \Delta \psi}{1-c^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi};$$

$$\tang\mu = \frac{\tang\cdot\varphi\,\varDelta\,\psi - \tang\cdot\psi\,\varDelta\,\varphi}{1+\tang\varphi\,\tang\psi\,\varDelta\,\varphi\,\varDelta\,\psi}.$$

Wählt man wieder die frühere Bezeichnung

$$F(c,\varphi) = u,\ F(c,\psi) = v \text{ und } F(c,\mu) = w,$$

wonach $\varphi = \text{am}\, u$, $\psi = \text{am}\, v$ und $\mu = \text{am}\, w = \text{am}\,(u-v)$; so verwandeln sich die letzteren Formeln in folgende:

$$\sin \text{am}\,(u-v) = \frac{\sin \text{am}\, u \cos \text{am}\, v\, \varDelta\, \text{am}\, v - \sin \text{am}\, v \cos \text{am}\, u\, \varDelta\, \text{am}\, u}{1 - c^2 \sin^2 \text{am}\, u \sin^2 \text{am}\, v};$$

$$\cos \text{am}\,(u-v) = \frac{\cos \text{am}\, u \cos \text{am}\, v + \sin \text{am}\, u \sin \text{am}\, v\, \varDelta\, \text{am}\, u\, \varDelta\, \text{am}\, v}{1 - c^2 \sin^2 \text{am}\, u \sin^2 \text{am}\, v};$$

$$\tang \text{am}\,(u-v) = \frac{\text{tg}\, \text{am}\, u\, \varDelta\, \text{am}\, v - \text{tg}\, \text{am}\, v\, \varDelta\, \text{am}\, u}{1 + \text{tg}\, \text{am}\, u\, \text{tg}\, \text{am}\, v\, \varDelta\, \text{am}\, u\, \varDelta\, \text{am}\, v};$$

welche Ausdrücke den goniometrischen Formeln wieder analog sind.

§. 141. **Das Multiplications- und Divisionstheorem für die elliptischen Integrale der ersten Art.** Kommt das Additionstheorem wiederholt in Anwendung, so läßt sich eine Amplitude μ finden, für welche

$$F(c,\mu) = F(c,\varphi_1) + F(c,\varphi_2) \cdots\cdots + F(c,\varphi_m)$$

ist. Daraus ergibt sich, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 \cdots\cdots = \varphi_m = \varphi$, die Gleichung: $F(c,\mu) = m\,F(c,\varphi)$, wo das auf der linken Seite befindliche Integral ein gegebenes vielfaches des auf der rechten Seite stehenden Integrales ist. Der letzte Satz enthält die Multiplication des elliptischen Integrales, wonach es denn darauf ankommt, dessen Amplitude μ, welche bezeichnende durch φ_m dargestellt werden mag, zu bestimmen, wenn φ und m gegeben sind.

Um die einem gegebenen Vielfachen entsprechende Amplitude zu ermitteln, seien φ_{m-1}, φ_m, φ_{m+1}, drei Amplituden, welche den Gleichungen:

$$F(c,\varphi_{m+1}) = F(c,\varphi_m) + F(c,\varphi)$$
$$F(c,\varphi_{m-1}) = F(c,\varphi_m) - F(c,\varphi)$$

genügen. Durch Anwendung des Additions- und Subtractionstheorems ergibt sich hieraus:

$$\sin\varphi_{m\pm1} = \frac{\sin\varphi_m \cos\varphi\,\varDelta\,\varphi \pm \sin\varphi\cos\varphi_m\,\varDelta_m}{1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_m};$$

$$\cos\varphi_{m\pm1} = \frac{\cos\varphi_m\cos\varphi + \sin\varphi\sin\varphi_m\,\varDelta\,\varphi\,\varDelta\,\varphi_m}{1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_m};$$

woraus

$$\sin\varphi_{m+1} + \sin\varphi_{m-1} = \frac{2\sin\varphi_m \cos\varphi\, \Delta\varphi}{1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi_m};$$

und

$$\cos\varphi_m + 1 + \cos\varphi_{m+1} = \frac{2\cos\varphi_m \cos\varphi}{1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi_m}.$$

Durch Division der zwei letzteren Gleichungen durcheinander entsteht:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} [\varphi_{m+1} + \varphi_{m-1}] = \Delta\varphi \operatorname{tang}_m.$$

Hieraus entspringt, wenn man von $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \varphi$ ausgeht:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi_2 = \Delta\varphi \cdot \operatorname{tang}\varphi;$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi) = \Delta\varphi \cdot \operatorname{tang}\varphi_2;$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi_4 + \varphi_2) = \Delta\varphi \cdot \operatorname{tang}\varphi_3;$$

u. s. w., so daß sich die Werthe von φ_2, φ_3, $\varphi_4 \cdots\cdot$ nach und nach leicht berechnen lassen.

Die Gleichung $F(c, \varphi_m) = m F(c, \varphi)$ in umgekehrter Form

$$F(c, \varphi) = \frac{1}{m} F(c, \varphi_m)$$

dargestellt liefert, wenn wieder einer mehr charakterisirenden Bezeichnung halber φ statt φ_m und $\varphi_{\frac{1}{m}}$ statt φ gesetzt wird, die Relation:

$$F\left(c, \varphi_{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m} F(c, \varphi),$$

in welcher das Problem der Division des elliptischen Integrals enthalten ist, so daß die größere Amplitude φ als gegeben und die kleinere $\varphi_{\frac{1}{m}}$ als die zu bestimmende Unbekannte zu betrachten ist. Für den Fall einer Theilung durch 2 wird die Amplitude $\varphi_{\frac{1}{2}}$, wenn man der Abkürzung halber $\sin\varphi_{\frac{1}{2}}$ mit x bezeichnet, mittelst der Gleichung vom 4ten Grade:

$$\cos\varphi = \frac{1 - 2x^2 + c^2 x^4}{1 - c^2 x^4}$$

bestimmt; und für den Fall einer Theilung durch 3, die Amplitude $\varphi_{\frac{1}{3}}$, wo $\sin\varphi_{\frac{1}{3}} = x$ mittelst der Gleichung vom 9. Grade:

$$\sin\varphi = \frac{4(1 - c^2 x^2)(1 - x^2) - (1 - c^2 x^4)^2}{(1 - c^2 x^4)^2 - 4c^2 x^4 (1 - c^2 x^2)(1 - x^2)}\, x;$$

und so weiter, so daß zur Bestimmung der Amplitude $\varphi_{\frac{1}{m}}$ die Auflösung einer algebraischen Gleichung vom m^2 Grade erforderlich ist.

Handelt es sich darum, die Amplitude ψ in der Weise zu bestimmen, daß der Gleichung

$$F(c, \psi) = \frac{m}{n} F(c, \varphi)$$

Genüge geschieht worin m und n ganze Zahlen sind, so nimmt man einen Hülfswinkel μ dergestalt, daß einerseits $m F(c, \varphi) = F(c, \mu)$ und andererseits $n F(c, \psi) = F(c, \mu)$ ist. Die erste Bedingung gibt eine Gleichung zwischen $\sin \varphi$ und $\sin \mu$; die zweite eine Gleichung zwischen $\sin \psi$ und $\sin \mu$; eliminirt man nun $\sin \mu$ aus diesen beiden Bedingungsgleichungen, so erhält man eine Relation zwischen ψ und φ, wie sie das Bestehen der Gleichung

$$F(c, \psi) = \frac{m}{n} F(c, \varphi)$$

verlangt.

§. 142. **Das Verhalten des Imaginären bei den elliptischen Functionen der ersten Art.** Das elliptische Integral der ersten Gattung besitzt eine bemerkenswerthe Eigenschaft, an welcher die übrigen Functionen in ähnlicher Weise Theil nehmen. Wir gelangen zu der in Frage stehenden Eigenschaft, wenn wir setzen

$$\sin \varphi = \sqrt{-1} \cdot \tang \varphi' \text{ und } b^2 = 1 - c^2.$$

Es ergibt sich daraus

$$\cos \varphi = \frac{1}{\cos \varphi'}, \text{ und } d\varphi = \sqrt{-1}\ \frac{d\varphi'}{\cos \varphi'};$$

ferner

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{-1} \cdot \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \varphi'}},$$

oder

$$F(c, \varphi) = \sqrt{-1} \cdot F(b, \varphi'),$$

in welcher Gleichung die im Auge gehabte Eigenschaft enthalten ist.

Setzt man

$$F(b, \varphi') = u;\ F(c, \varphi) = u \sqrt{-1},$$

so folgt, wenn der Modulus beigefügt wird, um die auf verschiedene Moduli Bezug habenden Amplituden zu unterscheiden:

$$\sin \varphi' = \sin \mathrm{am}\,(u, b);\ \tang \varphi' = \tang \mathrm{am}\,(u, b),$$

$$\text{und } \sin\varphi = \sin\text{am}\,(u\sqrt{-1},\ c).$$

Dadurch verwandelt sich die Relation $\sin\varphi = \sqrt{-1}\,\text{tang}\,\varphi'$ in $\sin\text{am}\,(u\sqrt{-1},\ c) = \sqrt{-1}\cdot\text{tang}\cdot\text{am}\,(u,\ b)$.

Nehmen wir nun $\varphi = \frac{1}{2}\,\pi$ und bezeichnen den Werth der vollständigen Function F (c) mit $\frac{1}{2}\,\omega$, so ist:

$$\sin\text{am}\,(u,\ c) = \sin\text{am}\,(u + 2\,\omega,\ c)$$
$$= \sin\text{am}\,(u + 4\omega,\ c) \cdots\cdots \sin\text{am}\,(u + 2m\,\omega,\ c),$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet. — Bezeichnen wir analog den Werth der vollständigen Function F (b) mit $\frac{1}{2}\,\omega'$ so ist in gleicher Weise

$$\text{tang am}\,(u,\ b) = \text{tang am}\,(u + \omega',\ b)$$
$$= \text{tang am}\,(u + 2\,\omega',\ b) \cdots\cdots \text{tang am}\,(u + m'\,\omega',\ b),$$

wo m' eine beliebige ganze Zahl darstellt. Also

$$\sin\text{am}\,(u\sqrt{-1}) = \sin\text{am}\,[(u + m'\,\omega')\sqrt{-1}],$$

in welcher Formel sich die Amplituden auf den Modulus c beziehen. Es ist daher

$$\sin\text{am}\,(m'\,\omega'\sqrt{-1}) = \sin\text{am}\,(0) = 0;$$
$$\cos\text{am}\,(m'\,\omega'\sqrt{-1}) = \cos\text{am}\,(0) = 1;$$
$$\Delta\,\text{am}\,(m'\,\omega'\sqrt{-1}) = 1.$$

Macht man in der Formel

$$\sin\text{am}\,(u+v) = \frac{\sin\text{am}\,u\cdot\cos\text{am}\,v\cdot\Delta\text{am}\,v + \sin\text{am}\,v\cdot\cos\text{am}\,u\,\Delta\,\text{am}\,u}{1 - c^2\,\sin^2\text{am}\,u\,\sin^2\text{am}\,v},$$

nunmehr $v = m'\,\omega'\sqrt{-1}$, so finden wir in Folge der eben erhaltenen Relationen:

$$\sin\text{am}\,(u + m'\,\omega'\sqrt{-1}) = \sin\text{am}\,u.$$

Es ist aber, wie schon bemerkt,

$$\sin\text{am}\,(u + 2\,m\,\omega) = \sin\text{am}\,u;$$

folglich

$$\sin\text{am}\,u = \sin\text{am}\,(u + 2m\,\omega + m'\,\omega'\sqrt{-1}).$$

Die letztere Formel zeigt also, daß die Function sin am u periodisch bleibt, möge die Veränderliche eine Reihe reeller oder imaginärer Werthe durchlaufen; ein eigenthümliches Merkmal, in Folge dessen die Function die Haupteigenschaften der goniometrischen Functionen mit jener der Exponential-Functionen in sich vereinigt.

§. 143. **Reduction eines elliptischen Integrales erster Art auf ein zweites von anderem Modulus und anderer Amplitude.**

Macht man

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$$

und bestimmt man φ' mittelst der Gleichung $\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin \varphi$; so hat man im Allgemeinen die Relation:

$$F(c^1, \varphi') = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi)$$

in welcher die Reduction eines elliptischen Integrals auf ein zweites von anderem Modulus und anderer Amplitude enthalten ist. In der That liefert die Relation $\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin \varphi$ zunächst

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \Delta \varphi;$$

aus der Verbindung dieser beiden Relationen ergibt sich

$$\cos 2\varphi' = \cos \varphi \, \Delta \varphi - c \sin^2 \varphi;$$

mithin

$$2 \cos^2 \varphi' = 1 - c \sin^2 \varphi + \cos \varphi \, \Delta \varphi;$$
$$2 \sin^2 \varphi' = 1 + c \sin^2 \varphi - \cos \varphi \, \Delta \varphi;$$

und

$$2 \sin \varphi' \cos \varphi' = \sin \varphi (c \cos \varphi + \Delta \varphi).$$

Durch Differentiation der vorletzten Gleichung entsteht weiter

$$2\, d\varphi' = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}(c \cos \varphi + \Delta \varphi);$$

ferner findet man bald, daß

$$\sqrt{1 - c'^2 \sin^2 \varphi'} = \frac{c \cos \varphi + \Delta \varphi}{1 + c}.$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen entspringt:

$$\frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - c'^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{1+c}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

oder

$$F(c^1, \varphi^1) = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi),$$

wo bei der Integration keine Constante hinzugefügt wurde, weil die Amplituden φ und φ' gleichzeitig verschwinden.

Setzt man $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$; so wird $F(c', \varphi') = F(c')$; ferner $\sin(\pi - \varphi) = c \sin \varphi$ und $\cos(\pi - \varphi) = \Delta \varphi$. Der kleinste der letzteren Relation genügende Werth von φ ist π, mithin im vorliegenden Falle $F(c, \varphi) = 2 F(c)$. Zwischen den vollständigen Functionen erster Art besteht demnach folgende einfache Relation:

$$F(c') = (1 + c) F(c).$$

Wegen $c < 1$ ist $(1 + c)^2 < 4$; folglich $c' > c$; ferner wegen

$$\sin(2\varphi' - \varphi) < \sin\varphi \text{ ist } \varphi' < \varphi:$$

man kann daher mittelst der Formel

$$F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} \cdot F(c, \varphi)$$

ein elliptisches Integral auf ein anderes mit kleinerem Modulus und größerer Amplitude zurückführen.

Schreibt man die vorige Gleichung in der umgekehrten Form

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} F(c' \varphi'),$$

in dem man c' und φ' als gegeben betrachtet und c und φ mittelst der Relationen

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \text{ und } \sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin\varphi$$

ableitet; so läßt sich mit Hülfe der obigen Gleichung ein elliptisches Integral auf ein anderes mit größerem Modulus und kleinerer Amplitude reduciren.

§. 144. **Näherungsmethode zur Berechnung des Werthes von** $F(c, \varphi)$. Auf den im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen zwei Formeln beruhen zwei Methoden zur näherungsweisen Berechnung des Werthes von $F(c, \varphi)$. Man kann dabei zwei Fälle unterscheiden, ob nämlich c^2 größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Im ersteren Falle denke man sich eine Reihe, oder wie man auch zu sagen pflegt, eine Scala der Moduli $c_1, c_2, c_3 \cdots$, welche unter sich und mit dem ursprünglichen Modulus c durch die Gleichungen:

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \; c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}, \; c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''} \text{ u. s. w.}$$

verbunden sind, und außerdem eine Reihe von Amplituden, welche vermittelst der Gleichungen:

$$\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin\varphi; \; \sin(2\varphi'' - \varphi') = c' \sin\varphi' \text{ und}$$
$$\sin(2\varphi''' - \varphi'') = c'' \sin\varphi'' \cdots\cdots$$

in Verbindung stehen. Wenn man dergestalt in der Reihe der Amplituden bis zum Gliede $\varphi^{(n)}$ und in der Scala der Moduli bis zu $c^{(n)}$ fortgeschritten ist und dabei die Relation

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} F(c', \varphi')$$

als Ausgangspunkt gewählt hat; erhält man folgende Formel:

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} \cdot \frac{2}{1+c'} \cdot \frac{2}{1+c''} \cdots\cdots \frac{2}{1+c^{(n-1)}} F(c^{(n)} \varphi^{(n)}),$$

oder

$$F(c, \varphi) = F(c^{(n)}, \varphi^{(n)}) \sqrt{\frac{c' \, c'' \, c''' \cdots c^{(n)}}{c}}.$$

Wenn man aber in der Scala der Moduli bis zu dem wenig von der Einheit verschiedenen Gliede $c^{(n)}$ gelangt ist, so hat man sehr nahe:

$$F(c^{(n)}, \varphi^{(n)}) = \int_0^{\varphi^{(n)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = l \tang\left(\frac{\varphi^{(n)}}{2} + \frac{1}{4}\pi\right);$$

mithin

$$F(c, \varphi) = l \tang\left(\frac{\varphi^{(n)}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{c' \, c'' \, c''' \cdots c^{(n)}}{c}}.$$

Verlangt man nur eine auf sieben Decimalstellen sich erstreckende Genauigkeit; so wird schon $c_3 = c_4 \cdots = 1$; und

$$\varphi''' = \varphi'''' \cdots = \varphi^{(n)}.$$

Im zweiten Falle, wo $c^2 < \frac{1}{2}$ ist, wird man den Modulus vermindern, oder in der Scala der Moduli wie in der Reihe der Amplituden rückwärts gehen, indem die Gesetze für die abnehmenden Muduli und die entsprechenden im Wachsen begriffenen Amplituden dieselben bleiben, wie für die wachsenden Moduli und die dazu gehörigen fallenden Amplituden. Indem wir dergestalt die Gleichungen

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c_1}{2} F(c_1, \varphi_1), \quad F(c_1, \varphi_1) = \frac{1+c_2}{2} F(c_2 \, \varphi_2)$$

u. s. w. benutzen, haben wir:

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2} \cdot \frac{1+c_3}{2} \cdots F(c_n, \varphi_n).$$

Bei fortwährendem Wachsen von n verschwindet c_n und man hat sehr nahe

$$F(c_n', \varphi_n) = \int_0^{\varphi_n} d\varphi = \varphi_n;$$

folglich

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2} \cdot \frac{1+c_3}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{1+c_n}{2} \, \varphi_n;$$

oder

$$F(c, \varphi) = \frac{\varphi_n}{c} \sqrt{\frac{c_n'}{c_1 \cdot c_2 \cdots c_{n-1}}}$$

Das umgekehrte Problem, nämlich die Amplitude φ aus dem Werthe von $F(c, \varphi)$ zu bestimmen, läßt sich ebenfalls mit Hülfe der

eben gefundenen Formeln lösen. Für den Fall, daß $c^2 > \frac{1}{2}$ und $F(c, \varphi) = u$ ist, berechne man die wachsenden Moduli c', c'', c''' mittelst der Formeln

$$c' = \frac{2c}{1+c}\,;\; c'' = \frac{2c'}{1+c'}$$

u. s. f., bis man auf einen Modulus kommt, welcher mit der gewünschten Genauigkeit gleich 1 gesetzt werden darf. Es finde dies für c'''' statt, in welchem Falle auch die darauf folgenden für 1 gelten können. Die erstere der oben angeführten Relationen gibt dann:

$$l\,\mathrm{tang}\,(\tfrac{1}{2}\varphi'''' + \tfrac{1}{4}\pi) = u\sqrt{\frac{c}{c'\,c''\,c'''}}\,.$$

Mittelst der Relationen:

$$\sin(2\varphi'''' - \varphi''') = c''\sin\varphi'''\,;\; \sin(2\varphi''' - \varphi'') = c''\sin\varphi''\,;$$
$$\sin(2\varphi'' - \varphi') = c'\sin\varphi'\,;\; \sin(2\varphi' - \varphi) = c\sin\varphi$$

erhält man zuletzt $\varphi = \mathrm{am}\,u$.

Ist aber $c^2 < \frac{1}{2}$, so berechnet man die abnehmenden Moduli c_1, c_2 —, ... nach denselben Formeln, bis man zu einem Modulus kommt, der hinreichend genau mit Null zusammenstimmt. Es sei dies für c_4 der Fall. Die zweite der obigen Formeln gibt hierauf

$$\varphi_4 = \frac{2^3 u}{(1+c_1)(1+c_2)(1+c_3)}$$

die Gleichungen $\sin(2\varphi_3 - \varphi_4) = c_3 \sin\varphi_3\,;$

$\sin(2\varphi_2 - \varphi_3) = c_2 \sin\varphi_2$ —, ...

liefern φ_3, φ_2 ... und zuletzt $\varphi = \mathrm{am}\,u$.

§. 145. **Beispiele zur Anwendung der vorhergehenden Regeln.**

1) Ein Beispiel zur Berechnung von F für wachsende Moduli ist Folgendes: Es sei verlangt $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right)$. Die Berechnung von c aus c′ geschieht am besten durch den Hülfswinkel α, so daß

$$c' = \sin 2\alpha, \text{ wo } c = \mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

Man findet

$$\begin{aligned}
\log c &= 0{,}8494850-1\,; & \alpha &= 40^0\ 3'\ 37'',3.\\
\log c' &= 0{,}9935119-1\,; & \varphi' &= 40^0\ 52'\ 50'',2.\\
\log c'' &= 0{,}9999879-1: & \varphi'' &= 48^0\ 23'\ 55'',2.\\
\log c''' &= 0{,}0000000.\,; & \varphi''' &= 48^0\ 23'\ 51'',9.
\end{aligned}$$

$$\log \text{l}\, \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi'''\right) = 0{,}9858219-1$$

$$\log \sqrt{\frac{c'\ c''\ c'''}{c}} = 0{,}0720074$$

$$\log F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}0578293$$

alſo iſt

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}142429,$$

wie in Legendre's Tafel.

2) Um, im Falle die Moduli wachſen, eine Amplitude zu berechnen, forme man erſt die Gleichung

$$\sin(2\varphi''' - \varphi'') = c'' \sin \varphi''$$

ein wenig um, damit ſich die Rückwärtsberechnung von φ'' aus φ''' bequem logarithmiſch ausführen laſſe. Man findet leicht:

$$\frac{\sin \varphi'' - \sin(2\varphi'' - \varphi'')}{\sin \varphi'' + \sin(2\varphi'' - \varphi'')} = \frac{1-c''}{1+c''};$$

Führt man hier die zur Berechnung von $c'\ c''$, ⋯ gebrauchten Hülfswinkel α durch die Gleichung $c'' = \text{tg}^2\, \alpha''$ ein, ſo erhält man leicht

$$\text{tg}(\varphi''-\varphi''') = \text{tg}\, \varphi''' \cos 2\alpha''.$$

Man findet nun für $c = \sin 80^0$:

$$\log c = 0{,}9933515-1; \qquad 2\alpha = 89^0\ 33'\ 41''$$

$$\log c' = 0{,}9999873-1; \qquad 2\alpha' = 89^0\ 59'\ 57''$$

$$\log c'' = 0{,}9999998-1; \quad \log c''' = 0.$$

Es ſei nun $u = F(\sin 80^0, \varphi) = 0{,}5484254$; ſo iſt

$$\log \sqrt{\frac{c}{c'\ c''}} = 0{,}9966822-1$$

$$\log u = 0{,}7391177-1$$

$$\log \text{l}\, \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi''\right) = 0{,}7357999-1.$$

$\varphi'' = 29^0\ 44'\ 55''$, alſo nach obiger Formel

$$\varphi' = 29^0\ 44'\ 57''; \ \varphi = 30^0\ 0'\ 0'' = \text{am}\ u.$$

Mithin iſt

$$F\left(\sin 80^0, \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5484254.$$

Legendre hat in ſeinem Traité ꝛc. eine Tabelle der Werthe der Function F mitgetheilt, in welcher φ von Grad zu Grad wächſt; ferner

ist daselbst $c = \sin \vartheta$ gesetzt, so daß ϑ der Winkel des Modul heißt, welcher ebenfalls daselbst um je einen Grad steigend angenommen ist. Es möge hier ein kleiner Auszug aus dieser Tafel folgen.

Werthe von ϑ.

Werthe von φ	10°	20°	30°	40°
10°	0,1745595	0,1746361	0,1747539	0,1748989
20	0,3492748	0,3498802	0,3508187	0,3518987
30	0,5242840	0,5262840	0,5294286	0 5334275
40	0,6996916	0,7042871	0,7116473	0,7212624
50	0,8755554	0,8841621	0,8982452	0,9172549
60	1,0518791	1,0659689	1,0895507	1,1225567
70	1,2286101	1,2495263	1,2853006	1,3372282
80	1,4056452	1,4344158	1,4845546	1,5597344
90	1,5828428	1,6200259	1,6857504	1,7867691

Werthe von ϑ.

Werthe von φ	50°	60°	70°	80°
10°	0,1750539	0 1752003	0,1753201	0,1753985
20	0,3532572	0,3544722	0,3554796	0,3561456
30	0,5378677	0,5422291	0,5459319	0,5484253
40	0,7323079	0,7435807	0,7535208	0,7604264
50	0,9400757	0,9646516	0,9876225	1,0044394
60	1,1643164	1,2125366	1,2618599	1,3013532
70	1,4067685	1,4944109	1,5959062	1,6918149
80	1,6659654	1,8125295	2,0119280	2,2652733
90	1,9355811	2,1565156	2,5045501	3,1533853

§. 146. **Elliptisches Integral der zweiten Art.** Die Formel:

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} = \int_0^\varphi \frac{(1-c^2 \sin^2 \varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi} = E\,(c,\ \varphi),$$

wo wieder c einen ächten Bruch bezeichnet, enthält die Definition der Function E (c, φ), welche man das elliptische Integral zweiter Art genannt hat. Auf dasselbe kommt das bestimmte Integeral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-c^2 x^2}$$

heraus, wenn $x = \sin \varphi$ gesetzt wird. Wenn die Amplitude $\varphi = \frac{\pi}{2}$

ist, so heißt die elliptische Function wieder vollständig und wird durch E (c) bezeichnet. Die Eigenschaften der Functionen E (c, φ) haben viel Aehnlichkeit mit denen der Function F (c, φ) und können aus den letzteren folgendermaßen abgeleitet werden.

Wir nehmen wieder zwei Winkel φ, ψ welche der Gleichung

$$\cos\mu = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\mu,$$

mithin der Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0$$

Genüge thun. Es ist folglich

$$d\cdot E(c,\varphi) + d\cdot E(c,\psi) = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\varphi}{\Delta\psi} - c^2\left(\sin^2\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \sin^2\varphi\frac{d\psi}{\Delta\psi}\right)$$

$$= c^2(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\,.$$

Nun gibt aber die Gleichung

$$\cos\mu = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\mu$$

durch Differentiation:

$$-\Delta\mu\,d\cdot\sin\varphi\sin\psi = \sin\varphi\cos\psi\,d\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cdot d\psi,$$

oder

$$-\Delta\mu\,d\cdot\sin\varphi\sin\psi = (\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\varphi - \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\psi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\,.$$

Außerdem hat man mittelst zweier im §. 140 vorkommenden Relationen die Gleichung:

$$\frac{\sin\mu}{\Delta\mu} = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - c^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}\,.$$

Aus der Verbindung der zwei letzten hier aufgestellten Gleichungen findet man aber bald:

$$\sin\mu\,d\cdot\sin\varphi\sin\psi = (\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\,.$$

Es ist folglich:

$$d\cdot E(c,\varphi) + d\cdot E(c,\psi) = c^2\sin\mu\cdot d\sin\varphi\sin\psi,$$

oder wenn man integrirt:

$$E(c,\varphi) + E(c,\psi) = \text{const} + c^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi.$$

Bestimmt man die Integrationsconstante in der Weise, daß zugleich $\psi = 0$ und $\varphi = \mu$ ist, so hat man

$$E(c,\varphi) + E(c,\psi) = E(c,\mu) + c^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi.$$

In dieser Gleichung ist das Additionstheorem für das zweite elliptische

Integral enthalten, insofern mit Berücksichtigung der einen oder der andern nachstehender Formeln:

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\,\psi + \cos\varphi\sin\psi\,\Delta\,\varphi}{1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\,\varphi\,\Delta\,\psi}{1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\operatorname{tang}\varphi\,\Delta\,\psi + \operatorname{tang}\psi\,\Delta\,\varphi}{1-\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\,\Delta\,\varphi\,\Delta\,\psi}$$

sich ein Integral E (c, μ) angeben läßt, welches mit Zusatz eines algebraischen Ausdruckes, die Summe der Integrale E (c, φ) und E (c, ψ) bildet.

Bezeichnen wir mit $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \cdots$ die Amplituden, welche den Gleichungen

$$F(c, \varphi_2) = 2\,F(c, \varphi);\ F(c, \varphi_3) = 3\,F(c, \varphi) \cdots$$

genügen, so haben wir die entsprechenden Formeln

$$2\,E(c, \varphi) - E(c, \varphi_2) = c^2\sin\varphi\sin\varphi\sin\varphi_2;$$

$$3\,E(c, \varphi) - E(c, \varphi_3) = c^2\sin\varphi(\sin\varphi\sin\varphi_2 + \sin\varphi_2\sin\varphi_3);$$

$$4\,E(c, \varphi) - E(c, \varphi_4) = c^2\sin\varphi(\sin\varphi\sin\varphi_2 + \sin\varphi_2\sin\varphi_3 + \sin\varphi_3\sin\varphi_4)$$

u. s. f. Die nämliche Relation zwischen φ_n und n, welche

$$F(c, \varphi_n) = n\,F(c, \varphi)$$

gibt, macht die Differenz n E (c, φ) — φ (c, φ_n) einem algebraischen Ausdruck gleich.

Setzt man $\mu = \frac{1}{2}\pi$, so bekommt man

$$E(c, \varphi) + E(c, \psi) - E(c) = c^2\sin\varphi\sin\psi;$$

und die entsprechende Amplitudengleichung ist:

$$\operatorname{tang}\psi \cdot \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}};$$

so daß

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\cos\varphi;\ \sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi};\ \cos\psi = \frac{\sqrt{1-c^2}\,.\,\sin\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\text{und } c^2\sin\varphi\sin\psi = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

§. 147. **Transformation des elliptischen Integrals zweiter Art.** Nehmen wir wieder einen Modulus c′ und eine Amplitude φ', welche mit c und φ durch die Gleichungen

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \text{ und } \sin(2\,\varphi' - \varphi) = c\sin\varphi$$

verbunden sind. Indem wir die aus diesen Gleichungen für dφ' und

$\varDelta\,(c', \varphi')$ sich ergebenden und im §. 143 aufgeführten Werthe zu Hülfe nehmen, so haben wir

$$d\varphi' \sqrt{1-c'^2 \sin^2 \varphi'} = \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} \frac{(c \cos \varphi + \varDelta\,\varphi)^2}{2\,(1+c)};$$

oder

$$(1+c) \sqrt{1-c'^2 \sin^2 \varphi'}\, d\varphi' = \varDelta\,\varphi \cdot d\varphi - \left(\frac{1-c^2}{2}\right)\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \cos\varphi\, d\,\varphi.$$

Wenn man integrirt, ergibt sich:

$$(1+c)\,E\,(c', \varphi') = E\,(c, \varphi) - \left(\frac{1-c^2}{2}\right) F\,(c, \varphi) + c \sin \varphi,$$

wo keine Integrationsconstante hinzugefügt ist, weil alle Glieder der Gleichung für $\varphi = 0$ einzeln zum Verschwinden kommen. Mittelst der letzteren Formel ist man also im Stande, einmal ein elliptisches Integral der zweiten Art durch zwei elliptische Integrale, das eine von der ersten und das andere von der zweiten Art, welche denselben Modulus und dieselbe Amplitude haben, auszudrücken; und dann ein elliptisches Integral der ersten Art durch zwei elliptische Integrale der zweiten Art von verschiedenem Modulus und von verschiedener Amplitude zu ersetzen.

Macht man $\varphi = \pi$, so hat man $\varphi' = \frac{\pi}{2}$; ferner $E\,(c, \pi) = 2\,E(c)$ und $F\,(c, \pi) = 2\,F\,(c)$. Hiernach stellt sich zwischen den vollständigen elliptischen Functionen der ersten und zweiten Art folgende Relation heraus:

$$(1+c)\,E\,(c') = 2\,E\,(c) - (1-c^2)\,F\,(c).$$

Betrachten wir eine Reihe von Functionen

$$E\,(c, \varphi),\ E\,(c', \varphi')\ E\,(c'', \varphi'')$$

u. s. w. nach dem nämlichen Gesetze wie die Functionen

$$F\,(c, \varphi),\ F\,(c', \varphi')\ F\,(c'', \varphi'')$$

u. s. w. gebildet; so haben wir zuförderst die beiden Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\,(1-c^2)\,F\,(c, \varphi) = E\,(c, \varphi) - (1+c)\,E\,(c', \varphi') + c \sin \varphi,$$

$$\tfrac{1}{2}\,(1-c_{\prime}^2)\,F\,(c', \varphi') = E\,(c', \varphi') - (1+c')\,E\,(c'', \varphi'') + c' \sin \varphi';$$

überdieß aber

$$F\,(c', \varphi') = \frac{1+c}{2}\,F\,(c, \varphi).$$

Indem wir nun die Functionen $F\,(c,' \varphi')$ und $F\,(c, \varphi)$ zwischen diesen drei Gleichungen eliminiren und für c' seinen in c ausgedrückten Werth substituiren, erhalten wir:

$$E(c,\varphi) = \frac{(1+c)(2+c+c^2)}{1-c} E(c',\varphi') - \frac{(1+c)^2(1+\sqrt{c})^2}{1-c} E(c'',\varphi'')$$
$$- c \sin\varphi + \frac{2(1+c)^2\sqrt{c}}{1-c} \sin\varphi'.$$

Indem wir diese Regelung weiter führen, dabei die aufwärts oder abwärts steigende Scala der Moduli zu Grunde legend, können wir die Function $E(c, \varphi)$ immer von zwei anderen Functionen derselben Art abhängig machen, für welche der Modulus einen sehr wenig von Null oder der Einheit verschiedenen Werth besitzt. Im ersten Falle ist sehr nahe

$$E(c_n, \varphi_n) = \int_0^{\varphi_n} d\varphi = \varphi_n;$$

und im zweiten Falle fast

$$E(c_n, \varphi_n) = \int_0^{\varphi_n} \cos\varphi \, d\varphi = \sin\varphi_n.$$

Setzt man $\varphi'' = \frac{1}{2}\pi$, so hat man $\varphi' = \pi$ und $\varphi = 2\pi$; was

$$E(c'', \varphi'') = E(c''), E(c', \varphi') = 2E(c'),$$

und
$$E(c, \varphi) = 4E(c)$$

gibt. Hiernach besteht zwischen drei vollständigen elliptischen Integralen der zweiten folgende Relation:

$$(1-c)E(c) = (1+c)(2+c+c^2)E(c') - (1+\sqrt{c})^2(1+c)^2 E(c'')$$

§. 148. **Näherungsmethode für die Berechnung des Werthes von** $E(c, \varphi)$. Der im vorhergehenden Paragraphen mitgetheilte Satz kann zur Berechnung des Werthes $E(c, \varphi)$ benützt werden. Legendre hat jedoch zu diesem Behuf eine schneller zum Ziel führende Methode angegeben, welche wir jetzt auseinander setzen wollen. — Es seien wieder φ und φ_1 zwei Amplituden, ferner c und c_1, zwei Moduli, welche durch die Gleichungen

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = c_1 \sin\varphi_1 \text{ und } c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}$$

gegenseitig miteinander verbunden sind. Den im §. 142 aufgestellten Relationen gemäß haben wir dann:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1},$$

und
$$\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}(1+c_1 \sin^2\varphi_1 - \Delta\varphi_1 \cos\varphi_1);$$

wo im Allgemeinen das Radical $\sqrt{1-c_n^2 \sin^2\varphi_n}$ durch $\Delta\varphi_n$ dargestellt wird. Dies vorausgeschickt, betrachten wir das Integral:

$$G = \int_0^{\varphi} (A + B \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta\varphi};$$

welches aus Functionen erster und zweiter Art zusammengesetzt ist. Substituiren wir darin die eben angeführten Werthe von $\sin^2 \varphi$ und $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, so bekommen wir die identische Gleichung:

$$G = \frac{1+c_1}{2} \int_0^{\varphi_1} \left\{ \left[\left(A + \frac{B}{2}\right) + \frac{B}{2} c^1 \sin^2 \varphi_1 \right] \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} - \frac{B}{2} \cos \varphi_1 \, d\varphi_1 \right\};$$

oder wenn $A_1 = A_1 + \frac{B}{2}$ und $\frac{B}{2} c_1 = B_1$ gesetzt wird:

$$G = \frac{1+c_1}{2} \cdot \left\{ \int_0^{\varphi_1} (A_1 + B_1 \sin^2 \varphi_1) \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} - \frac{B}{2} \sin \varphi_1 \right\}$$

Das auf der rechten Seite befindliche Integral hat die nämliche Form wie das Integral G, weshalb es durch G_1 dargestellt werden mag. Dadurch erhält die vorige Gleichung folgende Form:

$$G = \frac{1+c^1}{2} (G_1 - \tfrac{1}{2} B \sin \varphi_1);$$

d. h. die Function G ist auf eine andere Function G_1 zurückgeführt worden, welche einen kleineren Modulus und eine größere Amplitude besitzt. Indem man eine derartige Bezeichnung wiederholt in Anwendung bringt, hat man folgende Gleichungen:

$$G_1 = \frac{1+c_2}{2} (G_2 - \tfrac{1}{2} B_1 \sin \varphi_2),$$

$$G_2 = \frac{1+c_3}{2} (G_3 - \tfrac{1}{2} B_2 \sin \varphi_3),$$

u. s. w., in denen die Größen A_1, A_2, ... B_1, B_2 ... durch die Relationen

$$A_1 = A + \tfrac{1}{2} B; \; B_1 = \tfrac{1}{2} B c_1;$$
$$A_2 = A_1 + \tfrac{1}{2} B_1; \; B_2 = \tfrac{1}{2} B_1 c_2$$

u. s. w. unter einander in Verbindung stehen. Denken wir uns nun diese Gleichungen für G, G_1, G_2 ... bis G_n fortgesetzt, ferner die zweite derselben mit $\frac{1+c_1}{2}$, die dritte $\frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2}$ u. s. w. multiplicirt und dann sämmtliche dergestalt erhaltenen Resultate addirt; so ergibt sich:

$$G = \frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2} \cdot \frac{1+c_3}{2} \cdots \frac{1+c_n}{2} G_n$$

$$- \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{1+c_1}{2} B \sin \varphi_1 + \frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2} B_1 \sin \varphi_2 + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2} \cdots \frac{1+c_n}{2} B_{n-1} \sin \varphi_n \right\}.$$

Dabei ist, wie man sehr bald findet:

$$B_n = \frac{c_1\, c_2 \cdots c_{(n)}}{2^n} B;$$

$$A_n = A + \tfrac{1}{2} B \left(1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1\, c_2}{4} + \cdots \frac{c_1 \cdots c_{(n-1)}}{2^{n-1}}\right);$$

und

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} (A_n + B_n \sin^2 \varphi_n) \frac{d\varphi_n}{\Delta \varphi_n}.$$

Ist die Reihe so weit fortgesetzt worden, daß c_n für Null genommen werden darf, in welchem Falle dann B_n um so eher zum Verschwinden kommt; so wird

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} A_n\, d\varphi_n = A_n\, \varphi_n;$$

und

$$G = (1+c_1)(1+c_2)(1+c_3) \cdots \frac{A_n\, \varphi_n}{2^n}$$

$$- \frac{B}{2} \left\{ \frac{1+c_1}{2} \sin \varphi_1 + \frac{(1+c_1)(1+c_2)}{4} \cdot \frac{c_1}{2} \sin \varphi_2 \right.$$

$$\left. + \frac{(1+c_1)(1+c_2)(1+c_3)}{8} \cdot \frac{c_1\, c_2}{4} \sin \varphi_3 \cdots \right\};$$

oder

$$G = \frac{\sqrt{c_n}}{c \sqrt{c_1\, c_2 \cdots c_{n-1}}} A_n\, \varphi_n$$

$$- \frac{B}{c} \left\{ \frac{\sqrt{c_1}}{2} \sin \varphi_1 + \frac{\sqrt{c_1 c_2}}{4} \sin \varphi_2 + \frac{\sqrt{c_1 c_2 c_3}}{8} \sin \varphi_3 + \text{rc.} \right\},$$

wenn man erwägt, daß

$$\frac{2\sqrt{c_1}}{c} = 1 + c_1;\ \frac{2\sqrt{c_2}}{c_1} = 1 + c_2 \text{ u. s. w.}$$

Für den Fall, daß $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, hat man nach dem Gesetz der Duplication der Amplituden:

$\varphi_{,} = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$; $\varphi_{,,} = 2\,\varphi_{,} = 2^2 \cdot \frac{\pi}{2}$; $\varphi_{,,,} = 2 \cdot \varphi_{,,} = 2^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdots\cdots$ und

$\varphi_n = 2^n \cdot \frac{\pi}{2}$: folglich der Werth der vollständigen Function

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{c_n}}{c\sqrt{c_1 c_2 \cdots c_{n-1}}} \cdot A_n \cdot 2^{n-1}\,\pi.$$

Die für den Werth der Function G aufgefundene Reihe convergirt sehr stark, wenn $c^2 < \frac{1}{2}$ ist, indem dann schon drei Glieder hinreichend sind, den Werth der Function bis auf sieben Decimalstellen genau zu erhalten. Dieselbe Formel läßt sich mit Vortheil gebrauchen, wenn $c^2 > \frac{1}{2}$ ist; nur muß man dann eine größere Anzahl von Gliedern berechnen, um den Betrag von G bis auf den nämlichen Grad von Genauigkeit zu erhalten. Wenn man jedoch mit einer geringeren Anzahl von Transformationen dahin zu gelangen wünscht, kann man folgenden von Legendre vorgezeichneten Weg einschlagen.

Aus der Relation

$$G = \frac{1 + c_1}{2}\left(G_1 - \tfrac{1}{2} B \sin \varphi_1\right)$$

folgt nämlich umgekehrt die Gleichung:

$$G' = \frac{2}{1 + c_1}\, G + \tfrac{1}{2} B \sin \varphi_1\,;$$

welche sich in ähnlicher Weise auf die beiden Functionen G und G′ anwenden läßt, so daß

$$G = \frac{2}{1 + c}\, G' + \tfrac{1}{2} B' \sin \varphi\,;$$

wo man

$$G' = \int (A' + B' \sin^2 \varphi')\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}\,;$$

$$A' = A - \tfrac{1}{2} B' \text{ und } B' = \frac{2\,B}{c}$$

zu setzen hat. Indem man dieses Verfahren mehrmals nach einander anwendet, erhält man eine Reihe von Functionen mit steigenden Modulis und abnehmenden Amplituden, welche durch folgende Relationen unter einander verbunden sind:

$$G' = \frac{2}{1 + c'}\, G'' + \tfrac{1}{2} B'' \sin \varphi''\,;$$

$$G'' = \frac{2}{1 + c''}\, G''' + \tfrac{1}{2} B''' \sin \varphi'', \text{ u. s. w.}$$

Auf diese Weise fortgegangen, wird man zu einer Function $G^{(n)}$ gelangen, in welcher mit hinreichender Genauigkeit $c^{(n)}=1$ gesetzt werden darf; der Werth dieser Function ist dann:

$$G^{(n)} = \int_0^{\varphi^{(n)}} (A^{(n)} + B^{(n)} \sin^2 \varphi^{(n)}) \frac{d\varphi^{(n)}}{\cos \varphi^{(n)}},$$

oder

$$G^{(n)} = (A^{(n)} + B^{(n)}) \, l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} \varphi^{(n)}\right) - B^{(n)} \sin \varphi^{(n)}.$$

Macht man die erforderlichen Substitutionen, um den Werth von G mittelst $G^{(n)}$ auszudrücken, so bekommt man, wenn berücksichtigt wird, daß

$$\frac{2}{1+c} = \frac{c'}{\sqrt{c}}; \quad \frac{2}{1+c'} = \frac{c''}{\sqrt{c'}}$$

u. s. w. folgende allgemeine Formel:

$$G = \sqrt{\frac{c' c'' \cdots c^{(n-1)}}{c}} (A^{(n)} + B^{(n)}) \, l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} \varphi^{(n)}\right)$$

$$-\frac{B}{c}\left\{\frac{2^n c^{(n)} \sin \varphi^{(n)}}{\sqrt{c c' \ldots c^{(n-2)}}} - \sin \varphi - \frac{2}{\sqrt{c}} \sin \varphi' - \frac{4}{\sqrt{c c'}} \sin \varphi'' \cdots \right.$$

$$\left. - \frac{2^{n-1} \sin \varphi^{(n-1)}}{\sqrt{c c' \ldots c^{(n-2)}}}\right\},$$

wo

$$A^{(n)} + B^{(n)} = A + \frac{2^n B}{c c' c'' \ldots c^{(n-1)}} - \left(\frac{B}{c} + \frac{2B}{c c'} + \ldots \frac{2^{(n-1)} B}{c c' \ldots c^{(n-1)}}\right),$$

wie sich sehr bald aus den Relationen

$$A = A' + \tfrac{1}{2} B'; \; A' = A'' + \tfrac{1}{2} B'' \ldots;$$

und

$$B = \tfrac{1}{2} B' c; \; B' = \tfrac{1}{2} B'' c' \ldots$$

ergibt.

Wollen wir das oben Gefundene zur numerischen Berechnung des elliptischen Integrals zweiter Art benutzen, so brauchen wir blos $A = 1$, $B = - c^2$ zu setzen. Wir erhalten auf diese Weise folgende Ausdrücke:

$$E(c,\varphi) = \frac{\sqrt{c_n}}{c\sqrt{c_1 \, c_2 \cdots c_{n-1}}}\left(1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 c_1}{4} - \frac{c^2 c_1 c_2}{8} \ldots - \frac{c^2 c_1 \ldots c_{n-1}}{2^n}\right)\varphi_n$$

$$+ \tfrac{1}{2} c\sqrt{c_1} \sin \varphi_1 + \tfrac{1}{4} c \sqrt{c_1 \, c_2} \sin \varphi_2 + \tfrac{1}{8} c \sqrt{c_1 \, c_2 \, c_3} \sin \varphi_3 \cdots$$

$$E(c) = \frac{\sqrt{c_n}}{c\sqrt{c_1 c_2 \cdots c^{n-1}}}\left(1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 c_1}{4} \cdots - \frac{c^2 c_1 \cdots c_{n-1}}{2^n}\right) 2^{n-1} \pi.$$

$$E(c,\varphi)=\sqrt{\frac{c'c''\cdots c^{(n-1)}}{c}}\left(1-\frac{2^{n-1}c}{c'c''\cdots c^{(n-1)}}\right.$$

$$\left.+\;c\left(1+\frac{2}{c'}+\cdots\frac{2^{n-2}}{c'\ldots c^{(n-2)}}\right)\right)\cdot \mathrm{l\,tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi^{(n)}\right)$$

$$-\;c\left\{\frac{2^n c^{(n)}\sin\varphi^{(n)}}{\sqrt{c_{\ldots}c^{(n-1)}}}-\varphi\sin-\frac{2}{\sqrt{c}}\sin\varphi'\cdots-\frac{2^{n-1}\sin\varphi^{(n-1)}}{\sqrt{c\ldots c^{(n-2)}}}\right\}$$

§. 149. **Specielle Werthe von E (c, φ).** Für den abnehmenden Modul sei folgendes Beispiel:

$$c=\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sin 75^0,\ \mathrm{tg}\,\varphi=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\,.$$

$$\begin{array}{llll}
\log c & =0{,}9849438-1; & \varphi & =\ 47^0\ 3'\ 30'',9\\
\log c_1 & =0{,}7699610-1; & \varphi_1 & =\ 62\ 36\ \ 3{,}1\\
\log c_2 & =0{,}0253880-1; & \varphi_2 & =119\ 55\ 47{,}7\\
\log c_3 & =0{,}4511672-3; & \varphi_3 & =240\ \ 0\ \ 0{,}2\\
\log c_4 & =0{,}3002761-6; & \varphi_4 & =480\ \ 0\ \ 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
1= & 1 & & \\
-\frac{c^2}{2}= & -0{,}4665064; & \frac{c\sqrt{c_1}}{2}\sin\varphi_1= & 0{,}3290186\\
-\frac{c^2c_1}{4}= & -0{,}1373371; & \frac{c\sqrt{c_1c_2}}{4}\sin\varphi_2= & 0{,}0522872\\
-\frac{c^2c_1c_2}{8}= & -0{,}0072803; & \frac{c\sqrt{c_1\cdots c_3}}{8}\sin\varphi_3= & -0{,}0013888\\
-\frac{c^2c_1c_2c_3}{16}= & -0{,}0000102, & \frac{c\sqrt{c_1\cdots c_4}}{16}\sin\varphi_4= & 0{,}0000010\\
\hline
1-\frac{c^2}{2}-\cdots= & 0{,}3888658; & \frac{c\sqrt{c_1}}{2}\sin\varphi_1+\cdots= & 0{,}3799180
\end{array}$$

$$\log \mathrm{arc}\,480^0 = 0{,}9231186$$

$$\log\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c_4}{c_1c_2c_3}}=0{,}0419361-1 \qquad \frac{\varphi_n\sqrt{c_n}}{\sqrt{c_1\cdots}}\ 0{,}9226877$$

$$\log F(c,\varphi) = 0{,}9650547-1;$$

Also ist $E(c,\varphi)=0{,}7387196$.

Die Angaben des vorigen Beispiels zum Theil benutzend, wollen wir noch für denselben Modul $c=\sin 75^0$ die vollständige Function E (sin 75⁰) berechnen:

$$\log \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c}{c_1 c_2 c_3}} = 0{,}0410361 - 1$$

$$\log\left(1 - \frac{c^2}{2} - \cdots\right) = 0{,}5897998 - 1$$

$$\log 2^3 \pi = 1{,}4002399$$

$$\log E\,(c) = 0{,}0319758$$

$$E\,(\sin 75^0) = 1{,}0764051$$

Legendre hat ebenfalls eine Tafel der Werthe der Function E aufgestellt; in derselben wächst φ von Grad zu Grad und ist wieder $c = \sin \vartheta$ gesetzt werden, so daß ϑ abermals der Winkel des Modul heißt, welcher daselbst gleichfalls um einen Grad zunimmt. Ein kleiner Auszug aus dieser Tabelle ist nachstehender:

Werthe von ϑ.

Werthe von φ	10°	20°	30°	40°
10°	0,1745064	0,1744298	0,1743125	0,1741684
20	0,3488571	0,3482549	0,3473286	0,3461863
30	0 5229151	0,5209377	0,5178819	0 5140886
40	0,6965778	0,6920695	0,6850602	0,6762823
50	0,8697900	0,8614206	0,8483166	0,8317319
60	1,0425505	1,0289722	1,0075556	0,9801343
70	1,2149127	1,1949254	1,1631769	1,1220541
80	1,3869789	1,3596823	1,3160584	1,2589668
90	1,5588872	1,5237992	1,4674622	1,3931402

Werthe von ϑ.

Werthe von φ	50°	60°	70°	80°
10°	0,1740147	0,1738701	0,1737521	0,1736750
20	0,3449630	0,3438063	0,3428580	0,3422365
30	0,5099950	0,5060921	0,5028680	0,5007423
40	0,6667051	0,6574625	0,6497367	0,6445935
50	0,8133835	0,7953801	0,7800656	0,7697130
60	0,9492983	0,9183933	0,8914364	0,8727552
70	1,0749980	1,0266369	0,9929758	0,9514385
80	1,1925526	1,1224859	1,0564822	1,0054329
90	1,3055391	1,2110560	1,1183777	1,0401144

§. 150. **Elliptische Functionen der dritten Art.** Das elliptische Integral dritter Gattung hat in folgender Gleichung

$$\Pi\,(c, a, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

seine Definition. Um in Bezug auf diese Function einen analogen Satz wie solche in Beziehung auf die elliptischen Functionen der ersten und zweiten anfgefunden worden sind, aufzustellen, nehmen wir wieder zwei veränderliche Amplituden, welche den im §. 140 im Betracht gezogenen Relationen

$$\cos\mu = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\varphi \cdot \varDelta\,\mu,$$

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\varDelta\,\psi + \sin\psi \cdot \cos\varphi\,\varDelta\,\varphi}{1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \frac{d\psi}{\varDelta\psi} = 0$$

Genüge thun. Wir erhalten so

$$d \cdot \Pi(\varphi) + d \cdot \Pi(\psi) = \frac{a\,d\varphi}{\varDelta\varphi}\left\{\frac{\sin^2\psi - \sin^2\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)\,(1+a\sin^2\psi)}\right\}.$$

Im §. 146 haben wir nun gefunden

$$\sin\mu\,d \cdot \sin\varphi\sin\psi = (\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi};$$

folglich

$$d \cdot \Pi\,(\varphi) + d \cdot \Pi\,(\psi) = a\sin\mu\,\frac{d \cdot \sin\varphi\sin\psi}{(1+a\sin^2\varphi)\,(1+a\sin^2\psi)}.$$

Wird nun $\sin^2\varphi + \sin^2\psi = p$ und $\sin\varphi\sin\psi = q$ gesetzt, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$d \cdot \Pi\,(\varphi) + d \cdot \Pi\,(\psi) = \frac{a\sin\mu \cdot dq}{1+ap+a^2q^2}.$$

Aus der Gleichung $\cos\mu = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\varDelta\,\mu$ entspringt aber $p = \sin^2\mu - 2\,q\cos\mu\,\varDelta\,\mu + c^2\,q^2\sin^2\mu$, welcher Werth in die vorstehende Gleichung eingeführt wird:

$$d \cdot \Pi(\varphi) + d \cdot \Pi\,(\psi) = \frac{a\sin\mu \cdot dq}{1+a\sin^2\mu - 2aq\cos\mu\varDelta\mu + q^2(a^2+c^2a\sin^2\mu)}.$$

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) = \int \frac{a\sin\mu \cdot dq}{1+a\sin^2\mu - 2aq\cos\mu\,\varDelta\,\mu + q^2(a^2+c^2a\sin^2\mu)} + C.$$

Um das letztere Integral zu finden, bemerken wir, daß die Function

$$\frac{hq}{k+gq} = \operatorname{tang} u,$$

worin q und u veränderlich sind, bei der Differentation liefert:

$$du = \frac{h\,k\,dq}{k^2 + 2kgq + (h^2 + g^2)q^2}.$$

Bestimmt man nun die drei Constanten h, k,g in der Weise, daß die Nenner der Brüche, welche die Werthe von du und des in Frage stehenden Differentials bilden, identisch werden; so hat man

$k^2 = 1 + a\sin^2\mu$; $kg = -a\cos\mu \cdot \Delta\mu$; $h^2 + g^2 = a^2 + ac^2\sin^2\mu$;

woraus

$$k = \sqrt{1 + a\sin^2\mu};\quad g = \frac{-a\cos\mu\,\Delta\mu}{\sqrt{1 + a\sin^2\mu}};$$

$$h = \frac{\sin\mu \cdot \sqrt{a(c^2 + a^2 + ac^2 + a)}}{\sqrt{1 + a\sin^2\mu}} = \frac{\sqrt{\alpha} \cdot a\sin\mu}{\sqrt{1 + a\sin^2\mu}},$$

wenn der Abkürzung halber

$$\alpha = (1 + a)\left(1 + \frac{c^2}{a}\right)$$

gesetzt wird. Es ist also

$$\int \frac{a\sin\mu\,dq}{1 + a\sin^2\mu - 2aq\cos\mu\,\Delta\mu + q^2\,(a^2 + c^2 a\sin^2\mu)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{h\,k\,dq}{k^2 + 2kgq + (g^2 + h^2)q^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{hq}{k + gq}\right) + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left\{\text{tang} = \frac{a\sqrt{\alpha}\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}{1 + a\sin^2\mu - a\cos\mu\,\Delta\mu\sin\varphi\sin\psi}\right\} + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left\{\text{tang} = \frac{a\sqrt{\alpha}\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}{1 + a - a\cos\mu\cos\varphi\cos\psi}\right\} + \text{const.}$$

Für $\psi = 0$ hat man aber $\varphi = \mu$ und $\Pi(\psi) = 0$; folglich ist

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) - \Pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left\{\text{tang} = \frac{a\sqrt{\alpha}\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}{1 + a - a\cos\psi\cos\varphi\cos\psi}\right\}.$$

Es ist dies die allgemeine Formel für die Functionen der dritten Art, welche der Formel $F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$ für die Functionen der ersten Art und der Formel

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = c^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi$$

für die Functionen zweiter Art entspricht.

Die in Frage stehende Differenz, welche für die elliptischen Functionen der ersten Art Null ist, und für die der zweiten Art einen algebraischen Ausdruck hat, wird mithin für die Functionen der dritten Art durch einen Kreisbogen oder Logarithmus ausgedrückt, weil das

zweite Glied der obigen Gleichung einen Kreisbogen oder einen Logarithmus darstellt, jenachdem α positiv oder negativ ist.

Für $\mu = \frac{\pi}{2}$ erhält man nacheinander für die drei Gattungen der elliptischen Functionen:

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(c) = 0;$$
$$E(\varphi) + E(\psi) - E(c) = c^2 \sin\varphi \sin\psi;$$
$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) - \Pi(c) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{a\sqrt{\alpha}\sin\varphi\sin\psi}{1+a}\right);$$

wo zwischen φ und ψ die Relation

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

besteht. Ist überdies $\varphi = \psi$; so gehen die letzteren Formeln in folgende über:

$$F(\varphi) = \tfrac{1}{2} F(c);$$
$$E(\varphi) = \tfrac{1}{2} E(c) + \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-c^2});$$
$$\Pi(\varphi) = \tfrac{1}{2}\Pi(c) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{a\sqrt{\alpha}}{(1+a)(1+\sqrt{1-c^2})}\right).$$

Macht man $\psi = \varphi$ und bestimmt man $\mu = \varphi_2$ mittelst der Gleichung

$$\sin\varphi_2 = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-c^2\sin^4\varphi};$$

so erhält man für die Verdoppelung der Functionen nachstehende Ausdrücke:

$$2F(\varphi) - F(\varphi_2) = 0;$$
$$2E(\varphi) - E(\varphi_2) = c^2\sin^2\varphi\sin\varphi_2;$$
$$2\Pi(\varphi) - \Pi(\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{a\sqrt{\alpha}\sin^2\varphi\sin\varphi_2}{1+a-a\cos^2\varphi\cos\varphi_2}\right).$$

Diese Formeln können auch zur Halbirung der Functionen benützt werden, wenn man φ mittelst φ_2 bestimmt.

§. 151. **Jacobi's Reductionsformel.** Die elliptischen Functionen der dritten Gattung sind Functionen von drei Variabeln; eine Aufstellung von Tabellen derselben wäre also fast unmöglich. Jacobi hat zuerst die Reduction dieser Integrale auf Functionen zweier Variabeln gezeigt, indem er mehrere neue Transscendenten eingeführt hat, deren eine wir jetzt betrachten wollen. Sie kann in dem Integrale

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

wenn n die Form $-c^2 \sin^2 \lambda$ hat, zu der fraglichen Reduction benutzt werden. Es ist nemlich für

$$\Pi(-c^2 \sin^2 \lambda, c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-c^2 \sin^2 \lambda \sin^2 \varphi)\Delta\varphi};$$

identisch

$$\Pi = F(c,\varphi) + \frac{tg\,\lambda}{2\Delta\lambda}\int_0^\varphi \frac{2\sin\varphi\cos\lambda\Delta\lambda}{1-c^2\sin^2\lambda\sin^2\varphi} \cdot \frac{c^2\sin\lambda\sin\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi.$$

Setzt man nun

$$F(c,\varphi) + F(c,\lambda) = F(c,\sigma)$$
$$F(c,\varphi) - F(c,\lambda) = F(c,\delta),$$

mithin

$$E(c,\varphi) + E(c,\lambda = E(c,\sigma) + c^2 \sin\lambda \sin\varphi \sin\sigma$$
$$E(c,\varphi) - E(c,\lambda) = E(c,\delta) - c^2 \sin\lambda \sin\varphi \sin\delta,$$

woraus

$$2E(c,\lambda - E(c,\sigma) + E(c,\delta) = c^2 \sin\lambda \sin\varphi (\sin\sigma + \sin\delta),$$

so ist bekanntlich

$$\frac{2\sin\varphi\cos\lambda\Delta\lambda}{1-c^2\sin^2\lambda\sin^2\varphi} = \sin\sigma + \sin\delta,$$

also

$$\Pi = F(c,\varphi), + \frac{tg\,\lambda}{\Delta\lambda} E(c,\lambda)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{tg\,\lambda}{2\Delta\lambda}\int_0^\varphi \frac{E(c,\sigma)-E(c,\delta)}{\Delta\varphi}\, d\varphi.$$

Aus der Differentiation der obigen Fundamentalformeln folgt aber, da λ constant, φ, σ, δ variabel sind:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\sigma}{\Delta\sigma},\ \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\delta}{\Delta\delta},$$

also ist jetzt

$$\Pi = \left[1 + \frac{tg\,\lambda}{\Delta\lambda} E(c,\lambda)\right] F(c,\varphi) - \frac{tg\,\lambda}{2\Delta\lambda}\left[\int_\lambda^\sigma \frac{E(c,\sigma)}{\Delta(c,\sigma)}\, d\sigma \right.$$
$$\left. - \int_\lambda^\delta \frac{E(c,\delta)}{\Delta(c,\delta)}\, d\delta\right]$$

Setzt man nun, um die fragliche Jacobi'sche Transcendente einzuführen,

$$Y(c,\sigma) = \int_0^\sigma \frac{E(c,x)}{\Delta(c,x)}\, dx,$$

mithin

$$\int_\lambda^\sigma \frac{E(c,\sigma)}{\Delta(c,\sigma)}\, d\sigma = Y(c,\sigma) - Y(c,\lambda),$$

so wird

$$\Pi(-c^2 \sin^2 \lambda, c, \varphi) =$$
$$\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\Delta\lambda} E(c, \lambda)\right] F(c, \varphi) - \frac{\operatorname{tg}\lambda}{2\Delta\lambda}\left[Y(c, \sigma) - Y(c, \delta)\right],$$

wo rechts alles auf Functionen zweier Variabeln reducirt ist.

§. 152. **Reduction von Integralen auf elliptische Integrale.** Auf die elliptischen Integrale können die bestimmten Integrale vieler anderer zusammengesetzter Functionen zurückgeführt werden. Wir wollen nur die einfacheren Fälle hier in Kürze behandeln, für die weitere Ausführung dieses interessanten Gegenstandes auf die oben erwähnten Werke von Legendre, Jacobi und Abel verweisend.

Wir machen mit dem Integrale

$$U_{2n} = \int_0^x \frac{x^{2n}\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

den Anfang. Um dasselbe zu bestimmen, setzen wir $\sin\varphi = x$; es entsteht dadurch:

$$U_{2n} = \int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Differentiiren wir aber den Ausdruck:

$$\sin^{2n-3}\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi,$$

so haben wir die identische Gleichung:

$$d(\sin^{2n-3}\varphi \cos\varphi\, \Delta) = (2n-3)\frac{\sin^{2n-4}\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi -$$
$$-(2n-1)(1+c^2)\frac{\sin^{2n-2}\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi + (2n-1)\frac{c^2 \sin^{2n}\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi,$$

wie sich sehr leicht nach einigen Reductionen ergibt. Indem wir auf beiden Seiten integriren, erhalten wir mit Rücksicht auf die gewählte Bezeichnung folgende Formel:

$$(2n-1)c^2 U_{2n} = \sin^{2n-3}\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi$$
$$+ (2n-2)(1+c^2)U_{2n-2} - (2n-3)U_{2n-4},$$

mittelst welcher U_{2n} auf U_{2n-2} und U_{2n-4} zurückgeführt wird.

Setzen wir der Reihe nach 2, 3, 3 ··· statt n, so wird successive $U_4, U_6, U_8 \cdots$ durch U_0 und U_2 ausgedrückt. Es ist aber

$$U_0 = F(c, \varphi)$$

ferner

$$U_2 = \frac{1}{c^2}\int_0^\varphi \left\{\frac{1}{\Delta\varphi} - \Delta\varphi\right\} d\varphi = \frac{F(c,\varphi) - E(c,\varphi)}{c^2}.$$

Mithin läßt sich U_{2n} stets durch $F(c, \varphi)$ und $E(c, \varphi)$ ausdrücken.

Daraus folgt unmittelbar, daß ein Integral von der Form:

$$\int_0^{\varphi} \frac{A + B \sin^2 \varphi + C \sin^4 \varphi \cdots + M \sin^{2m} \varphi}{\Delta\varphi} d\varphi$$

sich auf die elliptischen Integrale der ersten und zweiten Art zurückführen läßt.

§. 153. **Fortsetzung.** Wir gehen zu dem Integral

$$V_m = \int_0^x \frac{dx}{(1+hx^2)^m \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

über, das, wenn $x = \sin\varphi$ gesetzt wird, sich in

$$V_m = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)^m \, \Delta\varphi}$$

umwandelt. Wir haben nur den Fall, wo m eine ganze positive Zahl ist, zu betrachten, in dem das Integral für eine negative Zahl von m auf das vorhin behandelte Integral zurückkommt.

Bezeichnen wir das Radical für einen Augenblick mit R, so entsteht durch Differentiation des Ausdruckes:

$$\frac{xR}{(1+hx^2)^{m-1}}$$

ein Resultat von der Form:

$$\frac{\alpha x^6 + \beta x^4 + \gamma x^2 + \delta}{(1+hx^2)^m} \cdot \frac{dx}{R},$$

wo α, β, γ und δ von m, h x c abhängen. Setzt man $1+hx^2 = z$, so erhält der Factor von $\frac{dx}{R}$ die Form:

$$\frac{\alpha_1 z^3 + \beta_1 z^2 + \gamma_1 z + \delta_1}{z^m}$$

$$= \frac{\alpha_1}{z^{m-3}} + \frac{\beta_1}{z^{m-2}} + \frac{\gamma_1}{z^{m-1}} + \frac{\delta^1}{z^m}.$$

Indem man den Werth von z wieder substituirt, ergibt sich folgendes Resultat:

$$d\left(\frac{xR}{(1+hx^2)^{m-1}}\right) = \frac{\alpha_1 \, dx}{(1+hx^2)^{m-3}R} + \frac{\beta_1 \, dx}{(1+hx^2)^{m-2}} + \frac{\gamma_1 \, dx}{(1+hx^2)^{m-1}R}$$

$$+ \delta_1 \frac{dx}{(1+hx^2)^m R}.$$

Durch Integration entspringt hieraus, wenn $\sin\varphi$ statt x gesetzt wird:

$$\frac{\sin\varphi \cos\varphi \, \Delta\varphi}{(1+h^2\sin^2\varphi)^{m-1}} = \alpha_1 V_{m-3} + \beta_1 V_{m-2} + \gamma_1 V_{m-1} + \delta_1 V_m.$$

Die Werthe von α_1 β_1 γ_1 und δ_1 ergeben sich aus nachstehenden Relationen:

$$\alpha' = -(2m-5)\frac{c^2}{h^2};\ \beta_1 = (2m-4)\left(\frac{1+c^2}{h} + \frac{3c^2}{h^2}\right);$$

$$\gamma_1 = -(2m-3)\left(1+2\frac{1+c^2}{h}+3\frac{c^2}{h^2}\right);$$

$$\delta_1 = (2m-2)\left(1+\frac{1+c^2}{h}+\frac{c^2}{h^2}\right).$$

Die obenstehende Formel lehrt uns zunächst V_2, dann V_3, V_4.... durch V_{-1}, V_0 und V_1 ausdrücken, von denen das erste Integral auf die elliptischen Integrale erster und zweiter Art, das zweite auf ein elliptisches Integral der ersten Gattung und das letzte auf ein elliptisches Integral dritter Art zurückkommt.

Für die speciellen Fälle

$$h = -1 \text{ und } h = -c^2$$

gestaltet sich die obenangenannte Reductionsformel einfacher und dient zur Entwickelung der Integrale:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^{2m}\Delta\varphi} \text{ und } \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\{\Delta\varphi\}^{2m+1}},$$

welche beide nur von elliptischen Integralen erster und zweiter Art abhängig sind.

§. 154. **Schluß.** Wir betrachten zuletzt das Integral

$$\int \frac{P\,dx}{R},$$

wo P eine beliebige rationale Function von x und R eine Wurzelgröße von der Form

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}$$

darstellt, und α, β, γ, δ ε reelle Zahlen bedeuten mögen. — Um dasselbe auf elliptische Integrale zurückzuführen, zerlege man zuerst, was immer möglich ist, den Ausdruck $\alpha+\beta x+\ldots$ in zwei reelle trinomische Factoren $f=(1+2mx+nx^2)$, $f_1=(p+2qx+rx^2)$, welche, da obige Wurzelgröße reell gedacht ist, beide positiv sind. Man kann nun vor allen Dingen die obige Differentialfunction durch Einführung einer neuen Variabeln so transformiren, daß unter dem Wurzelzeichen nur noch gerade Potenzen derselben vorkommen. Man setze zu diesem Zwecke $R=\sqrt{ff_1}=fy$, oder $f_1=fy^2$. Hieraus folgt

$$f'_1\,dx = f'y^2\,dx + 2y\,f\,dy, \text{ d. h. } (f'_1 - y^2 f')\,dx = 2yf\,dy,$$

oder

$$\frac{dx}{fy} = \frac{2\,dy}{f'_1 - f'y^2},$$

mithin ist

$$\frac{dx}{R} = \frac{dy}{q + rx - y^2(m + nx)}$$

Aus der Gleichung $f_1 = fy^2$ findet man aber

$$x = \frac{q - my^2 - \sqrt{(q - my^2)^2 - (ny^2 - r)(ly^2 - q)}}{ny^2 - r}.$$

Setzt man diesen Werth von x in die vorige Gleichung ein, indem man zur Abkürzung den Wurzelausdruck in y durch W bezeichnet, so findet man

$$\frac{dx}{R} = \frac{dy}{W},$$

wo W nur gerade Potenzen von y enthält. Substituirt man ferner denselben Werth von x auch in die ursprüngliche rationale Function P von x, so ist das Differential $\frac{P\,dx}{R}$ in ein anderes $\frac{P\,dy}{W}$ transformirt, so daß P und W, welche letztere eine Function vom vierten Grade ist, nur y^2 enthalten. Die gebrochene Function $\frac{P\,dy}{W}$ hat alsdann im Allgemeinen die Form

$$\frac{G + KW}{J + KW} \cdot \frac{dy}{W},$$

wo G, H, J, K ganze rationale Functionen von y^2 vorstellen. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $J - KW$, so zerlegt sich das letztere Differential in zwei andere:

$$\frac{HJ - GK}{J^2 - K^2W^2} \cdot dx + \frac{GJ - HKW^2}{J^2 - XW^2} \cdot \frac{dy}{W},$$

deren ersteres, weil W^2 rational ist, als rationale Function integrirt werden kann; das andere ist von der Form

$$\frac{L}{M} \cdot \frac{dy}{W},$$

wo L und M ganze rationale Functionen von y^2 sind.

Wir bemerken nun, daß $\frac{dy}{W}$ ein Ausdruck von der Form

$$\frac{dy}{\sqrt{g + hy^2 + iy^4}}$$

stets auf die Form

$$K \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

gebracht werden kann, wo K eine Constante und $c^2 < 1$. Dieß zu zeigen unterscheiden wir folgende Fälle:

1) Die Factoren von $g+hy^2+iy^4$ sind imaginär; das Trinom ist alsdann von der Form $\lambda^2+2\lambda\mu y^2\cos\vartheta+\mu^2y^4$. Setzt man

$$y=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \text{ und macht } \sin\frac{\vartheta}{2}=c,$$

so findet man

$$\frac{dy}{W}=\frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Da nun

$$y^2=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}, \text{ so wird } \frac{L}{M}\;\frac{dy}{W} \text{ von der Form}$$

$$\frac{G+H\cos\varphi}{J+K\cos\varphi}\;\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{HJ-GK}{J^2-K^2\cos^2\varphi}\;\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta}+\frac{GJ-HK\cos^2\varphi}{J^2-K^2\cos^2\varphi}\;\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

wo G, H, J K Functionen von $\cos^2\varphi$ mithin auch von $\sin^2\varphi$ sind. Das erste der beiden letzteren Differentiale ist nun genau integrirbar, das andere aber von der Form $Q\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, wo Q eine Function von $\sin^2\varphi$,

2) Sei $g+hy^2+iy^4=m^2(1+p^2g^2)(1-q^2g^2)$; da wegen der Realität der Wurzelgröße $y<\frac{1}{q}$ sein muß, setze man

$$y=\frac{1}{q}\cos\varphi,\quad \frac{p^2}{p^2+q^2}=c^2, \text{ wodurch } \frac{dy}{W}=\frac{-c}{pm}\;\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi}}$$

wird. Durch die weitere Transformation wie in Nr. 1 erhält man wieder ein Endresultat von der Form $Q\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$.

3) Sei $g+hy^2+iy^4=m^2(1+p^2y^2)(y^2-q^2)$. Da $y>q$ sein muß, setze man

$$y=\frac{q}{\cos\varphi},\quad \frac{1}{1+p^2q^2}=c^2; \text{ man erhält } \frac{dy}{W}=\frac{c}{m}\;\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

4) Wenn $g+hy^2+iy^4=m^2(1+p^2y^2)(1+q^2y^2)$, wo z. B. $p>q$, und man setzt

$$y=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{p},\quad \frac{p^2-q^2}{p^2}=c^2, \text{ so hat man } \frac{dy}{W}=\frac{1}{mp}\;\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

5) Sei $g+hy^2+iy^4=m^2(1-p^2y^2)(y^2-q^2)$, wo z. B. $p>q$. Der Wurzelausdruck ist hier reell von $y=0$ bis $y=\frac{1}{p}$, imaginär von $y=\frac{1}{p}$ bis $y=\frac{1}{q}$ und reell wieder von $y=\frac{1}{q}$ bis

$y = \infty$. Für das erste reelle Intervall setze man

$$y = \frac{\sin\varphi}{p},\ \frac{q}{p} = c, \text{ wodurch } \frac{dy}{W} = \frac{1}{mp}\,\frac{d\varphi}{\Delta}$$

wird. Liegt dagegen y zwischen $\frac{1}{q}$ und ∞, so mache man

$$y = \frac{1}{q\sin\varphi},\ \frac{q}{p} = c, \text{ wodurch } \frac{dy}{W} = \frac{-1}{mp}\,\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

6) Endlich sei $g + hy^2 + iy^4 = m^2(y^2 - q^2)(p^2 - y^2)$; alsdann muß y zwischen p und q liegen, wo wieder $p > q$. Man setze $y^2 = p^2 - (p^2 - q^2)\sin^2\varphi$, $c^2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2}$; dann wird $\frac{dy}{W} = \frac{-d\varphi}{\Delta\varphi}$.

In allen diesen Fällen wird auch die rationale mit $\frac{dy}{W}$ multiplicirte Function eine rationale Function von $\sin^2\varphi$.

Das ursprüngliche Differential ist also jetzt auf die Form $\frac{L}{M}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ gebracht, wo M und L ganze rationale Functionen von $\sin^2\varphi$ sind. Man dividire nun zuvörderst mit M in L, so lange, bis der Rest N von niederem Grade als M ist; hierdurch erhält man

$$(A + B\sin^2\varphi + C\sin^4\varphi + \cdots)\,\frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{N}{M}\,\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Das erste dieser beiden Differentiale ist schon im §. 152 behandelt und reducirt sich auf elliptische Integrale der ersten und zweiten Art. — Was das andere Differential $\frac{N}{M}\,\frac{d\varphi}{\Delta}$ betrifft, so muß man zuerst die Function $\frac{N}{M}$ in rationale Partialbrüche zerlegen, so daß $\frac{N}{M} =$

$$\frac{a}{\sin^2\varphi} + \frac{b}{\sin^4\varphi} + \frac{c}{\sin^6\varphi} + \cdots$$

$$+ \frac{a_1}{1 + h_1\sin^2\varphi} + \frac{b_1}{(1 + h_1\sin^2\varphi)^2} + \frac{c_1}{(1 + h^1\sin^2\varphi)^3} + \cdots$$

$$+ \frac{a_2}{1 + h_2\sin^2\varphi} + \frac{b_2}{(1 + h_2\sin^2\varphi)^5} + \frac{c_2}{(1 + h_2\sin^2\varphi)^3} + \cdots + \text{ꝛc.}$$

Die allgemeine hieraus entspringende Formel

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^{2m}\varphi\,\Delta}$$

wird man leicht, wie im §. 152, wenn man dort n negativ macht, und die Integrationsgrenze 0 meidet, auf elliptische Integrale der beiden ersten Gattungen reduciren. — Die übrigen Partialbrüche liefern Integrale von der Form

$$\int \frac{1}{(1+h\sin^2\varphi)^m} \frac{d\varphi}{\Delta},$$

welche, nach §. 153 behandelt, elliptische Integrale aller drei Arten liefern.

Bemerkenswerth ist noch, daß die Formel

$$\int \frac{1}{1+h\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$$

stets so transformirt werden kann, daß die Größe h, welche der Parameter der Integrale dritter Gattung genannt wird, zwischen 0 und -1 fällt. Um dieß zu zeigen, bilden wir die Formel $\frac{dp}{1+\alpha p^2}$, wo α eine eine Constante ist und $p = \frac{tg\,\varphi}{\Delta}$ sein soll. Man findet

$$\frac{dp}{1+\alpha p^2} = \frac{1-c^2\sin^4\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi+\alpha\sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Suchen wir hier den Nenner in das Product der beiden Factoren

$$(1+n\sin^2\varphi)\left(1+\frac{c^2}{n}\sin^2\varphi\right)$$

zu zerlegen, so finden wir

$$\alpha=(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right),$$

und alsdann zerlegt sich obige Gleichung in

$$\frac{dp}{1+\alpha p^2} = \left[\frac{1}{1+n\sin^2\varphi}+\frac{1}{1+\frac{c^2}{n}\sin^2\varphi}-1\right]\frac{d\varphi}{\Delta},$$

woraus folgt

$$\Pi(n)+\Pi\left(\frac{c^2}{n}\right) = F + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc}\left(tg = \frac{tg\,\varphi\sqrt{\alpha}}{\Delta}\right).$$

Durch diese Formel kann man nun, wenn $n > c$ sein sollte, die Function Π (n) auf $\Pi\left(\frac{c^2}{n}\right)$ reduciren, so daß der neue Parameter $\frac{c^2}{n} < c$, also zwischen 1 und c^2 liegt. Eine zweite Reductionsformel erhält man durch die Bildung der Formel $\frac{dp}{1+kp^2}$, wo $p = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}$ und k constant sei. Man findet

$$\frac{dp}{1+kp^2} = \frac{1-2\sin^2\varphi+c^2\sin^4\varphi}{1+(k-c^2)\sin^2\varphi-k\sin^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Man mache nun wieder den Nenner $= (1+n\sin^2\varphi)(1+m\sin^2\varphi)$, woraus $k=-mn$, $(1+n)(1+m)=1-c^2$, und man erhält

$$\frac{dp}{1+kp^2}=\frac{d\varphi}{\varDelta}\left[\frac{1+n}{n}\,\frac{1}{1+n\sin^2\varphi}+\frac{1+m}{m}\,\frac{1}{1+m\sin^2\varphi}+\frac{c^2}{mn}\right],$$

mithin $$\frac{1+n}{n}\,\varPi(n)+\frac{1+m}{m}\,\varPi(m)=$$

$$\frac{-c^2}{mn}F+\frac{1}{\sqrt{-mn}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{-mn}}{\varDelta}\right).$$

Bedient man sich der zweiten eben entwickelten Reductionsformel, so kann man also mittelst derselben den Parameter $m=-\frac{n+c^2}{n+1}$, so schaffen, daß $m<0$, wenn $n>0$. Man unterscheide nun noch folgende Fälle:

1) n ist positiv, also von der Form $\cot^2\vartheta$.

2) n ist zwischen 0 und $-c^2$, also von der Form $-c^2\sin^2\vartheta$.

3) n liegt zwischen $-c^2$ und -1, d. h. $n=-1+(1-c^2)\sin^2\vartheta$.

4) n liegt zwischen -1 und $-\infty$, d. h. $n=-\frac{1}{\sin^2\vartheta}$.

Setzt man die erste dieser 4 Formen, $n+\cot^2\vartheta$ in die zweite Reductionsformel ein, so erhält man $m=-1+(1-c^2)\sin^2\vartheta$, so daß der erste und dritte Fall auf einander reducirbar sind. — Setzt man ferner die vierte Form $n=\frac{1}{\sin^2\vartheta}$ in die erste Reductionsformel, so wird der neue Parameter $=-c^2\sin\vartheta$, also ist der vierte Fall mit dem zweiten identisch. Es bleiben also nur zwei wesentlich verschiedene Formen des Parameters übrig, $n=-c^2\sin^2\vartheta$ und $n=-1+b^2\sin^2\vartheta$, welche irreductibel untereinander sind.

Bemerken wir noch, daß α für $n=-1+b^2\sin\vartheta$ in der Gleichung $(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)=\alpha$ positiv wird; alsdann enthält die erste Reductionsformel einen Kreisbogen. Für $n=-c^2\sin^2\vartheta$ wird aber α negativ und der imaginäre Kreisbogen verwandelt sich in einen Logarithmen. Deßhalb nennt man auch diejenigen elliptischen Integrale dritter Gattung, bei denen der Typus des Parameters $-1+b^2\sin^2\vartheta$ ist, circulare Integrale dritter, und diejenigen, deren Parameter den Typus $-c^2\sin^2\vartheta$ hat, logarithmische Integrale dritter Gattung. Diese beiden Unterabtheilungen der Integrale dritter Gattung sind nicht weiter auf einander reducirbar.

Drittes Kapitel.

Anwendungen auf die Geometrie in der Ebene.

I. Berührung ebener Curven.

1. Von den Tangenten und Normalen.

§. 155. **Berührungsgerade.** In dem gegenwärtigen Kapitel wollen wir die bereits erworbenen Kenntnisse in der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der in einer Ebene liegenden Curven oder der sogenannten Curven von einfacher Krümmung anwenden, dabei voraussetzend, daß dem Leser die analytische Geometrie der Ebene als eine für sich bestehende Doctrin bekannt ist, deren nähere Erörterung man in eigens darüber handelnden Werken zu suchen hat. — Die Differentialrechnung vermöge ihres Grundprincips löst unmittelbar die Aufgabe: an Curven, deren Gleichung gegeben ist, Berührungsgeraden oder Tangenten zu ziehen. Auch gab in der That die gesuchte Auflösung dieses Problems die erste Veranlassung zur Erfindung der Differentialrechnung, weshalb es denn kam, daß dieselbe anfangs die Methode der Tangenten genannt wurde.

Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve, wo x als Abscisse gilt, die auf einer gegebenen Achse von einem festen Anfangspuncte aus gezählt wird und y die zugehörige rechtwinkelige Ordinate ist. Um nun durch den Punct M (Fig. 1) an diese Curve eine Tangente zu legen, denken wir uns durch denselben eine beliebige Secante M M′ gezogen. Bezeichnen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ die Coordinaten des zweiten Punktes M′ der Curve, und stellen X, Y die laufenden Coordinaten der Secante dar, auf dieselben Achsen und denselben Anfangspunct, wie die Coordinaten x, y der Curve bezogen; so ist die Gleichung der Secante M M′:

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x),$$

so daß

$$\text{tang } M' M Q = \frac{M' Q}{M Q} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Lassen wir nun Δx sich fortwährend der Null nähern, so wird die Secante M M' sich immer genauer und genauer an die Tangente anschließen, mit welcher sie zusammenfallen wird, wenn wir zu dem Grenzverhältniß

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

übergehen. Hiernach ist

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

die gesuchte Gleichung der durch den Punkt (x, y) an die gegebene Curve gezogenen Berührungsgeraden. In einem System rechtwinkliger Coordinaten wird also die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Berührungsgerade mit der Abscissenachse bildet, durch die Derivirte

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

ausgedrückt. Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve, so stellt sich für jeden Punkt derselben die Gleichung der Tangente auch unter folgender Form dar:

$$(Y - y)\frac{dF}{dy} + (X - x)\frac{dF}{dx} = 0.$$

Um die Gleichung der Tangente zu erhalten, ist es also hinreichend in der Differentialgleichung der Curve statt der Differentiale dx, dy die Differenzen $X - x$, $Y - y$ zu setzen.

Daß die durch die Gleichung

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

charakterisirte Gerade unter allen durch den Berührungspunkt gezogenen geraden Linien in der Nähe desselben sich am engsten an die gegebene Curve anschließt, ergibt sich durch folgende einfache Betrachtung. Man denke sich durch den Berührungspunct noch eine andere von der Tangente verschiedene gerade Linie gezogen, deren Gleichung

$$Y - y = K(X - x)$$

sein mag.

Die der Abscisse $x + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der Curve, der Tangente und gedachter geraden Linie seien respective

$$y + \Delta y,\ y + \Delta Y_{,},\ y + \Delta Y_{,,}.$$

Für den Unterschied der Ordinaten der der Abscisse $x + \Delta x$ entsprechenden Punkte der Curven und Tangente einerseits, der Curve und jener Geraden andererseits ergeben sich nachstehende Ausdrücke:

$$\Delta y - \Delta Y_{,} = \tfrac{1}{2} f''(x + \vartheta\, \Delta x) \Delta x^2;$$

$$\Delta y - \Delta Y_{,,} = (f'(x) - k) \Delta x + \tfrac{1}{2} f''(x + \vartheta\, \Delta x) \Delta x^2.$$

Läßt man nun Δx der Null fortwährend näher rücken, so ist der absolute Werth von

$$\tfrac{1}{2} f''(x + \vartheta\, \Delta x) \Delta x$$

offenbar kleiner als der absolute Werth von

$$f'(x) - k + \tfrac{1}{2} f''(x + \vartheta\, \Delta x) \Delta x;$$

mithin der absolute Werth von $\Delta y - \Delta Y$ kleiner, als der absolute Werth von $\Delta y - \Delta Y_{,,}$; woraus unmittelbar hervorgeht, daß durch den Punkt (x, y) keine gerade Linie gezogen werden kann, welche in der Nähe dieses Punktes sich genauer an die Curve anschlösse, als die durch die Gleichung

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

charakterirsirte Linie, welche sich somit als die Berührungsgerade der Curven für den ins Auge gefaßten Punkt (x, y) herausstellt.

Schließen die Coordinatenachsen den Winkel ψ ein, so findet man sehr leicht, wenn τ den Winkel bezeichnet, welchen die durch den Punkt (x, y) der gegebenen Curve gezogene Berührungsgerade mit der Richtung der positiven Abscissen macht, daß in diesem Falle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \tau}{\sin(\psi - \tau)} = \frac{\tan \tau}{\sin \psi - \cos \psi \tan \tau}$$

ist. Daraus entspringt

$$\tan \tau = \frac{y' \sin \psi}{1 + y' \cos \psi}.$$

§. 156. **Normale.** Die Gleichung der Normalen einer Curve, d. h. der geraden Linie, welche im Punkte (x, y) auf der Tangente senkrecht steht, ist:

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x)$$

oder

$$X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0.$$

Ist die Gleichung der Curve unter der Form:

$$F(x, y) = 0$$

gegeben, so wird die Gleichung der Normalen:

$$(Y - y) \frac{dF}{dx} - (X - x) \frac{dF}{dy} = 0.$$

Man kann also aus der Differentialgleichung der Curve ebenfalls sofort die Gleichung der Normalen herleiten, wenn man für die derivirte $\frac{dy}{dx}$ das Verhältniß $-\frac{X - x}{Y - y}$ substituirt.

Die Gleichung der Tangente, wie jene der Normale würde sich nicht ändern, wenn die Gleichung der Curve von der Form

$$F(x, y) = c$$

wäre, wo c einen constanten Parameter bezeichnet. Die durch die Gleichungen

$$(Y - y) \frac{dF}{dy} + (X - x) \frac{dF}{dx} = 0$$

und

$$(Y - y) \frac{dF}{dx} - (X - x) \frac{dF}{dy} = 0$$

dargestellten Linien können demnach als die geometrischen Orte der Punkte angesehen werden, worin die von dem Punkte (X, Y) ausgehenden geraden Linien die durch die Veränderung des Parameters c erzeugten Curven berühren oder rechtwinklig durchschneiden.

Bezeichnen τ und φ die Winkel, welche die Tangente einer Curve mit den positiven Seiten der Coordinatenachsen bildet, so hat man unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems:

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}; \cos\varphi = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Bezeichnen ebenso λ und μ die beiden Winkel, welche die Normale der Curve mit den positiven Seiten der Achsen einschließt; so erhält man

$$\cos\lambda = -\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}; \cos\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die hier aufgestellten Werthe müssen so mit einander verbunden werden, daß sie der Relation

$$\cos\tau \cos\lambda + \cos\varphi \cos\mu = 0$$

genügen, welche ausdrückt, daß Normale und Tangente auf einander senkrecht stehen.

Ist die Gleichung unter der Form

$$F(x, y) = 0$$

gegeben; so hat man:

$$\cos\tau = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2}};\ \cos\varphi = \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2}};$$

$$\cos\lambda = \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2}};\ \cos\mu = \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}.$$

§. 157. **Die unter den Namen Subtangente, Tangente, Subnormale, Normale verstandenen Längen.** Die Entfernung des Fußpunktes der Ordinate von dem Punkte, in welchem die Tangente die Abscissenachse schneidet, heißt die Subtangente. Macht man in der Gleichung der Tangente $Y = 0$, so erhält man (Fig. 1): Subtangente $PS = x - X = \frac{y}{y'}$.

Die Entfernung des Fußpunktes der Ordinate von dem Durchschnittspunkte der Normale wird die Subnormale genannt. Setzt man in der Gleichung der Normale $Y = 0$, so hat man: Subnormale $PN = X - x = y'y$.

Die Ordinate ist also mittlere Proportionale zwischen Subtangente und Subnormale.

Unter Tangente versteht man zuweilen das zwischen dem Berührungspunkt und der Abscissenachse liegende Stück der Tangente. Diese Länge MS wird ausgedrückt durch:

$$y\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}}.$$

Desgleichen versteht man unter Normale das zwischen der Curve und der Achse der Abscissen liegende Stück der Normale. Diese Länge MN wird ausgedrückt durch

$$y\sqrt{1+y'^2}.$$

Für jede gegebene Curve müssen in den vorstehenden allgemeinen Formeln die aus der Gleichung der Curve entnommenen Werthe von y und y' substituirt werden.

§. 158. Anwendung der obigen Formeln auf einige Beispiele.

1) Für die Parabel, deren Gleichung ist: $y^2 = 2px$, findet man:

Subnormale $= p$;   Subtangente $= 2x$;

Normale $= p^{\frac{1}{2}}(p+2x)^{\frac{1}{2}}$;   Tangente $= 2x^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Die Subnormale der Parabel ist also eine constante Größe und die Subtangente der doppelten Abscisse gleich, wonach sich leichte Constructionen für die Tangente und Normale zu dieser Curve ergeben.

2) Die Gleichung der Ellipse in Bezug auf ihre Achsen, deren halbe Längen a und b sind, ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Man erhält daraus:

Subtangente $= \frac{x^2 - a^2}{x}$;   Subnormale $= -\frac{b^2 x}{a^2}$;

Tangente $= \frac{y}{b^2 x}(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{1}{2}}$;   Normale $= \frac{1}{a^2}(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Die Subtangente ist mithin unabhängig von der kleinen Achse 2b, hat also für den Kreis, welcher über 2a als Durchmesser construirt werden kann, den nämlichen Werth; eine Eigenschaft, welche ein einfaches Verfahren an die Hand gibt, durch einen gegebenen Punkt auf der Ellipse eine Tangente an dieselbe zu legen. — Die Subnormale hat zu ihrer Abscisse für alle Punkte der nämlichen Ellipse stets einerlei Verhältniß.

3) Die eben gefundenen Gleichungen gelten für die Hyperbel, wenn man darin b^2 mit $-b^2$ vertauscht. Für die gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung in Beziehung auf ihre Asymptoten

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

ist, findet man:

Subtangente $= -x$;   Subnormale $= -\frac{y^2}{x}$.

Die Subtangente ist gleich der Abscisse, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen, muß also von dem Anfangspunkt der Coordinaten aus auf die entgegengesetzte Seite aufgetragen werden.

4) Die unter dem Namen Cissoide bekannte Linie entsteht folgendermaßen. Ueber der Geraden $AB = 2a$ als Durchmesser (Fig. 2) ist ein Kreis beschrieben und im Punkte B eine Senkrechte darauf errichtet. Zieht man nun von A aus eine beliebige Gerade AD, welche

den Kreis in F und die Senkrechte in D schneidet, und nimmt dann MD = AF; so gehört der Punkt M der Cissoide an. Die Gleichung derselben ist:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x},$$

wo AP = x und ME = y.

Durch die Differentiation entspringt:

$$yy' = \frac{(3a - x)\, x^2}{(2a - x)^2}$$

dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, so kommt

$$\frac{y}{y'} = \text{Subtangente} = \frac{2ax - x^2}{3a - x}.$$

Hieraus ergibt sich folgende Construction für die Tangente. Man nehme BE = a, ziehe EQ und darauf eine Senkrechte, welche die Abscissenachse in S schneidet; dieser Durchschnittspunkt mit dem Punkte M der Curve vereinigt, gibt die gesuchte Tangente.

5) Die Gleichung der logarithmischen Linie (Fig. 3) in rechtwinkligen Coordinaten ist:

$$y = m\, e^{\frac{x}{m}}.$$

Bei dieser Linie bilden die Ordinaten eine geometrische Reihe, wenn die Abscissen in arithmetischer Reihe fortschreiten. Die Subtangente ist gleich m, hat also einen constanten Werth; eine bemerkenswerthe Eigenschaft der logarithmischen Linie, welche die wahre geometrische Definition derselben enthält.

6) Ist

$$Y = m\, e^{\frac{x}{m}}$$

die Gleichung der logarithmischen Linie CBD (Fig. 4) und

$$Y_{,} = m\, e^{-\frac{x}{m}}$$

die der logarihmischen Linie C′BD′ und nimmt man

$$PM = \tfrac{1}{2}(Y + Y_{,}) = \tfrac{1}{2}(NP + N'P);$$

so gehört der Punkt M der Kettenlinie an. Folglich ist, wenn MP = y gesetzt wird, die Gleichung der letzteren:

$$y = \tfrac{1}{2} m \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Für die Gleichung der Tangente haben wir:

$$2(Y-y)=\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)(X-x).$$

Ferner die Subtangente

$$=m\,\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}.$$

7) Unter Cycloide versteht man bekanntlich diejenige Curve, welche ein beliebiger Punkt M eines Kreises DMG (Fig. 5) beschreibt, der auf einer geraden Linie Ax dergestalt fortrollt, daß die Länge eines beliebigen Bogens MD dem Stücke AD gleich ist. Bezeichnet man mit a den Halbmesser des rollenden Kreises, mit t den veränderlichen Winkel MCD; so hat man, indem A der Anfangspunkt ist, die Abscisse AP = x und die rechtwinklige Ordinate MP = y gesetzt wird:

$$x=a(t-\sin t) \text{ und } y=a(1-\cos t)$$

durch Differentiation dieser beiden Ausdrücke ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

Ueberdies erhält man

$$\text{Subtangente}=y\sqrt{\frac{y}{2a-y}};\qquad \text{Tangente}=y\sqrt{\frac{2a}{2a-y}};$$

$$\text{Subnormale}=\sqrt{2ay-y^2};\qquad \text{Normale}=\sqrt{2ay}.$$

Aus der letzteren Relation folgt, daß MG die Lage der Tangente für den Punkt M bezeichnet.

8) Rollt der Kreis dessen Halbmesser a auf der convexen Seite eines festen Kreises dessen Mittelpunkt 0 und Halbmesser AO = b hin (Fig. 6), so beschreibt der in's Auge gefaßte Punkt M die sogenannte Epicycloide AMA'. Ist 0 der Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten, 0A die Abscissenachse; wird ferner der Winkel AOC = t und der Winkel MCD = φ gesetzt; so hat man

$$OP = x = (a+b)\cos t - a\cos(t+\varphi);$$

und

$$PM = y = (a+b)\sin t - a\sin(t+\varphi);$$

oder wegen $a\varphi = bt$:

$$x=(a+b)\cos t - a\cos\left(\frac{a+b}{a}\,t\right);$$

und

$$y=(a+b)\sin t - a\sin\left(\frac{a+b}{a}\,t\right).$$

Durch Differentiiren dieser beiden Gleichungen ergibt sich für die Lage der Tangente:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang}\left(t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Nun schließt aber die von C aus auf die Sehne MD gezogene Senkrechte mit der Achse AO den Winkel $t + \frac{\varphi}{2}$ ein; die durch den Punkt gehende fragliche Tangente muß daher zu jener Senkrechten parallel laufen, mithin MD die Lage der Normale und MG die der Tangente angeben.

§. 159. Gemeinschaftliche Tangenten zweier Curven.

1) Die Gleichungen zweier Curven sind

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad f(x, y) = 0;$$

die Gleichung der Geraden anzugeben, welche diese beiden Curven berührt. Bezeichnen wir die noch unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes der gemeinsamen Tangente mit der ersten Curve durch x, y, und mit der zweiten durch x_1, y_1: so wird sich die Gleichung der fraglichen Tangente sowohl unter der Form:

$$\frac{dF}{dy}(Y-y) + \frac{dF}{dx}(X-x) = 0$$

als unter der Form:

$$\frac{df}{dy_1}(Y-y_1) + \frac{df}{dx_1}(X-x_1) = 0$$

darstellen. Aus der Identificirung der beiden letzteren Gleichungen ergeben sich folgende zwei:

$$\frac{dF}{dx}\cdot\frac{df}{dy_1} = \frac{df}{dx_1}\cdot\frac{dF}{dy};$$

$$(y - y_1)\left(\frac{dF}{dy}\cdot\frac{df}{dy_1}\right) = x_1\left(\frac{df}{dx_1}\cdot\frac{dF}{dy}\right) - x\left(\frac{dF}{dx}\cdot\frac{df}{dy_1}\right),$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen der beiden Curven hinreichend sind, um die vier Größen x, y, x_1 und y_1 zu bestimmen. Wenn dergestalt x und y oder x_1 und y_1 gefunden sind, ergibt sich die gesuchte Gleichung der gemeinschaftlichen Tangente durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung der einen oder der andern Curve.

Als Beispiel diene das System der beiden Gleichungen

$$y^2 - px = 0 \text{ und } ky^2 + x^3 = 0,$$

von denen die erstere die Apollonische und die zweite die Neil'sche Parabel darstellt. Die Gleichungen der Tangente sind:

$$Y = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}} X + \frac{\sqrt{px}}{2}$$

und

$$Y = -\frac{3\sqrt{-x_1}}{2\sqrt{k}} X - \frac{\sqrt{-x^3}}{2\sqrt{k}};$$

Die Identität derselben gibt:

$$\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{-x_1}}{2\sqrt{k}}$$

und

$$\frac{\sqrt{px}}{2} = -\frac{\sqrt{-x^3}}{2\sqrt{k}};$$

daraus folgt,

$$x = \pm\frac{\sqrt{pk}}{3\sqrt{3}} \text{ und } x_1 = \mp\frac{\sqrt{pk}}{\sqrt{3}},$$

von welchen Werthen nur die mit dem oberen Vorzeichen versehenen zulässig sind.

Nach ausgeführter Substitution erhalten wir für die Gleichung der Tangente:

$$Y = \pm\sqrt[4]{\frac{27}{16}\,\frac{p}{k}}\left\{X + \sqrt{\frac{pk}{27}}\right\},$$

so daß zwei gemeinschaftliche Tangenten vorhanden sind, wenn p und k einerlei Zeichen haben.

Wir wollen noch kurz die Aufgabe berühren, an zwei Zweige einer und derselben Curve eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen. Diese Aufgabe würde man wie die vorige behandeln können, indem man die Functionen F und f als identisch annähme. Eine leichtere Rechnung ergibt sich jedoch auf folgende Weise. Soll eine Gerade, deren Gleichung $Y = kX + l$, die Curve $f(x, y) = 0$ berühren, so muß

$y = kx + l$ und $\frac{df}{dx} + k \frac{df}{dy} = 0$ sein. Die letztere Gleichung ist aber die Derivirte der Gleichung der Curve $f(x, kx + l) = 0$. Soll aber diese Gleichung gleichzeitig mit $f = 0$ bestehen, so müssen die Gleichungen $f(x, kx + l) = 0$, und $\frac{df(x, kx + l)}{dx} = 0$ einen gemeinsamen Factor haben. Ist derselbe vom ersten Grade, $= x - \alpha$, so ist $x = \alpha$ die Abscisse des Berührungspunktes der Geraden $y = kx + l$. Ist derselbe aber vom zweiten Grade, so erhält man für dieselbe Grade zwei Berührungspuncte, d. h. eine gemeinsame Tangente an zwei Zweige derselben Curve. Hieraus fließt die Regel, daß man, um eine derartige Tangente zu finden, einen gemeinschaftlichen Factor zwischen den Gleichungen

$$f(x, kx + l) = 0, \quad \frac{df(x, kx + l)}{dx} = 0$$

herstellen müsse. Dieß bewirkt man, indem man, das gewöhnliche Verfahren zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers einhaltend, bei einem Divisor vom zweiten Grade $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$ anhält und in dem Rest $mx + n$ die Coefficienten m und n einzeln Null setzt, wodurch man zwei Gleichungen zur Bestimmung von k und l erhält. $x = \alpha$ und $x = \beta$ sind alsdann die Abscissen der Berührungspuncte.

Man habe z. B. die Curve des vierten Grades $y + x^2(x^2 - 1) = 0$. Für $y = kx + l$ ist $x^4 - x^2 + kx + l = 0$, und die Derivirte $4x^3 - 2x + k = 0$. Sucht man zwischen beiden Polynomen den gemeinschaftlichen Factor, so stößt man zuletzt auf einen Divisor $2x^2 - 3kx - 4l$ und einen Rest $(9k^2 + 8l - 2)x + k(12l + 1)$. Hieraus leitet man die Gleichungen $9k^2 + 8l - 2 = 0$, $k(12l + 1) = 0$ ab, denen folgende drei Systeme von Auflösungen entsprechen:

$$k = 0, \qquad k = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad k = -\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$
$$l = \tfrac{1}{4} \qquad l = -\tfrac{1}{12} \qquad l = -\tfrac{1}{12}$$

Setzt man diese Werthe von k und l in den trinomischen Divisor $2x^2 - 3kx - 4l = 0$ ein, so erhält man für die Abscissen der Berührungspuncte folgende drei Systeme:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \sqrt{\tfrac{1}{6}}; \qquad -\sqrt{\tfrac{1}{6}}.$$

$$x_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}; \qquad \sqrt{\tfrac{1}{6}}; \qquad -\sqrt{\tfrac{1}{6}}.$$

Da sich bei dem zweiten und dritten System von Auflösungen einerlei Abscisse für beide Berührungspuncte herausstellen, so können in diesen Fällen keine eigentlichen Doppeltangenten stattfinden, also bleibt nur die erste Auflösung übrig, welche eine Doppeltangente $y = \frac{1}{4}$ liefert, die die Curve in den Puncten $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ berührt.

2. Von den Asymptoten.

§. 160. **Erste Regel zur Aufsuchung der Asymptoten.** Wenn eine Curve Zweige besitzt, welche sich in's Unendliche erstrecken; so kann es sich ereignen, daß diese Zweige sich gewissen geraden Linien unausgesetzt nähern, ohne sie jemals zu erreichen. Solche gerade Linien heißen Asymptoten der Curven. Dergleichen Asymptoten dienen dazu uns eine deutlichere Vorstellung von dem in größerer Entfernung liegenden Theile der Curven zu geben: denn nothwendigerweise muß die letztere fortwährend ihre convexe Seite gegen die Asymtote hinwenden, wenigstens von dem Punkte an, in welchem eine derartige Tendenz in ihrem Laufe sich kund gibt.

Wir können die Asymtoten gleichsam als Tangenten ansehen, für welche die Berührung in unendlicher Entfernung statthat. Diese Auffassung gibt ein sehr einfaches Mittel an die Hand, um zu entscheiden, ob eine vorgelegte Curve Asymptoten habe oder nicht. Man braucht nämlich blos zu untersuchen, ob die auf die fragliche Curve bezüglichen Ausdrücke

$$(AC)\ m = x - y\frac{dx}{dy} \quad \text{und} \quad (AB)\ l = y - \frac{xdy}{dx}$$

(Fig. 1), welche die Entfernungen der Durchschnittspunkte der Tangente mit den Coordinatenachsen vom Anfangspunkt darstellen, für ein unendlich großes x oder y angebbare Grenzen zulassen. Findet das Letztere statt, so geben die dergestalt gefundenen Grenzen zwei Punkte C und B an, welche man nur durch eine Gerade zu verbinden hat, um die verlangte Asymptote zu erhalten. Wenn die eine der Größen m und l unendlich groß wird, die andere dagegen endlich bleibt; so ist die Asymptote zu derjenigen Achse parallel, auf welcher sich der unendliche Werth befindet. — Fallen beide Ausdrücke zugleich unendlich groß aus, so hat die vorgelegte Curve keine Asymptote. — Verschwinden beide Ausdrücke, was wegen $l = -m\frac{dy}{dx}$ für den

einen wie für den andern gleichzeitig eintrifft; so geht die Asymptote durch den Anfangspunkt der Coordinaten: in diesem Falle muß man, um die Richtung der Asymptote zu erhalten, die Grenze des Ausdruckes $k = \frac{dy}{dx}$ suchen, welcher die Tangente des Winkels angibt, den die Berührungsgerade der Curve mit der Abscissenachse macht.

Wenden wir das Gesagte auf die Cissoide an, deren Gleichung $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ bereits oben aufgestellt worden ist. Man findet

$$l = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{-ax^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2a - x}},$$

$$m = x - y\frac{dx}{dy} = \frac{ax}{3a - x}.$$

Unendlich große Werthe von x sind nun, weil sonst y imaginär ausfiele, nicht möglich, sondern nur y darf $= \infty$, also $x = 2a$ gesetzt werden. Hieraus folgt $m = 2a$, $l = \infty$, was auf eine in der Entfernung $x = 2a$ zur Ordinatenachse parallele Asymptote hinweist.

Betrachten wir noch (Fig. 7) die Curve, deren Gleichung

$$y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0.$$

Sucht man hieraus die Derivirte der impliciten Function y, so ergibt sich

$$l = \frac{4(y^4 - 2x^2y^2 - x^4) + 6axy^2 - 15ax^3}{4y^3 - 4x^2y + 4axy};$$

$$m = -\frac{4(y^4 - 2x^2y^2 - x^4) + 6axy^2 - 15ax^3}{4xy^2 + 4x^3 - 2ay^2 + 15ax^2}.$$

Da nun $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 = 5ax^3 - 2axy^2$, so sind diese Werthe

$$l = \frac{5ax^3 - 2axy^2}{4y^3 - 4x^2y + 4axy},$$

$$m = \frac{2axy^2 - 5ax^3}{4xy^2 + 4x^3 - 2ay^2 + 15ax^2}.$$

Aus $y^2 = x(x - a) \pm x\sqrt{(a + x)(a + 2x)}$ ergibt sich nun, daß x und y nur gleichzeitig unendlich sein können. Für unendliche Coor-

dinaten werden aber l und m gleich $\frac{\infty}{\infty}$. Man bewirke also erst die Formen

$$l = \frac{5a - 2a\left(\frac{y}{x}\right)^2}{4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{4a}{x}\left(\frac{y}{x}\right)};$$

$$m = \frac{2a\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5a}{4 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2a}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{15a}{x}}.$$

Für $x = \infty$ verschwinden aber in den Nennern die Größen

$$\frac{4a}{x}, \frac{2a}{x}, \frac{15a}{x},$$

so daß

$$l = \frac{5a - 2a \lim\left(\frac{y}{x}\right)^2}{4 \lim\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 4 \lim\left(\frac{y}{x}\right)},$$

$$m = \frac{2a \lim\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5a}{4 + 4 \lim\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Um den Grenzwerth $\lim\left(\frac{y}{x}\right)$ zu finden, bringe man die Gleichung der Curve auf die Form

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right)^4 - 2\lim\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = \lim\left[\frac{5a}{x} - \frac{2a}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = 0,$$

woraus $\lim\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \sqrt{2}$ folgt. Man findet also endlich

$$m = \frac{-10 + 7\sqrt{2}}{8}a,\ l = \pm a\frac{-10 + 7\sqrt{2}}{8}\sqrt{1 + \sqrt{2}},$$

also sind zwei Asymptoten, welche sich in der Entfernung $x = -0{,}01257 \cdot a$ auf der Abscissenachse treffen.

§. 161. **Zweite Regel zur Bestimmung der Asymptoten.** Die vorstehende Regel ist nicht gut anwendbar, wenn die Gleichung sich nicht in Bezug auf $\frac{y}{x}$ auflösen läßt. In solchem Falle nimmt man zur folgenden zweiten Regel seine Zuflucht, welche dem Wesen nach mit der ersten auf Eins hinausläuft und von derselben nur der Form nach verschieden ist, hier und dort aber eine bequemere Anwendung gestattet. Die Regel stützt sich auf die einfache Bemerkung, daß, falls eine zur Ordinatenachse nicht parallele Asymptote existirt, deren Gleichung ist

$$y = kx + l,$$

die Ordinate der Curve auf die Form

$$y = kx + l + \varepsilon$$

gebracht werden kann, wo ε bei dem unendlichen Wachsen von x fortwährend gegen die Null hinrückt.

Aus dieser Gleichung ergibt sich so

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \left(k + \frac{l + \varepsilon}{x}\right) = k,$$

ferner

$$\lim (y - kx) = \lim (l + \varepsilon) = l.$$

Um also die Constante k zu bestimmen, ist es hinreichend in der Gleichung der Curve kx statt y zu substituiren und hierauf die Grenze von k für unendliche wachsende x zu suchen. Dieß geht einfach darauf hinaus, falls keine zur Ordinatenachse parallele Asymptote existirt, in der Gleichung einer Curve nter Ordnung nur die homogenen Glieder nter Ordnung beizubehalten und aus ihnen durch Division mit x^m das Verhältniß $\frac{y}{x}$ abzuleiten. Nachdem dergestalt die Constante k ermittelt worden, hat man weiter $y - kx = l$ in der Gleichung der Curve zu setzen und die Grenze von l für unendlich zunehmende x zu bestimmen. Die zusammengehörigen Werthe von k und l geben die Lagen der verschiedenen Asymptoten an. — Auf dieselbe Weise werden die nicht zu der Abscissenachse parallelen, mithin die zu den Ordinatenachsen parallelen Asymptoten aufgefunden, wenn deren vorhanden sind.

Für die logarithmische Linie, deren Gleichung $y = me^{\frac{x}{m}}$ ist, erhält man

$$k = \lim \frac{y}{x} = \lim \frac{me^{\frac{x}{m}}}{x} = 0;$$

ferner $l = \lim y = \lim m e^{\frac{x}{m}} = 0$, wenn x gegen $-\infty$ convergirt. Die Achse der x nach der negativen Seite hin ist folglich eine Asymptote der Curve.

Für die Curve, welche das Descartes'sche Blatt genannt wurde und deren Gleichung ist

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0:$$

erhalten wir, wenn darin $y = kx$ gesetzt wird, die Relation:

$$k + 1 = \frac{3ak}{x};$$

woraus für ein unendlich großes x entspricht $k = -1$. Machen wir hierauf in der Gleichung der Curve

$$y + x = l$$

so finden wir die Relation:

$$3\,(l + a)\,x\,\frac{l^3}{x^2} - 3\left(\frac{l^2 + al}{x}\right) = 0;$$

woraus für ein in's Unendliche wachsendes x folgt

$$l = -a.$$

Für die Asymptote der Curve, welche in der Figur 8 gezeichnet ist, haben wir daher die Gleichung $y = -x - a$, wo Winkel $TBX' = 45^0$ und $AB = a$.

Die Betrachtung über die Asymptoten mögen ein Paar Worte über die asymptotischen Curven schließen. In diesem Falle kann unsere zweite Regel ebenfalls zur Anwendung kommen. Um die Begriffe zu fixiren, sei die parabolische Curve gegeben, deren Gleichung von der Form ist:

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Soll diese zu einer Asymptote einer gegebenen Curve werden, so muß die Ordinate derselben von der Form werden:

$$y = Ax^2 + Bx + C + \varepsilon,$$

wo ε wieder eine Größe darstellt, welche für ein unendlich großes x zu Null wird. Aus dieser Gleichung erhalten wir nun:

$$A = \frac{y}{x^2} - \left(\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{\varepsilon}{x^2}\right);$$

$$B = \frac{y - Ax^2}{x} - \left(\frac{C + \varepsilon}{x}\right);$$

$$C = y - Ax^2 - Bx - \varepsilon;$$

so daß

$$A = \lim \frac{y}{x^2};$$

$$B = \lim \frac{y - Ax^2}{x};$$

$$C = \lim (y - Ax^2 - Bx).$$

Hiernach hat man in der Gleichung der gegebenen Curve $y = Ax^2$ zu setzen und den Werth von A zu suchen, der dem $x = \pm \infty$ entspricht; dann in der Gleichung $y = Ax^2 + Bx$ zu machen und den Werth von B zu ermitteln, welcher dem $x = \pm \infty$ zugehört; ferner $y = Ax^2 + Bx + C$ zu setzen und den Werth von C für $x = \pm \infty$ zu bestimmen.

3. Von der Berührung der verschiedenen Ordnungen.

§. 162. **Berührung der n^{ten} Ordnung.** Es seien in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = \varphi(x)$$

die Gleichungen zweier Curven, welche einen gemeinschaftlichen Punkt (x, y) haben, so daß die Gleichung $f(x) = \varphi(x)$ für den individuellen Werth x stattfindet. Bezeichnen nun $y + \Delta y$, $y + \Delta Y$ die der Abscisse $x + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der beiden Curven, so ist

$$\Delta y - \Delta Y = f(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x) = \{f'(x + \vartheta \Delta x) \\ - \varphi'(x + \vartheta_1 \Delta x)\} \Delta x,$$

wo ϑ und ϑ_1 ächte positive Brüche darstellen.

Wenn die Functionen f und φ in dem Intervall von x bis $x + \Delta x$ keine Stetigkeitsunterbrechung erleiden und überdieß Δx zu einer sehr kleinen Größe der ersten Ordnung wird; so ist die Differenz der Ordinaten im Allgemeinen ebenfalls eine sehr kleine Größe von der ersten Ordnung. — Besitzen aber die beiden Curven in dem gemeinschaftlichen Punkte eine gemeinsame Tangente, oder berühren sie einander in jenem Punkte, was die Bedingungsgleichung:

$$f'(x) = \varphi'(x)$$

zur Folge hat; so wird

$$\Delta y - \Delta Y = \{f''(x + \vartheta \Delta x) - \varphi''(x + \vartheta_1 \Delta x)\} \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2},$$

wo ϑ und ϑ_1 wieder zwischen 0 und 1 liegende Zahlen bedeuten,

welche im Allgemeinen von den vorhin angedeuteten verschieden sein werden: die Differenz der Ordinaten ist alsdann eine sehr kleine Größe von der zweiten Ordnung. Wir können also sagen: zwei Linien, welche einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen und die erste Derivirte der Ordinate in diesem Punkte gleich haben, gehen eine Berührung der ersten Ordnung mit einander ein.

Wir nehmen weiter an, daß für die beiden Curven die drei Gleichungen:

$$f(x) = \varphi(x); \; f'(x) = \varphi'(x), \; f''(x) = \varphi''(x)$$

bestehen. Die Differenz zwischen den Ordinaten der beiden Curven, welche der Abscisse $x + \Delta x$ angehören, ist alsdann ausgedrückt durch:

$$\Delta y - \Delta Y = \{f'''(x + \vartheta \Delta x) - \varphi'''(x + \vartheta_1 \Delta x)\} \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

und wird eine sehr kleine Größe von der dritten Ordnung, wenn Δx eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung darstellt. Wir können also wieder sagen, zwei Linien, für welche in einem gemeinsamen Punkte die Derivirten der beiden ersten Ordnungen der Ordinaten einerlei Werth haben, gehen eine Berührung der zweiten Ordnung mit einander ein.

Auf diese Weise fortfahrend können wir sagen, daß zwei Curven eine Berührung von der nten Ordnung mit einander eingehen, wenn für dieselben sowohl die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ als auch deren n ersten Derivirten für einerlei Abscisse den nämlichen Werth erhalten. Für sehr kleine Werthe der ersten Ordnung von Δx wird die Differenz $\Delta y - \Delta Y$ alsdann eine sehr kleine Größe von der $(n + 1)$ten Ordnung sein.

Die hier in's Auge gefaßte Berührung wird dadurch noch näher charakterisirt, daß keine andere Linie $y = \psi(x)$ zwischen jenen beiden Curven hindurch gehen kann, wofern für sie nicht ebenfalls die Bedingung stattfindet, daß ihre n ersten Derivirten für die nämliche Abscisse den n ersten Derivirten der Function $f(x)$ gleich werden. Zwei Curven, welche sich in einem Puncte berühren, werden sich demnach desto inniger an einander anschließen, je größer die Anzahl der Derivirten ist, deren Werthe die nämlichen sind.

§. 163. **Fortsetzung.** Gehen zwei Curven

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = \varphi(x)$$

eine Berührung von der nten Ordnung mit einander ein; so besteht für die Differenz der Ordinaten folgende Relation:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x)$$
$$= \frac{\overline{\Delta x}^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}\left\{f^{(n+1)}(x+\vartheta\Delta x) - \varphi^{(n+1)}(x+\vartheta_1\Delta x)\right\}.$$

Für sehr kleine Werthe von Δx wird das zwe te Glied dieser Gleichung einerlei Vorzeichen wie das Product

$$\overline{\Delta x}^{n+1}\left\{f^{(n+1)}(x) - \varphi^{(n+1)}(x)\right\}$$

erhalten. Der Ausdruck $f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x)$ wird wird also sein Zeichen mit Δx ändern, wenn n eine gerade Zahl ist, dagegen dasselbe Zeichen beibehalten, wenn n eine ungerade Zahl darstellt; oder mit anderen Worten, zwei Linien werden bei ihrer Berührung einander schneiden oder nicht, je nachdem die Berührung von einer geraden oder von einer ungeraden Ordnung ist.

Die Berührungsgerade geht eine Berührung der ersten Ordnung mit der Curve ein; die eine dieser Linien wird demnach nach wie vor dem Berührungspunkt über der anderen liegen. In einzelnen Fällen kann jedoch auch das Gegentheil eintreten; es findet dies statt, wenn für einen speciellen Werth von x die dazu gehörige zweite Devirirte y'' verschwindet und die die dritte Derivirte y''' einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat.

Die Kreislinie kann entweder eine Berührung der ersten oder eine der zweiten Ordnung mit einer Curve eingehen. Im letzteren Falle wird die Kreislinie die osculatorische genannt, um sie von allen schlechtweg berührenden Kreislinien zu unterscheiden; wie denn überhaupt jede Curve den Namen einer osculatorischen führt, wenn sie die Berührung der höchsten Ordnung eingeht, die sie mit einer anderen gegebenen Curve an einem gegebenen Punkte haben kann.

Im Allgemeinen wird die osculatorische Kreislinie die gegebene krumme Linie zu gleicher Zeit berühren und durchschneiden. In besonderen Fällen können auch hier wieder Ausnahmen stattfinden. Wir haben dergleichen Ausnahmsfälle, wenn wir z. B. die osculatorischen Kreislinien an dem Scheitel der Apollonischen Parabel und an den Endpunkten der Achsen der Ellipse nehmen.

§. 164. **Nähere Bestimmung der osculatorischen Linien.** Wenn die Gleichungen zweier Curven

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = \varphi(x)$$

gegeben sind, von denen die erste völlig bestimmt ist, während in der zweiten n willkührliche Constanten vorkommen; so kann man durch Bestimmung der letzteren zwischen beiden Curven in einem gegebenen

Punktr eine Berührung von der (n — 1)ten Ordnung herstellen, indem man zur Lösung dieser Aufgabe stets genau so viel Bedingungsgleichungen erhält, als Constanten zu bestimmen sind, — nämlich

$$f(x) = \varphi(x);\ f'(x) = \varphi'(x) \cdots f^{(n-1)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x).$$

In der allgemeinen Gleichung der geraden Linie

$$y = kx + l$$

kommen zwei willkührliche Constanten vor; dieselbe kann daher im Allgemeinen mit einer Curve in einem gegebenen Punkte nur eine Berührung von der ersten Ordnung haben.

Die allgemeine Gleichung des Kreises

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$$

enthält drei willkührliche Constanten; der Kreis kann deshalb mit einer Curve in einem gegebenen Punkte höchstens eine Berührung der zweiten Ordnung eingehen. Vermittelst dieses Kreises, welcher sich unter allen Kreisen, die sich durch den in Rede stehenden Punkt legen lassen, in der Nähe desselben am innigsteu an die gegebene Curve anschließt, läßt sich die Krümmung der letzteren in der Nähe des fraglichen Punktes beurtheilen. Der Osculationskreis heißt darum auch der **Krümmungskreis**. In dem dritten Abschnitt des vorliegenden Kapitels soll der Krümmungskreis einer näheren Prüfung unterworfen werden.

Die einfachsten Linien, welchen man mit einer gegebenen Curve $y = f(x)$ eine Berührung verschaffen kann, sind die parabolischen Linien, deren Gleichung von der Form:

$$Y = A + Bx + Cx^2 + \cdots Px^{n-2} + Qx^{n-1}$$

ist, wenn sie durch den Punkt (x, y) geht. Damit die parabolische Curve in diesem Punkte mit der gegebenen eine Berührung von der (n — 1)ten Ordnung eingehe, muß noch folgenden Gleichungen Genüge geschehen, nämlich:

$$y' = B + 2Cx \cdots + (n-2)Px^{n-3} + (n-1)Qx^{n-2};$$

$$y'' = 2C + 2 \cdot 3Dx \cdots + (n-1)^{n-2}Qx^{n-3};$$

$$y^{(n-2)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)P + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-2)(n-1)Qx;$$

$$y^{(n-1)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)Q;$$

wo $y', y'', \cdots$ die Werthe darstellen, wie sie sich aus der Gleichung $y = f(x)$ ergeben. Sind X, Y die laufenden Coordinaten der parabolischen Curve, so kann deren Gleichung als das Resultat der Eli-

mination von A, B, C·· zwischen den oben aufgestellten n Gleichungen und der nachstehenden:

$$Y = A + BX + CX^2 \cdots + QX^{n-1}$$

angesehen werden. Entwickelt man nun jedes Glied des zweiten Theils der letzteren Gleichung nach steigenden Potenzen von $X-x$ vermittelst der für jede beliebige ganze Zahl m gültigen Formel:

$$X^m = \left\{x+(X-x)\right\}^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1}(X-x)$$

$$+ m\frac{(m-1)}{1\cdot 2} x^{m-2}(X-x)^2 \cdots + (X-x)^m;$$

so bekommt man:

$$Y = A + Bx + Cx^2 \cdots + Px^{n-2} + Qx^{n-1}$$

$$+ \frac{B + 2Cx + \cdots + (n-2)Px^{n-3} + (n-1)Qx^{n-2}}{1}(X-x) + ..$$

$$+ \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-2)P + 2\cdot 3\cdot 4 \cdots (n-1)Qx}{1\cdot 2 \cdots (n-2)}(X-x)^{n-2}$$

$$+ \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)Q}{1\cdot 2 \cdots (n-1)}(X-x)^{n-1}.$$

Dieses Resultat verwandelt sich mit Berücksichtigung der oben angeführten Formeln in folgendes:

$$Y = y + \frac{y'}{1}(X-x) + \frac{y''}{1\cdot 2}(X-x)^2 \cdots$$

$$+ \frac{y^{(n-2)}}{1\cdot 2 \cdots (n-2)}(X-x)^{n-2} + \frac{y^{(n-1)}}{1\cdot 2 \cdots (n-1)}(X-x)^{n-1},$$

welches die gesuchte Gleichung der parabolischen Curve ist.

4. Gebrauch der Polarcoordinaten.

§. 165. **Allgemeine Differentialausdrücke für die Richtung der Tangente.** Geht man von dem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem Polarcoordinatensystem über, so hat man

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t,$$

wo der Pol mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt, r der nach dem Punkte (x, y) gezogene Radiusvector ist und t den Winkel bezeichnet, welchen dieser Radiusvector mit der positiven Abscissenachse bildet.

Betrachtet man in den vorstehenden Gleichungen t als die unabhängige Veränderliche, so erhält man nach den im §. 26 aufgestellten Formeln:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{dt}\ \text{tang}\ t + r}{\frac{dr}{dt} - r\ \text{tang}\ t};$$

woraus

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}\ \text{tang}\ t}{\frac{dy}{dx} - \text{tang}\ t}.$$

Es ist aber, wenn τ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente im Punkte (x, y) mit der Richtung der positiven Abscissen macht,

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang}\ \tau;$$

folglich

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{1 + \text{tang}\ \tau\ \text{tang}\ t}{\text{tang}\ \tau - \text{tang}\ t} = \cot\ (\tau - t).$$

Es bedeutet also $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dt}$ die trigonometrische Cotangente des Winkels, welchen die Berührungsgerade MT der Curve MB mit dem nach dem Berührungspunkte gehenden Radiusvector einschließt (Fig. 9). Ist demnach die Gleichung der Curve zwischen Polarcoordinaten gegeben, so läßt sich mittelst der obenstehenden Formel jener Winkel berechnen und die Berührungsgerade ziehen.

Auf eine mehr directe Weise läßt sich gedachte Formel folgendermaßen ableiten. Es seien M und M′ zwei unendlich nahe gelegene Punkte der Curve, welche den Polarabscissen t und t + dt entsprechen. Wird der Bogen MQ mit dem Halbmesser AM = r beschrieben, so ist Bogen QM = r dt und QM′ = dr. Bei Betrachtung der Grenzen kann man MM′Q als ein bei Q rechtwinkliges Dreieck und den unendlich kleinen Kreisausschnitt AQM als ein bei M rechtwinkliges Dreieck ansehen, wonach

$$\text{tang}\ \angle QMM' = \cot\ (AMT) = \cot\ (\tau - t) = \frac{dr}{rdt}.$$

Zu demselben Ergebniß wird man auch gelangen, wenn man das über die Berührung der Linien unter einander oben Gesagte als Aus-

gangspunkt wählt. Es ist nämlich die Polargleichung einer Geraden, welche durch den Punkt (x, y) geht und mit der positiven Abscissenachse den Winkel τ einschließt:

$$R \sin (T - \tau) = r \sin (t - \tau) = \text{const.},$$

wo r und t die Polarcoordinaten des Punktes (x, y) und R und T die veränderlichen Coordinaten der Geraden sind. Offenbar ist $R \sin (T-\tau)$ der constante Abstand der in's Auge gefaßten Geraden von den mit ihr durch den Pol gelegten Parallelen. Soll nun die Gerade in eine Tangente der Curve in dem Punkte (r, t) übergehen, so wird der Werth von $\frac{dR}{dT}$, welcher aus der Gleichung der Geraden sich ergibt, mit dem Werthe der Derivirten, wie solcher aus der Gleichung der Curve $r = f(t)$ entspringt, übereinstimmen müssen. Die Differentiation gibt aber

$$dR \sin (T-\tau) + R \cos (T-\tau)\, dT = 0;$$

woraus, weil für den in Rede stehenden Punkt $R = r$ und $T = t$ folgt:

$$\cot (t - \tau) = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Setzen wir in der Gleichung der Geraden

$$R \sin (T - \tau) = r \sin (t - \tau)$$

für τ den Werth, wie solcher sich aus der Relation

$$\cot (\tau - t) = \frac{dr}{rdt} = \frac{r'}{r}$$

ergibt; so bekommen wir die Polargleichung der Berührungsgeraden. Nun ist offenbar

$$T - \tau = T - t + t - \tau,$$

woraus

$$\sin (T - \tau) = \sin (T - t) \cos (t - \tau) + \cos (T - t) \sin (t - \tau).$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes geht die Gleichung in folgende über:

$$\frac{R \cos (T - t) - r}{R \sin (T - t)} = \cot (\tau - t) = \frac{dr}{rdt} = \frac{r'}{r};$$

welche die gesuchte Polargleichung der Tangente ist.

§. 166. **Normale und Polarsubtangente.** Läßt man in der letzten Gleichung τ in $\tau + \frac{\pi}{2}$ übergehen, so erhält man die Gleichung der Normale, nämlich:

$$\frac{R \cos (T - t) - r}{R \sin (T - t)} = -\tang (\tau - t) = -\frac{rdt}{dr} = -\frac{r}{r'}.$$

Bezeichnet man mit λ den Winkel, welchen die Normale mit der Abscissenachse einschließt, so hat man

$$\cot(\lambda - t) = - \frac{1}{\cot(\tau - t)} = - \frac{rdt}{dr} = - \frac{r}{r'}.$$

Das Stück AT der durch den Pol auf den Radiusvector senkrecht gezogenen Geraden zwischen dem Pol und dem Durchschnitte der Tangente wird **Polarsubtangente** genannt. Man hat Polarsubtangente

$$= r \operatorname{tang}(\tau - t) = \frac{r^2 dt}{dr} = \frac{r^2}{r'}.$$

Ebenso heißt das zwischen Pol und Normale liegende Stück AN die **Polarsubnormale**. Es ist demnach Polarsubnormale

$$= \frac{r}{\operatorname{tang}(\tau - t)} = \frac{dr}{dt} = r'.$$

Aus dieser Definition geht hervor, daß die Subtangente und Subnormale bei Polarcoordinaten nicht mehr, wie solches bei Parallelcoordinaten der Fall ist, eine unveränderliche Richtung behalten, sondern dieselbe mit dem Punkt der Curve sich ändert.

Das Stück der Tangente TM wird zuweilen **Polartangente** und das Stück MN der Normale **Polarnormale** genannt. Die Formeln für diese beiden Abschnitte sind:

$$\text{Polartangente} = r \sqrt{1 + \frac{r^2}{r'^2}};$$

$$\text{Polarnormale } \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

§. 167. Anwendung der eben aufgestellten allgemeinen Formeln auf verschiedene Curven.

1) Für die **archimedische Spirale** (Fig. 10), deren Gleichung ist $r = at$, findet man

$$\operatorname{tang}(\tau - t) = \frac{r}{a} = t,$$

so daß die Abscissenachse AB die Curve im Pole berührt. Ferner ist Polarsubtangente $= at^2$ und Polarsubnormale $= a$ mithin constant; Polartangente $= at\sqrt{1 + t^2}$; Polarnormale $= a\sqrt{1 + t^2}$.

2) Für die **hyperbolische Spirale** (Fig. 11), welche $r = \frac{a}{t}$ zur Gleichung hat, findet man

$$\operatorname{tang}(\tau - t) = -t;$$

Polarsubtangente $= -a$, demnach constant; Polarsubnormale $= -\frac{r^2}{a}$;

Polartangente $= \sqrt{a^2+r^2}$ und Polarnormale $= \frac{1}{t}\sqrt{a^2+r^2}$.

3) Die Gleichung der **logarithmischen Spirale** (Fig. 12)

$$r = e^{\frac{t}{m}} \text{ gibt } \tan(\tau - t) = \frac{1}{m},$$

wonach der Winkel, den der Radiusvector mit der Tangente macht, constant ist. Ferner hat man Polarsubtangente $= mr$, d. h. sie wächst proportional zum Leitstrahl; Polarsubnormale $= \frac{r}{m}$, Polartangente $= r\,(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$; Polartangente $= \frac{r}{m}\sqrt{1+m^2}$.

4) Die Gleichung der **parabolischen Spirale** (Fig. 13)

$r^2 = a^2 t$ liefert $\tan(\tau - t) = 2t$;

Polarsubtangente $= 2rt$ und Polarsubnormale $= \frac{a^2}{2r}$.

5) Legt man an einen Kreis ADQ (Fig. 14) durch den Punkt D eine Tangente und trägt auf derselben vom Berührungspunkte D an nach einer bestimmten Richtung hin das Stück DM gleich dem Bogen AD auf, der von einem festen Punkte A und dem Berührungspunkte begrenzt wird; so gehört der Punkt M einer Curve an, welche die **Kreisevolvente** genannt wird. — Bezeichnet man den Winkel AOD, welchen der nach dem Berührungspunkte D gezogene Radius OD $= a$ mit dem festen Radius OA macht, durch ϑ, den Winkel AOM wie gewöhnlich durch t, und den Radiusvector OM durch r; so ist zufolge der Construction:

$$a\vartheta = \sqrt{r^2 - a^2} \text{ und } \tan(\vartheta - t) = \sqrt{\frac{r^2 - a^2}{a}};$$

woraus

$$t = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right)$$

als Polargleichung der Kreisevolvente entspringt.

Man findet die Polarsubtangente $= \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$;

und die Polarsubnormale $= \frac{a\,r}{\sqrt{r^2 - a^2}}$; ferner den Sinus des Winkels, welchen die Normale mit dem Radiusvector einschließt, $= \frac{a}{r}$, woraus folgt, daß die Normale der Kreisevolvente den Grundkreis ADQ berührt.

6) Die Lemniscate (Fig. 15) ist bekanntlich diejenige Curve, für welche das Product der Abstände eines jedes ihrer Punkte M von zwei anderen fixen Punkten F und F′ einer constanten Größe b^2 gleich ist. Nimmt man die Gerade, welche diese beiden Punkte verbindet, als Abscissenachse an und die Mitte dieser Geraden zum Anfangspunkt der Coordinaten; so bekommt man, wenn noch insbesondere $CF = b$, für die Gleichung der Lemniscate:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2b^2 (y^2 - x^2) = 0$$

und für ihre Polargleichung:

$$r^2 = a^2 \cos 2t,$$

wenn $b\sqrt{2} = a$ gesetzt wird.

Wir finden die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Normale mit dem Radiusvector macht, gleich tang 2t. Um daher in einem Punkte M der Lemniscate eine Normale zu errichten, brauchen wir blos den Radiusvector CM zu ziehen und einen Winkel zu construiren, der doppelt so groß ist als der Winkel, welchen jener Radiusvector mit der Abscissenachse einschließt.

7) Die Tangentencurve hat ihre Definition in der einfachen Polargleichung $r = \tan t$, welche bei dem Uebergange zu einem rechtwinkligen Coordinatensystem sich in folgende:

$$x^4 + y^2 (x^2 - 1) = 0$$

umwandelt. Die Curve, welche in Fig. 16 verzeichnet ist, besteht aus vier Aesten, von denen zwei sich oberhalb des Durchmessers AB des Kreises ACB in's Unendliche erstrecken und die zwei anderen vollkommen gleich gestalteten Aeste unterhalb dieses Durchmessers liegen. Wir finden für diese Curven folgende Ausdrücke:

$\tan(\tau - t) = \frac{1}{2} \sin 2t$;
Polarsubtangente $= \sin^2 t$;
Polarsubnormale $= \sec^2 t$;
Polartangente $= \tan t \sqrt{1 + \sin^2 t \cos^2 t}$;
Polarnormale $= \sec^2 t \sqrt{1 + \sin^2 t \cos^2 t}$.

Um also eine Tangente an die Curve in dem Punkte M zu legen, wird man über CO als Durchmesser einen Halbkreis ChO beschreiben; aus dem Durchschnittspunkte h des letzteren mit dem Radiusvector OM auf CO die Senkrechte hi fällen und auf dem aus dem Pole auf den Leitstrahl geführten Perpendikel das Stück OQ gleich hi nehmen; die Gerade QE, welche den Punkt Q und den Durchschnittspunkt E des Leitstrahles mit dem Kreise ACB verbindet, wird dann zur gesuchten Tangente parallel laufen.

8) Die Cardioide (§. 17), eine Curve, welche man zuweilen auf der Oberfläche eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäßes wahrnimmt, das im Sonnenschein steht, ergibt sich aus folgender Construction. Es ist ein Kreis ABX und ein Punkt A auf demselben gegeben; von letzterem werden verschiedene Sehnen AB gezogen und zu beiden Seiten des Durchschnittspunktes B die Stücke BM und BM′ jedes gleich 2a getragen, wo a den Radius AO des Kreises bedeutet. Aus dieser Construction entspringt einfach, wenn wir die den Mittelpunkt des Kreises und den gegebenen Punkt A verbindende Gerade als Abscissenachse wählen, folgende Gleichung als Polargleichung der Curve:

$$r = 2a\,(\cos t + 1).$$

Bezeichnen wir die Polarsubnormale mit r_1 und den Winkel, welchen sie mit der Abscissenachse bildet, mit t_1, so daß

$$t_1 = t + \frac{\pi}{2};$$

so finden wir

$$r_1 = 2a \cos t_1,$$

oder wenn wir zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen:

$$y^2 + x^2 - 2ax = 0$$

als Gleichung des Ortes des Endpunktes der Polarsubnormale. Um daher eine Normale in einem Punkte M der Cardioide zu errichten, ziehe man den Radiusvector AM, errichte auf ihn in A eine Senkrechte; der Durchschnittspunkt N des Kreises mit dieser Senkrechten, verbunden mit dem Punkte M der Cardioide gibt die verlangte Normale.

§. 168. **Charakter der Existenz einer Asymptote.** Um mittelst der Polargleichung zu unterscheiden ob eine Curve Asymptoten habe oder nicht, brauchen wir blos zu untersuchen, welchen Werth der Ausdruck der Polarsubtangente $r^2 \dfrac{dt}{dr}$ für $r = \infty$ annimmt Stellt sich derselbe in diesem Falle als ein bestimmter und endlicher Werth c

heraus, so ist c die Länge des von dem Pol auf die Asymptote gefällten Perpendikels; wird aber gedachter Werth unendlich oder imaginär, so hat die Curve keine Asymptoten. Dieses Verfahren ist unmittelbar aus der Definition der Asymptote hergeleitet, zu Folge welcher letztere mit der Tangente zusammenfällt, wenn der Berührungspunkt unendlich weit vom Pol entfernt liegt.

Die Polarsubtangente haben wir gleich — a für die hyperbolische Spirale gefunden. Diese Curve hat mithin eine Asymptote CZ (F. 11), welche in der Entfernung AC = a zu der Abscissenachse AB parallel läuft.

Wir wollen noch die Asymptote der Kegelfocale bestimmen. Diese Curve entsteht aus dem fortwährenden Durchschnitt einer durch den gegebenen Punkt A (F. 18) gehenden Geraden ANM mit einem durch den gegebenen Punkt B gelegten Kreise, dessen Mittelpunkt 0 der Durchschnittspunkt jener Geraden ANMA′ mit der durch den Punkt B gehenden geraden Linie BX ist. A. Quetelet, welcher diese Curve aufgefunden und näher untersucht hat, legte ihr deshalb den Namen Kegelfocale bei, weil sie der geometrische Ort der Brennpunkte M, N sämmtlicher Kegelschnitte AA′ ist, welche durch die verschiedenen aus einem auf einem geraden Kegel ASA′ liegenden Punkt A auf der denselben und die Achse des Kegels enthaltenden Ebene senkrecht geführten Ebenen entstehen.

Sehr leicht läßt sich die Polargleichung der Kegelfocale aufstellen. Das Dreieck ABM gibt nämlich

$$\frac{MB}{BA} = r = \frac{\sin BAM}{\sin BMA} = \frac{\cos(\beta + 2t)}{\sin t}$$

wenn BA als Einheit angenommen und die Linie BX, welche mit der aus B auf die Gerade BA errichteten Senkrechten SB den Winkel β bildet, als Abscissenachse gewählt wird. — Der Radiusvector wird unendlich für t = 0, welcher Werth den Ausdruck der Polarsubtangente

$$\frac{\cos^2(2t + \beta)}{-\sin(2t + \beta)\,2\sin t - \cos t\cos(2t + \beta)}$$

auf $-\cos\beta$ bringt. Nehmen wir darum auf der Verlängerung von AB das Stück BA″ = BA, und fällen aus A″ einen Perpendikel A″D auf die durch den Punkt B auf die Gerade BX gezogene Senkrechte BD; so gibt A′D die gesuchte Asymptote.

Fällt die Gerade BX mit der Senkrechten SB zusammen, so geht die Polargleichung der Kegelfocale in

$$r = \frac{\cos 2t}{\sin t},$$

und die Curve selbst in die in Fig. 19 dargestellten Cylinderfocale über. Man kann der letzteren diesen Namen geben, weil sie der geometrische Ort der Brennpunkte sämmtlicher Ellipsen ist, welche sich als Durchschnitte eines geraden Cylinders mit den verschiedenen durch einen auf demselben liegenden bestimmten Punkt A auf die diesen Punkt und die Cylinderachse enthaltende Ebene senkrecht geführten Ebenen ergeben. Die Cylinderfocale hat also eine Asymptote, welche in der Entfernung $BA'' = 1$ der Abscissenachse parallel ist.

Ihrer Verwandtschaft halber sind beide Curven hier zusammengestellt worden, auf welche wir an verschiedenen Orten gelegentlich wieder zurückkommen werden.

II. Verschiedene Eigenschaften der ebenen Curven.

1. Der Lauf ebener Curven.

§. 169. **Steigen und Fallen einer Curve.** Bei der Untersuchung der ebenen krummen Linien wirft sich bald die Frage auf, ob die Curve im Steigen oder Fallen begriffen ist, indem sich hieraus schon Einiges über die Form entnehmen läßt. Soll nun die Curve steigen, so muß offenbar die folgende Ordinate größer als die vorhergehende sein, während beim Fallen das Umgekehrte sich zuträgt. Bezeichnen also x, y und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Coordinaten zweier angrenzenden Punkte einer Curve $y = f(x)$, so steigt oder fällt dieselbe, je nachdem die Differenz Δy sich positiv oder negativ herausstellt. Denken wir uns nun Δx positiv, so sind die Zeichen der Ausdrücke Δy und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ immer dieselben, und dasjenige des letzteren ist für immer kleiner werdende Δx mit dem Zeichen von

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

übereinstimmend; also wird, wenn x um eine unendlich kleine positive Größe zunimmt, jene Differenz zuletzt positiv oder negativ sein, oder die durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellte Curve steigen oder fallen, je nachdem der Differentialquotient $f'(x)$ positiv oder negativ ist.

Die Betrachtung der Figuren 20 und 21 wird das Gesagte zur deutlicheren Anschauung bringen, wenn man dabei die Relation

$$\tan \tau = f'(x)$$

zu Hülfe nimmt. Für ein positives $f'(x)$ werden die Berührungsgeraden MT der Curven in den Punkten M einen spitzen Winkel mit der positiven Richtung der Abscissen machen und die Curven steigen; für ein negatives $f'(x)$ hingegen werden die Berührungsgeraden M'T' in den Punkten M' der Curven einen stumpfen Winkel mit den positiven Abscissen bilden und die Curven fallen.

Die Ordinate $y = f(x)$ wurde hier als positiv angenommen. Ist sie negativ, so gilt die vorhin angegebene Bestimmung in dem algebraischen Sinne ebenfalls noch, in welchem negative Größen in Beziehung auf andere um so beträchtlicher sind, je weniger ihre numerischen Werthe betragen. Die allgemeinere Regel läßt sich darum in folgende zusammenfassen: Die Curve ist in der dem Werthe x zugehörigen Stelle im Steigen oder Fallen gegen die Abscissenachse begriffen, je nachdem $f(x)$ und $f'(x)$ gleichartige oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Verschwindet für einen speciellen Werth von x der Ausdruck $f'(x)$, so wird damit für den Punkt x, y die der Abscissenachse parallele Lage angezeigt wie in den Punkten N. Diese Lage kann auf dreierlei Art stattfinden, nämlich die Curve zwischen der Achse und der Berührenden, wie in Fig. 20, oder die Berührende zwischen Curve und Achse, wie in Fig. 21, oder endlich die Curve auf der einen Seite des Berührungspunktes unterhalb, auf der anderen Seite desselben oberhalb der Tangente liegen. Im ersten Fall wird der Differentialquotient $f'(x)$ aus dem Positiven in's Negative übergehen. Zugleich sieht man, daß der Werth der Ordinate, der diesem Punkte N entspricht, im ersten Falle größer als jene der unmittelbar vorhergehen oder nachfolgenden, d. h. ein Größtes ist; im zweiten Falle aber kleiner als die ihm unmittelbar diesseits und jenseits sich anschließenden Werthe, d. h. ein Kleinstes wird Im dritten Falle hat $f'(x)$ immer einerlei Zeichen, sein Durchgang durch Null bedingt aber einen Uebergang aus dem Abnehmen in's Zunehmen, d. h. $f''(x)$ geht aus dem Negativen in's Positive über. In Folge des ersten Umstandes ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden.

§. 170. **Convexität oder Concavität der Curven.** Eine zweite Frage ist die, ob die Curve oder ein Stück derselben gegen die Abscissenachse zu convex oder concav sei. Der Bogen MM' (Fig. 22) kehrt der Abscissenachse die convexe Seite zu, wenn er zwischen seiner

Sehne und der Abscissenachse liegt; dagegen ist der Bogen MM′ (Fig 23) gegen die Abscissenachse hin concav, wenn die Sehne zwischen dem Bogen und jener Achse hinläuft. Es seien $AP = x$, $PR = \Delta x$ und $RP' = \Delta x$; indem wir dann die den Abscissen x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$ zugehörigen Coordinaten der Curve und der Sehne construiren, ist für den Fall der Convexität:

$$RQ > NR \text{ oder } RQ - NR \text{ positiv};$$

und für den Fall der Concavität:

$$RQ < NR \text{ oder } RQ - NR \text{ negativ}.$$

Die Curve kehrt mithin die convexe oder concave Seite der Abscissenachse zu, je nachdem der Ausdruck

$$\frac{f(x + 2\Delta x) + f(x)}{2} - f(x + \Delta x)$$
$$= \tfrac{1}{2} \{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + fx\}$$

sich positiv oder negativ herausstellt. Da bei der Entscheidung nur der eingeklammerte Ausdruck in Betracht kommt und dann $(\Delta x)^2$ stets positiv ist, so kann man dafür auch den Quotienten:

$$\frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}$$
$$= \frac{\dfrac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} - \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

nehmen, welcher nach §. 17 bei dem fortwährenden Kleinerwerden von Δx mit dem Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ zusammenfällt. Sind also $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig, dergestalt daß diese Ausdrücke endliche reelle Werthe haben; so wird die Curve an der fraglichen Stelle convex sein, wenn $f''(x)$ positiv ist, dagegen concav, wenn $f''(x)$ negativ ausfällt.

Liegt die Curve unterhalb der Abscissenachse, wo die Ordinaten negativ sind; so wird man bald finden, daß hier das Gegentheil eintritt, daß nämlich ein negatives Zeichen von $f''(x)$ der Convexität, ein positives der Concavität entspricht. Wir können demnach folgenden Satz aussprechen. Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ stetig in der Nähe von x sind und endliche reelle Werthe behalten; so wendet die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, der Abscissenachse die convexe oder concave

Seite zu, je nachdem f(x) und f''(x) gleichartige oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Für die Cissoide (Fig. 2), deren Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

ist, haben wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a - x)x^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{3/2}}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a^2}{(2a - x)^{5/2}x^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Curve wendet überall der Abscissenachse ihre convexe Seite zu, weil für jeden Werth von x die Ordinate y und der dazu gehörige Differentialquotient y'' dasselbe Vorzeichen haben. — Für die Cycloide wurde bereits im §. 158 gefunden:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}},$$

woraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{a}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}} = -\frac{a}{y^2}.$$

Da y und y'' stets entgegengesetzte Zeichen haben, so ist diese Curve überall gegen die Abscissenachse hin concav.

Die Curve, deren Gleichung

$$y = x^2 \sqrt{1 - x}$$

ist, besteht aus zwei gleichen Zweigen von entgegengesetzter Lage; wir brauchen deshalb nur einen Zweig zu betrachten, z. B. den, welcher dem positiven Wurzelzeichen angehört. Wir haben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 5x^2}{2\sqrt{1-x}}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8 - 24x + 15x^2}{4\sqrt{1 - x}}.$$

Da f′(x) negativ ist von $x = -\infty$ bis $x = 0$, positiv von $x = 0$ bis $x = {}^4/_5$, und negativ von $x = {}^4/_5$ bis $x = 1$; so geht die Curve aus dem Unendlichen bis zum Ursprung der Coordinaten herab, wo sie von der Abscissenachse berührt wird, steigt dann von $x = 0$ bis $x = {}^4/_5$; an dem dem letzteren Werthe angehörigen Punkt der Curve läuft die Tangente wieder parallel zur Abscissenachse; endlich fällt von $x = {}^4/_5$ bis $x = 1$ die Curve, welche im letzteren Punkte eine zur Ordinatenachse parallele Tangente hat. — Da f″(x) positiv bleibt von $x = -\infty$ bis $x = 0{,}4735\ldots$ und von $x = 0{,}4735\ldots$ bis $x = 1$ positiv wird; so ist die Curve im letzteren Intervall concav, im Uebrigen convex. — Fig. 24 gibt ein Bild von dieser Curve.

2. Besondere Punkte ebener Curven.

§. 171. **Beugungspunkte.** Bei der Untersuchung der Gestalt einer Curve wird man insbesondere seine Aufmerksamkeit auch auf diejenigen Punkte richten müssen, in welchen dieselbe von ihrem gewöhnlichen Laufe abweicht und irgend welche eigenthümliche Beschaffenheit darbietet. Dergleichen bemerkenswerthe Punkte bei ebenen Curven heißen *besondere* oder *ausgezeichnete Punkte*. Diese sind die sogenannten *Beugungspunkte*, die *Rückkehrpunkte*, die *vielfachen Punkte* und die *isolirten Punkte*.

Einen *Beugungs-* oder *Flexionspunkt* besitzt die Curve $y = f(x)$, wenn von ihren beiden in demselben angrenzenden Theilen der eine seine concave und der andere seine convexe Seite gegen jede nicht durch diesen Punkt gezogene Gerade kehrt, und außerdem, wofern die letztere als Abscissenachse gilt, die Curve für die sowohl der Abscisse gedachten Punktes unmittelbar vorangehenden als auch unmittelbar nachfolgenden Abscissen reelle Ordinaten liefert. Aus der gegebenen Erklärung folgt, daß die Werthe von x einem Beugungspunkte angehören können, für welche die Größe y″ ihr Zeichen wechselt. Geschieht dieser Wechsel, wenn f″(x) stetig ist, stetig, so braucht man nur $f''(x) = 0$ zu setzen. Sollte aber mit der Beugung der Curve eine Unstetigkeit von f″(x) stattfinden, so ermittelt man die betreffende Stelle durch $f'''(x) = \infty$. Allein das Erfülltsein der einen oder der anderen dieser Gleichungen hat in dem entsprechenden Punkte noch keine Beugung zur unmittelbaren Folge. Damit eine solche daselbst stattfinde, müssen f(x) und f′(x) in der Nähe von x stetig und zugleich reelle endliche Größen sein, ferner muß f″(x) in der Nähe von $x \pm \varDelta x$ endliche reelle aber mit verschiedenen Zeichen versehene Werthe erhalten.

So finden wir für die Curve, die in Fig. 24 verzeichnet ist und $y = x^2 \sqrt{1-x}$ zur Gleichung hat, wenn wir den zweiten Differentialquotienten

$$y'' = \frac{8-24x+15x^3}{4\sqrt{1-x}}$$

gleich Null setzen, $x = 0{,}4735\ldots$ Da y und y' in der Nähe dieses Werthes stetig sind und endliche reelle Werthe erhalten, ferner y'' für $0{,}4735\ldots \pm \Delta x$ wirklich entgegengesetzte Zeichen bekommt; so wird der Punkt x in der That ein Beugungspunkt sein. Für die Gleichung

$$y = x + (x-a)^{5/3},$$

die in Fig. 25 ihre Darstellung hat, erhält man:

$$y' = 1 + {}^5/_3\, (x-a)^{2/3}$$

und

$$y'' = \frac{10}{9\,(x-a)}\,{}^{1/3}.$$

Die Gleichung $y'' = 0$ liefert für x keinen Werth; dagegen entspringt aus $y''' = \frac{1}{0}$ der Werth $x = a$. Da y und y' für $x = a \pm \Delta x$ stetig und reelle endliche Größen sind, ferner y'' verschiedene Zeichen bekommt; so findet eine Inflexion in dem Punkte J statt, in welchem die Berührungsgerade mit der Abscissenachse einen Winkel von 45° bildet.

§ 172. **Rückkehrpunkte.** Ein sogenannter Rückkehrpunkt entsteht, indem sich zwei Aeste einer Curve in dem nämlichen Punkte endigen und berühren. Dieser Punkt ist entweder eine Spitze oder ein Rückkehrpunkt der ersten Art, wenn die Aeste in der Nähe ihres Vereinigungspunktes ihre convexe Seite einander zukehren, wie im Punkte M Fig. 26; oder ein Schnabel oder ein Rückkehrpunkt der zweiten Art, wenn die convexe Seite des einen Astes gegen die concave des anderen gewendet ist, wie im Punkt N Fig. 27. Im ersteren Falle liegen die beiden Curvenäste, wenigstens in der Nähe gedachten Punktes, auf verschiedenen, im zweiten Falle auf derselben Seite der den beiden Aesten in jenem Punkte gemeinsam angehörigen Tangente.

Hat nun die Curve $y = f(x)$ für eine bestimmte Abscisse a solche Rückkehrpunkte, so muß für die kleinsten Werthe von Δx eine der bei-

den Größen $f(a + \Delta x)$, $f(a - \Delta x)$ reell, die andere aber imaginär ausfallen, im Falle nemlich die gemeinschaftliche Tangente beider Curvenäste nicht senkrecht steht. Diese Bedingungen fordern offenbar, daß in dem Ausdrucke für $f(a + \Delta x)$ eine Wurzelgröße von der Form $(\Delta x)^{\frac{m}{n}}$ vorkommt, in welcher m eine ungerade und n eine gerade Zahl bedeutet. Für den Rückkehrpunkt der ersten Art wird der Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ verschwinden oder unendlich groß erscheinen, weil dieser Quotient für zwei zu einerlei Abscisse gehörige, der Spitze noch so nahe liegende Punkte stets zwei dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe besitzt. Für den Rückkhrpunkt der zweiten Art gilt natürlicherweise diese Bedingung nicht, weil bei demselben der Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ sein Zeichen nicht ändert, also nicht nothwendig 0 oder ∞ zu sein braucht; vielmehr muß besagter Quotient hier für $a + \Delta x$ oder für $a - \Delta x$, wenigstens bei den kleinsten Werthen von Δx, zwei reelle Werthe von einerlei Zeichen zulassen.

Betrachten wir die Curve, deren Gleichung ist:

$$y = x + (x - a)^{3/2},$$

wo a eine positive Größe sein soll. Für $x = a$ hält die Curve in ihrem Laufe inne und ihre zwei Aeste stoßen in dem Punkte (a, a) zusammen. Die Differentiation liefert,

$$f'(x) = 1 + {}^3/_2 \sqrt{x - a},$$

woraus folgt, daß die beiden Zweige der Curve in jenem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben, die gegen die Abscissenachse unter einem Winkel von 45° geneigt ist. Weiter hat man

$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x - a}},$$

welcher Ausdruck für $x = a + \Delta x$ zwei reelle Resultate mit entgegengesetztem Zeichen liefert. Die Curve, welche in Fig. 26 dargestellt ist, hat demnach in dem Punkte M (a, a) einen Rückkehrpunkt der ersten Art.

Untersuchen wir noch die Curve, deren Gleichung ist:

$$y = x^2 + (x - a)^{5/2}.$$

Diese Curve besteht aus zwei Aesten, welche in dem Punkte (a, a^2) sich endigen. Durch Differentiation entsteht:

$$f'(x) = 2x + {}^5/_2 (x - a)^{3/2};$$

woraus hervorgeht, daß die beiden Zweige der Curve in jenem Punkte eine gemeinsame Tangente besitzen. Durch weitere Differentiation entspringt:

$$f''(x) = 2 + \frac{15}{4}\sqrt{x-a}\,;$$

welcher Ausdruck für $x = a + \Delta x$ bei den kleinsten Werthen von Δx für beide Zweige der Curve positiv ausfällt: demnach hat diese Curve, welche in der Fig. 27 dargestellt ist, in dem Punkte N (a, a^2) einen Rückkehrpunkt der zweiten Art.

§. 173. **Vielfache Punkte.** Ein vielfacher Punkt wird derjenige genannt, durch welchen mehrere Aeste derselben hindurchgehen, mögen sie daselbst einander sich schneiden oder berühren; der Punkt heißt insbesondere ein zweifacher, dreifacher u. s. w., je nachdem sich in demselben zwei, drei u. s. w. Zweige der nämlichen Curve begegnen. Treffen mehrere Aeste einer Curve in einem Punkte zusammen, so gehören ihr daselbst mehrere Tangenten an, während sie in den einfachen Punkten deren bloß eine hat. Es sei nun $F(x, y) = 0$ die von allen Wurzelgrößen befreite Gleichung der Curve. Die daraus durch Differentiation gewonnene Gleichung

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\cdot y' = 0$$

liefert für jedes Paar zusammengehöriger Werthe von x und y bloß einen Werth für y', wenn die Derivirten $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ nicht gleichzeitig zum Verschwinden kommen. Bezeichnet man nemlich z. B. bei einem zwiefachen Punkte durch y'_1 und y'_2 die beiden Werthe von y' so geben die beiden Gleichungen

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\cdot y'_1 = 0 \text{ und } \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\cdot y'_2 = 0,$$

in Bezug auf die eindeutigen Werthe $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ aufgelöst, Null als Resultat. Soll mithin eine Curve einen vielfachen Punkt haben, so muß, wenn die Coordinaten desselben statt x und y in dem Ausdrucke von y' substituirt werden, dieser letztere eben so viele verschiedene Werthe annehmen, als Aeste sich schneiden. Eine derartige Vielfachheit

von Werthen ist wegen der rationalen Form des Bruches

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

nur insofern möglich, als derselbe in die unbestimmte Größe $\frac{0}{0}$ übergeht, oder mit anderen Worten als der oben aufgestellten Differentialgleichung durch eine solche Substitution unabhängig von y' Genüge geschieht. — Um daher die vielfachen Punkte einer Curve zu entdecken, bringe man ihre Gleichung auf eine rationale Form $F(x, y) = 0$, differentiire dieselbe dann und setze die Coefficienten $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ beider Differentiale gleich Null. Die aus diesen Gleichungen gefundenen Werthe von x und y, welche zugleich der Gleichung $F(x, y) = 0$ Genüge leisten, können die Coordinaten vielfacher Punkte abgeben. Um darüber zur Gewißheit zu gelangen, muß man den Lauf der Curve in der nächsten Umgebung jener Punkte untersuchen, wobei es ganz besonders auf die Anzahl der reellen Werthe ankommt, welche die Derivirte $\frac{dy}{dx}$ in Bezug auf den fraglichen Punkt erhält, indem dadurch sofort die Anzahl der daselbst sich begegnenden Aeste bestimmt wird. Man nimmt deshalb die höheren Differentialgleichungen der vorgelegten Gleichung, bis man zu einer gelangt, welcher durch die Coordinaten gedachten Punktes nicht unabhängig von dem Werthe der Derivirten $\frac{dy}{dx}$ Genüge geschieht.

Die Lemniscate (Fig. 15), deren Gleichung ist:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2b^2 (y^2 - x^2) = 0,$$

hat im Ursprung einen zweifachen Punkt. Denn für diesen Punkt wird

$$\frac{dF}{dx} = 4(x^2 + y^2)\,x - 4b^2 x = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} = 4(x^2 + y^2)\,y + 4b^2 y = 0;$$

ferner

$$4b^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4b^2 = 0, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

Hieraus geht hervor, daß der Ursprung der Coordinaten ein zwiefacher Punkt ist, in welchem sich zwei Bogen der Curve rechtwinklig durchschneiden, da die beiden Tangenten unter einem Winkel von 45° gegen die Abscissenachse geneigt sind. Außerdem gibt sich dieser Doppelpunkt als ein Inflexionspunkt zu erkennen.

Für die Gleichung $x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0$, deren Curve in Fig. 28 verzeichnet ist, hat man:

$$\frac{dF}{dx} = 4x^3 + 4axy = 0 \text{ und } \frac{dF}{dy} = 2ax^2 - 3ay^2 = 0.$$

Daraus entspringt:

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} x = a\sqrt{\tfrac{2}{3}} \\ y = -\tfrac{2}{3}a \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} x = -a\sqrt{\tfrac{2}{3}} \\ y = -\tfrac{2}{3}a \end{matrix}\right\}.$$

Nachdem man zuvörderst gefunden, daß nur das System $x=0$, $y=0$ der gegebenen Gleichung Genüge thut, wird nur der Punkt $(0, 0)$ ein vielfacher Punkt sein können. Die Differentialgleichung der zweiten Ordnung liefert, wenn man gleich das Glied wegläßt, welches zufolge der Bedingungsgleichung verschwindet:

$$6x^2 + 2ay + 4ax\frac{dy}{dx} - 3ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

ein Resultat, welches für $x = 0$, $y = 0$ identisch Null wird. Man geht darum auf die Differentialgleichung der dritten Ordnung über, welche nach Hinweglassung der Glieder, die zufolge der Bedingungsgleichung verschwinden, ist:

$$4x + 2a\frac{dy}{dx} - a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

Daraus entstehen für $x = 0$ die Werthe:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}.$$

Der Ursprung A ist demnach ein dreifacher Punkt, dergestalt daß der eine Ast die Abscissenachse berührt und die beiden anderen AB und AC mit derselben zwei Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind.

Die Gleichung

$$x^4 - 2ay^3 - 3a^2 y^2 - 2a^2 x^2 + a^4 = 0,$$

welche in Fig. 29 verzeichnet ist, liefert:

$$-6a(y+a)y\frac{dy}{dx} + 4x(x^2 - a^2) = 0,$$

$$-6a(2y+a)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 12x^2 - 4a^2$$

$$-6a(y+a)y\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Indem man $(y+a)y = 0$ und $x(x^2 - a^2) = 0$ setzt und diese Gleichungen mit der vorgelegten zusammenhält, findet man daß die Curve an drei Stellen vielfache Punkte haben könne, nämlich in D und D', wo $y = 0$ und $x = \pm a$, ferner in E, wo $x = 0$ und $y = -a$. Die Berührenden sind daselbst beziehungsweise Da, Db, D'a', D'b' und Ef, Ec und bilden mit der Abscissenachse Winkel, deren Tangenten $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ für den Punkt E und $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ für D und D' sind: die fraglichen Punkte stellen sich hiernach als doppelte Punkte heraus. In dem Punkte F, $(0, \frac{1}{2}a)$ läuft die Berührende parallel zur Abscissenachse, dagegen in den Punkten G, $(a\sqrt{2}, -a)$ und H, $(-a\sqrt{2}, -a)$ parallel zur Ordinatenachse.

§. 174. **Isolirte Punkte.** *Isolirte, conjugirte oder zugeordnete Punkte* sind die von einer Curve völlig getrennten Punkte, deren Coordinaten der Gleichung der Curve Genüge leisten. Gedachte Punkte werden durch Anwendung der vorhergehenden Methode bestimmt, wenn man dabei auf eine in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ aufzulösende Gleichung kommt, welche lauter *imaginäre* Wurzeln hat. Für reelle eindeutige Werthe von x und y zeigt nemlich das Imaginärwerden von $\frac{dy}{dx}$, da dx reell ist an, daß dy, also auch $y \pm dy$, d. h. die folgenden Ordinaten imaginär sind. Da ferner die imaginären Werthe von y' immer conjugirt sind, so zieht die Zweideutigkeit von $\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}$ das Verschwinden des Zählers und Nenners nach sich. Der Punkt, dessen Coordinaten den Gleichungen

$$\frac{dF}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dF}{dy} = 0$$

genügen und zugleich die Gleichung $F(x, y) = 0$ befriedigen, ist sonach ein conjugirter Punkt der durch die letztere Gleichung dargestellten Curve, wenn y' imaginär ausfällt.

Die Gleichung $y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2 y^2 = 0$ liefert:

$$2yy'(2y^2 + 3x^2) + 4x^3 - 5x^4 + 6y^2 x = 0.$$

Setzt man $y(2y^2 + 3x^2) = 0$ und $x(4x^2 - 5x^3 + 6y^2) = 0$, so findet man daß $x = 0$ und $y = 0$ allein die verlangten Bedingungen erfüllen. Die Differentialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung werden für diese Werthe identisch Null, während die vierte ist:

$$y'^4 + 3y'^2 + 1 = 0,$$

deren Wurzeln sämmtlich imaginär sind: der Anfangspunkt der Coordinaten ist daher ein conjugirter Punkt der der vorgelegten Gleichung angehörigen Curve.

Die Gleichung $y^2 - (x + a)^2 x = 0$ gibt die Bedingungsgleichungen:

$$(x + a)^2 + 2(x + a)x = 0 \text{ und } 2y = 0,$$

aus denen die brauchbare Auflösung $x = -a$, $y = 0$ entspringt. Die weitere Untersuchung zeigt, daß der den letzteren Coordinatenwerthen entsprechende Punkt ein conjugirter Punkt der der ursprünglichen Gleichung angehörigen Curve ist.

Ebenso wird man finden, daß die der Gleichung

$$y = (2 - x)\sqrt{1 - x}$$

zugehörige Curve einen conjugirten Punkt besitzt, dessen Coordinaten $x = 2$ und $y = 0$ sind.

§. 175. **Die vorspringenden Punkte und Stetigkeitsunterbrechungen.** Eine Curve hat einen sogenannten vorspringenden Punkt, wenn daselbst die Ordinaten derselben endlich bleiben, ohne plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern überzugehen, dagegen die Tangente dort sich plötzlich ändert.

Die Curve Fig. 30, deren Gleichung ist:

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

geht durch den Ursprung und erstreckt sich sowohl nach der Seite der positiven als nach jener der negativen Abscissen hin. Für die erste Derivirte erhält man:

$$y' = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{x\,e^{-\frac{1}{x}}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2},$$

welche für $y=0$ liefert $y'=0$ oder $y'=1$, je nachdem man x positiv oder negativ nimmt. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist demnach ein vorspringender Punkt der Curve, deren Zweig nach der positiven Seite der Abscissen hin von der Achse der x berührt wird, während die Tangente des anderen Zweiges in jenem Punkte einen Winkel von 45° mit dieser Achse einschließt.

Ebenso findet man, daß die Curve, deren Gleichung ist:

$$y = x \operatorname{arc}\left(\tang = \frac{1}{x}\right),$$

welche

$$y' = \operatorname{arc}\left(\tang = \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2}$$

zur Derivirten hat, einen vorspringenden Punkt im Ursprung besitzt. Denn wenn x durch positive oder negative Werthe gegen Null convergirt, hat man an der Grenze $y' = \frac{1}{2}\pi$ oder $y' = -\frac{1}{2}\pi$.

Eine durch die Gleichung $y = f(x)$ ausgedrückte Curve heißt unstetig für $x = a$, wenn die Function $f(x)$ für $x = a$ unstetig ist, d. h. wenn dy für $x = a$ nicht mehr unendlich klein bleibt. So ist z. B. die Curve, deren Gleichung

$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

(Fig. 31) für $x = 0$ unstetig, indem, jenachdem x positiv oder negativ unendlich klein ist, $e^{\frac{1}{x}}$ unendlich oder Null wird, so daß für $x = \frac{1}{+\infty}$, $y = +1$, für $x = \frac{-1}{\infty}$, $y = -1$ wird.

Aehnliche Erscheinungen stellen sich bei vielen Curven dar, deren Gleichungen bestimmte, besonders Fourier'sche Integrale enthalten. Die Linie

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}\,dt$$

ist z. B. unstetig, indem sie für $x = \frac{+1}{\infty}$ die Ordinate $\frac{\pi}{2}$, für $x=0$

den Ursprung als conjugirten Punkt und für $x = \frac{-1}{\infty}$ die Ordinate $-\frac{\pi}{2}$ liefert. Ebenso liefert die Curve

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \left[\int_{a}^{\infty} \varphi t \cdot e^{u(t-x)i} dt + \int_{-\infty}^{a} \psi t \cdot e^{u(t-x)i} dt \right]$$

für $x = a - o$, a, $a + o$ die Ordinaten ψa, $\frac{1}{2}(\psi a + \varphi a)$, $\varphi(a)$.

3. Differential der Fläche einer Curve.

§. 176. **Gebrauch der geradlinigen Coordinaten.** Es sei BMZ (Fig. 32) der Bogen einer Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y ist. Zieht man durch zwei Punkte B und M dieses Bogens Parallelen mit der Ordinatenachse, so ist offenbar die Größe der Fläche CBMP, welche zwischen der Achse der x, dem Bogen BM und den zwei Ordinaten BC und MP eingeschlossen wird, eine Function der Abscisse x, welche von der Function f(x) abhängt. Diese neue Function soll mit u bezeichnet und nunmehr der Ausdruck ihres Differentials gefunden werden, d. h. derjenigen Aenderung, welche gedachte Function u erfährt, wenn die Abscisse x sich um die unendlich kleine Größe dx ändert. — Indem die Abscisse AP oder x um die endliche Größe PP′ oder Δx wächst, wird die Fläche u um Δu oder um das Stück PMM′P′ wachsen. Es ist immer möglich Δx so klein anzunehmen, daß f(x) bei dem Uebergange von x in $x + \Delta x$ stets zunimmt oder stets abnimmt. Unter solcher Voraussetzung wird das Flächenstück PMM′P′ $= \Delta u$ zwischen den beiden Rechtecken PQM′P′ und PMRP′ liegen, so daß man setzen kann:

$$\Delta u = (y + \alpha)\, \Delta x \text{ oder } \frac{\Delta u}{\Delta x} = y + \alpha,$$

wo α eine Größe bedeutet, deren absoluter Werth kleiner als derjenige von Δy ist.

Geht man zu den Grenzen über, so hat man

$$\frac{du}{dx} = y \text{ oder } du = y dx;$$

d. h. das Differential der Fläche einer Curve ist gleich der Ordinate der Curve multiplicirt mit dem Differential der Abscisse.

Wären die Coordinaten schiefwinklig, so würden wir auf ähnliche Weise erhalten

$$\frac{du}{dx} = y \sin \varphi,$$

wo φ den Winkel bedeutet, welchen die beiden Coordinatenachsen einschließen.

Betrachten wir die vier verschiedenen Fälle, in denen x und y entweder positiv oder negativ sind, der Reihe nach durch, so werden wir finden, daß im Allgemeinen, wenn es sich um die absolute Fläche handelt,

$$\frac{du}{dx} = \pm y \sin \varphi$$

ist, wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, jenachdem y positiv oder negativ ist.

Für die gewöhnliche Parabel (Fig. 33) hat man $y^2 = 2px$; mithin

$$du = \sqrt{2px}\, dx.$$

Daraus entspringt

$$u = \tfrac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot x^{3/2} = \tfrac{2}{3} xy;$$

d. h. die Fläche AMP beträgt $\frac{2}{3}$ des Rechtecks ANMP, und die Fläche ANM beträgt $\frac{1}{3}$ derselben.

Es möge noch das Differential der Fläche des Sectors AMD = v aufgesucht werden, welcher von der Curve, dem mit der Achse zusammenfallenden festen Radiusvector AD und dem beweglichen Radiusvector AM begrenzt wird. Man hat

$$v = \text{Dreieck AMP} + \text{Segment MPD};$$

$$\text{aber Dreieck AMP} = \frac{xy}{2};$$

$$\text{ferner } d \cdot \text{Segment MPD} = - y dx,$$

wo das Zeichen — gesetzt ist, weil die Fläche MPD abnimmt, wenn x wächst. Man erhält hiernach:

$$dv = \tfrac{1}{2} (x\, dy - y\, dx) \text{ oder } \frac{dv}{dx} = \tfrac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dx} - y \right).$$

Um von der letzteren Formel hier schon eine leichte Anwendung zu machen, wollen wir die Fläche des elliptischen Sectors AMC (Fig. 34) bestimmen. Die Gleichung der Ellipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

liefert

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Mittelst dieses Werthes wird der Ausdruck für das Differential des elliptischen Sectors ACM gleich

$$-\tfrac{1}{2}\frac{ab\ dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

In ähnlicher Weise haben wir für den correspondirenden Kreissector ANC den Ausdruck:

$$-\tfrac{1}{2}\frac{a^2\ dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Da nun diese beiden Sectoren AMC und ANC gleichzeitig entstehen und verschwinden, so haben wir

Elliptischer Sector ACM : Kreissector ACN

$$= -\tfrac{1}{2}ab\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} : -\tfrac{1}{2}a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = b:a;$$

folglich Elliptischer Sector ACM $= \frac{1}{2}$ b arc AN. Der Flächeninhalt der halben Ellipse ist hiernach gleich $\frac{1}{2}\, b\, a\, \pi$.

§. 177. **Gebrauch der Polarcoordinaten.** Das Differential der Fläche AMD = v (Fig. 35) zu finden, welche von einem Bogen der Curve und den beiden nach seinen Endpunkten gezogenen Leitstrahlen eingeschlossen ist. Die gesuchte Formel läßt sich aus dem vorhin aufgestellten Ausdruck

$$\frac{dv}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right).$$

herleiten. Wir haben zu diesem Behufe nur nöthig denselben zunächst in einen andern umzuformen, worin der zwischen der Achse der x und dem Leitstrahl eingeschlossene Winkel t als unabhängige Veränderliche gilt. Nach dem im §. 25 Gesagten entsteht so:

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \tfrac{1}{2}\left(x\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} - y\right)$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right).$$

Setzen wir darin statt x, y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ die aus den Gleichungen $x = r\cos t$ und $y = r\sin t$ entnommenen Werthe, so bekommen wir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{r^2}{2} \text{ oder } dv = \frac{r^2}{2}\,dt\;;$$

d. h. das Differential der Fläche zwischen den Leitstrahlen in einer durch Polarcoordinaten ausgedrückten Curve ist gleich dem halben Quadrat des Leitstrahls multiplicirt mit dem Differential des Winkels.

Die letzte Formel läßt sich auch direct erhalten, wie folgt. Es sei wieder Fläche AMD (Fig. 35) $= v$. Man beschreibe aus A mit AM einen Kreisbogen RM, desgleichen aus A mit AM′ den Kreisbogen M′Q, wo M′ ein dem Punkte M naheliegender Punkt der Curve ist. Für ein gehörig klein gedachtes $\varDelta t$ nehmen die Leitstrahlen von AM bis AM′ beständig zu oder beständig ab; daher wird das Flächenstück AMM′ $= \varDelta v$ stets zwischen den beiden Kreissectoren ARM und AM′Q liegen; so daß man setzen darf

$$\varDelta v = \tfrac{1}{2}\,(r + \alpha)^2\,\varDelta t,$$

wo α wieder eine Größe bedeutet, deren absoluter Werth geringer als der von $\varDelta r$ ist. Daraus entspringt bei dem Uebergange zu den Grenzen wie oben der Ausdruck:

$$\frac{dv}{dt} = \tfrac{1}{2}\,r^2.$$

Für die archimedische Spirale (Fig. 10), deren Gleichung $r = at$ ist, findet man

$$v = \frac{1}{2}\int r^2\,dt = \frac{1}{6}\,a^2 t^3\;;$$

ferner

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt = \frac{4}{3}\,\pi^3\,a^2;$$

$$\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} r^2\,dt = \frac{28}{3}\,\pi^3\,a^2 \text{ u. s. w.}$$

Für den zwischen der ersten und zweiten Windung enthaltenen Flächenraum erhält man hiernach den Ausdruck

$$\frac{28}{3}\pi^3 a^2 - \frac{4}{3}\pi^3 a^2 = 8\pi^3 a^2:$$

dieser Flächenraum ist folglich dem doppelten Kreise gleich, dessen Radius $= 2\pi a =$ AB ist.

Für die hyperbolische Spirale (Fig. 11), deren Gleichung $rt = a$ ist, erhalten wir:

$$v = \frac{1}{2}\int r^2\, dt = -\frac{a^2}{2t};$$

und hieraus

$$\frac{1}{2}\int_t^\infty = \frac{1}{2}\, a r:$$

d. h. die Summe der von dem Radiusvector des Punktes M anfangenden bis zum Pol reichenden Flächenräume ist dem Flächeninhalt des Dreiecks gleich, welches von dem Radiusvector, der Tangente und Polarsubtangente des Punktes M gebildet wird.

4. Differential des Bogens.

§. 178. **Gebrauch der rechtwinkligen Coordinaten.** Es sei die Gleichung irgend einer Curve in Bezug auf die rechtwinkligen Achsen AX, AY (Fig. 36 und Fig. 37) gegeben. Betrachten wir die Länge eines Bogens dieser Curve, welcher sich von einem beliebigen festen Punkte B bis zu einem Punkte M erstreckt, so wird diese Länge als eine Function der Abscisse x angesehen werden können, die mit s bezeichnet sein mag. Man sucht den Ausdruck ihres Differentials, d. h. derjenigen Aenderung, welche gedachte Function erleidet, wenn x um den unendlich kleinen Betrag dx geändert wird. Wir lassen zu diesem Behuf die Abscisse $AP = x$ um die endliche Größe $PP' = \Delta x$ wachsen, wodurch der Bogen s in $s + \Delta s$ übergeht. Offenbar läßt sich Δx so klein denken, daß nicht nur die Ordinate y in gedachtem Intervall beständig zunimmt oder beständig abnimmt, sondern auch der Bogen $MM' = \Delta s$ gegen die Abscissenachse stets convex oder stets concav bleibt.

Dies vorausgesetzt, ziehen wir in dem Punkte M die Tangente MN, welche die Ordinate P'M' in N schneidet. Offenbar ist Bogen MM' größer als die Sehne MM' und kleiner als die Summe der beiden Linien MN + NM'. Es ist aber Sehne

$$MM' = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2};$$

$$\text{ferner Linie } MN = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

$$\text{dann Linie } M'N = \Delta y - \frac{dy}{dx} \Delta x.$$

Folglich

$$\frac{MM'}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \gamma;$$

$$\frac{MN + NM'}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{dy}{dx}}{\Delta x}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \delta;$$

wo γ und δ solche Größen sind, die mit dem Abnehmen von Δx immer kleiner werden. Man kann daher setzen

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \varepsilon,$$

wo ε eine Größe bedeutet, deren absoluter Werth zwischen denjenigen von γ und δ liegt. Hieraus folgt, wenn man zu den Grenzen übergeht;

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\text{und} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

d. h. das Differential des Bogens ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Differentiale von den beiden Veränderlichen.

Im vorliegenden Falle hat der feste Punkt B der Curve, von welchem aus der Bogen s gezählt wird, eine solche Lage, daß s gleichzeitig mit x wächst. Findet dies nicht, sondern das Gegentheil statt, so muß man dem Differential das Zeichen — beilegen und setzen:

$$ds = -dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Erwägen wir, daß für den Winkel τ, welchen die Berührungsgerade mit der Abscissenachse bildet, die Relation $\tang \tau = \frac{dy}{dx}$ besteht; so haben wir nunmehr die weiteren Relationen:

$$\cos\tau = \pm\frac{dx}{ds};\quad \sin\tau = \pm\frac{dy}{ds};$$

$$\sec\tau = \pm\frac{ds}{dx};\ \text{cosec}\,\tau = \pm\frac{ds}{dy}.$$

Die unter den Namen Tangentenstück und Normalenstück verstandenen Längen T und N können so auch unter der Form:

$$T = \pm y\,\frac{ds}{dy}\ \text{und}\ N = \pm y\,\frac{ds}{dx}$$

dargestellt werden.

Für die Neil'sche Parabel (Fig. 38) deren Gleichung ist: $y^2 = ax^3$, hat man

$$s = \int dx \sqrt{1 + \frac{9}{4}ax};$$

oder

$$s = \frac{8}{27a}\left(1 + \frac{9}{4}ax\right)^{3/2} + C.$$

Da, wenn der Bogen mit A beginnt, für $x = 0$ auch $s = 0$ wird, so ist

$$C = -\frac{8}{27a};$$

folglich

$$s = \frac{8}{27a}\left\{\left(1 + \frac{9}{4}ax\right)^{3/2} - 1\right\}.$$

Für die Kettenlinie (Fig. 4) deren Gleichung ist

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{\frac{-x}{m}}\right),$$

haben wir

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{\frac{-x}{m}}\right)dx$$

oder

$$s = \frac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{\frac{-x}{m}}\right) = m\,\frac{dy}{dx};$$

wo die Constante wegbleibt, wenn die Bogen im Scheitel ihren Anfang nehmen. Hieraus ergibt sich für die Länge eines Bogens BM der Curve folgende einfache Construction. Man ziehe die Tangente für den Endpunkt M des Bogens und fälle von B aus BD senkrecht auf jene Tangente; AD ist dann gleich dem Bogen BM.

§. 179. **Gebrauch der Polarcoordinaten.** Um den Ausdruck für das Differential des Bogens in Polarcoordinaten zu erhalten, hat man nur nöthig in der Formel

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

statt $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die Werthe $\frac{dr}{dt} \cos t - r \sin t$ und $\frac{dr}{dt} \sin t + r \cos t$ zu substituiren. Führt man diese Substitution aus, so erhält man nach gehöriger Reduction für das Differential des Bogens in Polarcoordinaten folgenden Ausdruck:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2} \text{ oder } ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, dt^2}.$$

Um die letzte Formel auf directem Wege mittelst der Grenzmethode abzuleiten, verfahren wir folgendermaßen. Wenn der Radiusvector (Fig. 39) aus der Lage AM in die Lage AM′ übergeht, nehmen die Veränderlichen r, t bezüglich um Δr, Δt und der Bogen BM = s um das Stück MM′ = Δs zu. Dieses Stück liegt zwischen der Sehne MM′ und der dasselbe umschließenden gebrochenen Linie MTM′, wo MT die in M an die Curve gelegte Tangente, und T der Durchschnittspunkt dieser Tangente mit dem Leitstrahl AM′ ist. Nun ist

$$MM' = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PM'}^2},$$

also

$$\frac{MM'}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sqrt{(r \sin \Delta t)^2 + (r + \Delta r - r \cos \Delta t)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 \left(\frac{\sin \Delta t}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\left\{\frac{\sin \frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}\right\}^2 \Delta t + \frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} + \alpha,$$

wo α eine Größe bezeichnet, deren Grenzwerth Null ist. Weiter ist

$$MT + TM' = MT + AP + PT - AM'.$$

Aber

$$MT = \frac{MP}{\sin(m - \Delta t)} = r \operatorname{tg} \Delta t \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{r\,dt}\right)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \Delta t}{\Delta t} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \cdot \Delta t.$$

Die drei übrigen Linien machen zusammen

$$-(r + \Delta r) + r \cos \Delta t + r \sin \Delta t \cdot \left(\frac{dr}{rdt} + \varepsilon.\right)$$

$$= -\left\{ r \cdot \sin \frac{\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} \sin \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta r}{\Delta t} - \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} \cdot \left(\frac{dr}{dt} + r\varepsilon\right) \right\} \Delta t,$$

eine kleine Größe zweiter Ordnung aus. Folglich ist

$$\frac{MT + TM'}{\Delta t} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} + \gamma,$$

wo γ mit Δt verschwindet. Mithin

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} + \delta,$$

wo δ mit Δt ebenfalls verschwindet. Hieraus entspringt, wenn zu den Grenzen übergegangen wird:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

Für die logarithmische Spirale (Fig. 12), deren Gleichung

$$r = e^{\frac{t}{m}}$$

ist, erhalten wir

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{m} e^{\frac{t}{m}};$$

also

$$s = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} \int e^{\frac{t}{m}} dt + C = \sqrt{1 + m^2} \cdot e^{\frac{t}{m}} + C$$

$$= \sqrt{1 + m^2} \cdot r + C.$$

Soll das Integral für $r = 0$ verschwinden, so ist

$$s = \sqrt{1 + m^2} \cdot r.$$

Hieraus folgt, daß der Bogen s der logarithmischen Spirale, ohnerachtet dieselbe nach unendlich vielen Windungen erst den Pol erreicht, eine endliche Größe $\sqrt{1+m^2} \cdot r$ ist, nämlich gleich der von der Polarsubtangente begrenzten Tangente MT des Punktes M.

Aus der Gleichung der Kreisevolvente (Fig. 14) erhalten wir

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{ra};$$

folglich

$$s = \int \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a\,r}\, dr = \int \frac{r}{a}\, dr = \frac{r^2}{2a} + C.$$

Soll der Bogen im Punkte A anfangen, mithin das Integral für $r = a$ verschwinden; so muß $C = -\frac{1}{2}a$ gesetzt werden. Hiernach ergibt sich

$$s = \frac{r^2 - a^2}{2a}.$$

Daraus entspringt folgende einfache Construction der Bogenlänge. Man ziehe von dem Endpunkte M des Bogens AM die Tangente MD an den Grundkreis, ferner DO und errichte auf OM in M die Senkrechte MQ, welche die verlängerte OD in Q trifft; halbire dann DQ in H, wodurch DH = HQ = Bogen AM wird. Denn es ist

$$QD = \frac{DM^2}{DO} = \frac{r^2 - a^2}{a};$$

folglich

$$DH = HQ = \frac{r^2 - a^2}{2a} = s.$$

Auf die Bestimmung der Bogenlänge und der von Curven begrenzten Flächenräume werden wir später mit größerer Ausführlichkeit zurückkommen.

III. Weitere Untersuchungen über ebene Curven.

1. Krümmung ebener Curven.

§. 180. **Maß der Krümmung.** Es sei $CM = \varrho$ (Fig. 40) der Radius eines Kreises, welcher die Gerade MT in dem Punkte M

berührt. Indem man den Radius ϱ fortwährend wachsen läßt, wird das in der Gegend des Berührungspunktes liegende Bogenstück mehr und mehr gedachter Geraden sich nähern, mit welcher er merklich zusammenfallen wird, wenn das Verhältniß $\frac{1}{\varrho}$ sehr wenig von Null abweicht. Dagegen wird jener Bogen sich desto stärker krümmen, je größer dieses Verhältniß ist. Es ist also natürlich das Verhältniß $\frac{1}{\varrho}$ als das Maß der Krümmung des Kreises von dem Halbmesser ϱ anzusehen.

Es seien ferner x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Kreisperipherie; s der zwischen einem festen Punkte B und diesem Punkt M liegende Bogen; und τ der Winkel zwischen der Abscissenachse und der Tangente der Peripherie in dem nämlichen Punkte. Die Größen s und τ ändern sich um Δs und $\Delta\tau$, wenn x um Δx zunimmt. Die Aenderung $\Delta\tau$ ist gleich

$$T'S'X - TSX = T'UT = MCM';$$

d. h. sie fällt mit dem Winkel zusammen zwischen den Tangenten oder den Normalen an den beiden Punkten der Peripherie, welche zu den Abscissen x und x + Δx gehören. Es ist aber $\Delta s = \varrho \cdot \Delta\tau$; mithin ergibt sich für die Krümmung des Kreises der Ausdrück:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\Delta\tau}{\Delta s}.$$

Sind nunmehr x, y; $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Coordinaten zweier auf einer beliebigen Curve MM′ gelegenen Punkte, so ändert sich das Verhältniß $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ nicht blos mit der Lage des Punktes M, sondern auch mit der Länge des Bogens Δs. Dieses Verhältniß convergirt, wenn $\Delta\tau$ und Δs gleichzeitig immer kleiner und kleiner werden, unter der Voraussetzung daß keine Stetigkeitsunterbrechung eintritt, gegen eine bestimmte Grenze:

$$\frac{d\tau}{ds},$$

welche als Maß der Krümmung der Curve im Punkte M zu betrachten ist. Wenn aber der Bogen Δs unendlich klein wird, so hat der Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Durchschnitt C der durch die zwei Punkte (x, y) ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$) gelegten Normalen zusammenfällt und dessen Radius der Entfernung R des Punktes (x, y) von gedachtem Durch-

schnitte gleichkommt, die nämliche Krümmung wie die Curve. Denn ist ϱ die Grenze, welcher R sich auf's Unbestimmte nähert, so liefert das aus jenen beiden Normalen und der dem Bogen Δs angehörigen Sehne gebildete Dreieck die Relation:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}{R} = \frac{\sin \Delta\tau}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

wo ε eine unendlich kleine Größe darstellt. Daraus entspringt bei dem Uebergange zu den Grenzen die Formel:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{d\tau}{ds},$$

wo ϱ den Halbmesser eines Kreises bedeutet, dessen Krümmung $\frac{d\tau}{ds}$ ist. Dieser von dem Punkte (x, y) aus auf die Richtung der Normale aufgetragene Radius wird der Krümmungshalbmesser der Curve genannt, weil er das Maß der Krümmung abgibt, welche die Curve in dem zur Betrachtung gezogenen Punkte besitzt. — Der Endpunkt des so aufgetragenen Radius heißt der Krümmungsmittelpunkt, welcher sonach als der Durchschnittspunkt zweier unendlich nahe liegenden Normalen betrachtet werden kann. Der Kreis, welcher diesen Punkt zum Mittelpunkt und den Krümmungshalbmesser zum Radius hat, heißt der Krümmungskreis oder Osculationskreis.

Nimmt man x zur unabhängigen Veränderlichen an, so geht die Relation $ds = \varrho\, d\tau$ über in

$$dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \varrho \cdot d \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \varrho \cdot \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\, dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

woraus folgt

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Aus der so bestimmten Länge des Krümmungshalbmessers ergibt sich nun von selbst die Lage des Mittelpunkts des Krümmungskreises, weil wie eben bemerkt, der Krümmungshalbmesser in die Richtung der Normale fällt und zwar nach derjenigen Seite hin, gegen welche die Curve ihre Concavität hinwendet. Der Krümmungshalbmesser wird unendlich, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ Null ist; der Krümmungskreis fällt alsdann mit der Berührungsgeraden zusammen. Dieser Fall tritt für sämmtliche Beugungspunkte ein, wenn in der Nähe derselben die Functionen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ continuirlich bleiben. Dagegen verschwindet der Krümmungshalbmesser oder die Krümmung ist unendlich, wenn für einen gewissen Punkt $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich wird, ohne daß die Berührungsgerade auf der Abscissenachse senkrecht steht.

Der Winkel $d\tau$ zwischen den beiden Tangenten oder Normalen, welche den Endpunkten des unendlich kleinen Bogens einer Curve entsprechen, wird der Contigenzwinkel genannt. Der Krümmungshalbmesser ist daher gleich dem Differential des Bogens dividirt durch den Contigenzwinkel.

§. 181. **Andere Formen für den Werth des Krümmungshalbmessers.** Ist die Gleichung der Curve von der Form

$$F(x, y) = 0,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}},$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^3}.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck von ϱ, so kommt:

$$\varrho = \frac{\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}.$$

Betrachtet man die beiden Coordinaten x und y gleichmäßig als Functionen einer dritten Veränderlichen, so ist

$$d\tau = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2}$$

und

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

mithin

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Man kann diesem Resultat eine andere Form geben, wenn man erwägt daß

$$(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2 = ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2] - (dx d^2x + dy\, d^2y)^2$$
$$= ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2].$$

Man erhält alsdann

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Sieht man den Bogen s als unabhängige Veränderliche, mithin sein Differential ds als constant an; so hat man

$$dx\, d^2x + dy\, d^2y = 0$$

und

$$\frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{ds^2} = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + d^2y)^2}}{ds};$$

folglich

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}}.$$

§. 182. **Krümmungshalbmesser für Polarcoordinaten.** Wenn man Polarcoordinaten anwendet und den Winkel t zur unabhängigen Veränderlichen wählt, hat man $x = r \cos t$ und $y = r \sin t$; woraus

$$dx = dr \cos t - r \sin t\, dt,$$
$$dy = dr \sin t + r \cos t\, dt,$$
$$d^2x = d^2r \cos t - 2\sin t\, dr\, dt - r \cos t\, dt^2,$$
$$d^2y = d^2r \sin t + 2\cos t\, dr\, dt - r \sin t\, dt^2,$$

und $ds^2 = dr^2 + r^2\, dt^2.$

Werden diese Werthe in den allgemeinen Ausdruck des Krümmungshalbmessers

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

substituirt, so bekommt man:

$$\varrho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\,\frac{dr^2}{dt^2} - r\,\frac{d^2r}{dt^2}}.$$

Dieser Ausdruck für den Krümmungshalbmesser reicht hin um die Lage des Mittelpunktes der Krümmung zu bestimmen, weil derselbe, wie wir wissen, auf der Normalen sich befindet nach der Seite hin, nach welcher die Concavität der Curve hingewandt ist.

Statt der Gleichungen

$$x = r \cos t \text{ und } y = r \sin t$$

kann man auch die beiden folgenden

$$x + y\sqrt{-1} = r\, e^{t\sqrt{-1}}$$

und

$$x - y\sqrt{-1} = r\, e^{-t\sqrt{-1}}$$

gebrauchen. Dieselben geben, wenn t als unabhängige Veränderliche angesehen wird:

$$dx + dy\sqrt{-1} = (r' + r\sqrt{-1})\, e^{t\sqrt{-1}}\, dt,$$

$$dx - dy\sqrt{-1} = (r' - r\sqrt{-1})\, e^{-t\sqrt{-1}}\, dt,$$

$$d^2x + d^2y\sqrt{-1} = (r'' - r + 2r'\sqrt{-1})\, e^{t\sqrt{-1}}\, dt,$$

$$d^2x - d^2y\sqrt{-1} = (r'' - r - 2r'\sqrt{-1})\, e^{-t\sqrt{-1}}\, dt.$$

Aus denselben entspringt sofort:

$$dx^2 + dy^2 = (r^2 + r'^2)\, dt^2$$

und

$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = (2r'^2 - rr'' + r^2)\, dt^3;$$

folglich

$$\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2}.$$

Wir können auch den Ausdruck des Krümmungshalbmessers für Polarcoordinaten erhalten, wenn wir von der im §. 165 erwiesenen Formel

$$\cot(\tau - t) = \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}$$

ausgehen. Dieselbe gibt uns einmal

$$\sin^2(\tau - t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)^2}$$

und dann durch Differentiation

$$-\frac{\frac{d\tau}{dt} - 1}{\sin^2(\tau - t)} = -\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1 + 2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2}}{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

Es ist aber

$$\frac{ds}{dt} = r\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

mithin

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}}.$$

§. 183. Bestimmung der Krümmungshalbmesser für verschiedene Curven.

1) Für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist, findet man

$$\varrho = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = p\left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Für $x = 0$ wird $\varrho = p$, d. h. im Scheitel der Parabel ist der Krümmungshalbmesser dem Parameter gleich.

2) Für die Ellipse, welche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zur Gleichung hat, erhält man

$$\varrho = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab};$$

so daß der Krümmungshalbmesser am Endpunkte der Achse $2a$ gleich $\frac{b^2}{a}$ und jener am Endpunkte der Achse $2b$ gleich $\frac{a^2}{b}$ ist.

3) Für die Cycloide wurde bereits gefunden

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2};$$

daraus ergibt sich

$$\varrho = 2\sqrt{2ay},$$

d. h. der Krümmungshalbmesser beträgt das Doppelte der Normale.

4) Für die Kettenlinie

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

finden wir

$$\varrho = m\left(\frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{m}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist also der Normalen gleich aber entgegengesetzt.

5) Für die Lemniscate, deren Polargleichung $r^2 = a^2 \cos 2t$ ist, erhalten wir

$$\varrho = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2t}} = \frac{a^2}{3r}.$$

6) Für die Cylinderfocale (Fig. 19), deren Polargleichung ist

$$r = \frac{\cos 2t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} - 2\sin t,$$

haben wir

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{\cos t}{\sin^2 t} - 2 \cos t$$

und

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{\sin t} + 2 \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t} + 2 \sin t.$$

Setzt man diese Ausdrücke in den Werth des Krümmungshalbmessers, so bekommt man

$$\varrho = \frac{(1 + 4 \cos^2 t \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}{4 \sin^2 t\,(1 + 2 \cos^2 t)}.$$

Für $t = 45^0$, 90^0 und 0^0 wird der Krümmungshalbmesser beziehungsweise gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $^1/_4$ und ∞.

7) Für die archimedische Spirale $r = at$ finden wir

$$\varrho = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2} = a \frac{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + t^2}.$$

8) Für die logarithmische Spirale

$$r = e^{\frac{t}{m}}$$

erhalten wir

$$\varrho = r \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

§. 184. **Krümmungskreis.** Es sei

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$$

die Gleichung des Krümmungskreises, in welcher α und β die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes bezeichnen. Faßt man diesen Kreis als einen solchen auf, der im Punkte (x, y) der Curve $y = f(x)$ in der unmittelbaren Nähe gedachten Punktes sich weniger entfernt als jeder andere Berührungskreis; so haben wir in Folge einer derartigen Auffassung außer der vorstehenden Gleichung noch folgende zwei durch Differentiirung daraus hergeleitete Gleichungen:

$$x - \alpha + (y - \beta) \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

in denen die darin erscheinenden Coordinaten und ihre Differentiale in Bezug auf den Punkt (x, y) der Curve und des Kreises als gleichbedeutend anzusehen sind. Wir erhalten aus denselben:

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

$$\beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

Hiernach ist der Krümmungskreis sowohl der Größe als Lage nach völlig bestimmt.

Werden die beiden Coordinaten x und y als Functionen von irgend einer dritten Veränderlichen angesehen, so haben wir die drei Gleichungen:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2,$$
$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + (x-\alpha)\,d^2x + (y-\beta)\,d^2y = 0.$$

Aus denselben erhalten wir:

$$\alpha = x - \frac{(dx^2+dy^2)\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = x - \frac{ds^2\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x};$$

$$\beta = y + \frac{(dx^2+dy^2)\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = y + \frac{ds^2\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x};$$

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Wenn man beachtet daß

$$(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = ds^2\left[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2\right],$$

ferner daß

$$-dy\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = ds\,(ds\,d^2x - dx\,d^2s) = ds^3\cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

und $dx\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = ds\,(ds\,d^2y - dy\,d^2s) = ds^3 \cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right)$; so nehmen jene Gleichungen folgende Form an:

$$= x + \frac{ds^3 \cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}$$

$$\beta = y + \frac{ds^3 \cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2},$$

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Wird der Bogen s als unabhängige Veränderliche betrachtet, so erhält man:

$$\alpha = x + \frac{ds^2\ d^2x}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2},$$

$$\beta = y + \frac{ds^2\ d^2y}{(dx^2)' + (d^2y)^2},$$

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}}.$$

Die Auffassung, in Folge deren der Krümmungskreis drei unmittelbar aneinander liegende Punkte mit der Curve gemeinsam hat, führt uns zu nachstehenden Betrachtungen. Es sei ϱ der Halbmesser des durch drei den Coordinaten t, $t + dt$, $t + 2dt$; r, $r + dr$; $r + 2dr + d^2r$ entsprechenden Punkten einer Curve zu legenden Kreises. Vom Mittelpunkte (Fig. 41) desselben fälle man eine Senkrechte Cn auf die Sehne M′M″, wodurch der halbe Centriwinkel nCM″ dem Peripheriewinkel M′MM″ gleich wird. Ist nun auch M″m auf der verlängerten Sehne MM′ senkrecht, so sind die Dreiecke nCM″ und mMM″ ähnlich, dergestalt daß für $M''C = \varrho$, $MM' = S$, $M'M'' = Q$, $MM'' = R$, $M''m = h$ entsteht:

$$\frac{\varrho}{\frac{1}{2}Q} = \frac{R}{h} \text{ oder } \varrho = \frac{1}{2}\,\frac{QRS}{hS}.$$

Der Ausdruck hS im Nenner stellt nun das Doppelte der Dreiecksfläche MM′M″ dar, welche auch gleich Dr. AMM″ — Dr. AMM′ — Dr. AM′M″ ist. Mithin ist

$$hS = r\,(r + 2dr + d^2r)\sin 2dt - r\,(r + dr)\sin dt,$$
$$- (r + dr)\,(r + 2dr) + d^2r)\sin dt.$$

Setzt man hier

$$\sin dt = dt - \frac{dt^3}{6} + \alpha\, dt^4,$$

$$\sin 2dt = dt - 8\,\frac{dt^3}{6} + \beta\, dt^4,$$

wo α und β gleichzeitig mit dt verschwinden; so kommt

$$hS = (r\frac{d^2r}{dt^2} - r^2 - 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \delta)\, dt^3,$$

wo δ mit dt gleichfalls verschwindet. — Was das Produkt der drei Seiten QRS anlangt, so wird mit abnehmendem dt die Größe Q gleich S und R immer mehr gleich Q + S, dagegen $S = ds + \lambda dt$ wo λ mit dt wieder verschwindet. Folglich

$$QRS = (ds + \mu dt)\,(2ds + \nu dt)\,(ds + \lambda dt)$$
$$= 2ds^3 + \varepsilon dt,$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \varepsilon$ unendlich kleine Größen sind.

Also ist endlich

$$\varrho = \lim \frac{ds^3 + \varepsilon dt^3}{(r\frac{d^2r}{dt^2} - r^2 - 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \delta)\, dt^3},$$

d. h.

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{r\frac{d^2r}{dt^2} - r^2 - 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2},$$

oder

$$\varrho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r\frac{d^2r}{dt^2} - r^2 - 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2},$$

welcher Ausdruck mit dem im §. 182 aufgestellten zusammenfällt, wenn man beachtet, daß die Wurzel

$$\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^3}$$

nach Gefallen mit dem Vorzeichen + oder — genommen werden kann.

Bei dem Gebrauch der Polarcoordinaten pflegt man zuweilen die Lage des Krümmungsmittelpunktes durch diejenige der Normale und des Abstandes ME (Fig 42) festzustellen, der sich zwischen dem Punkte M und dem Fuße des aus dem Krümmungsmittelpunkte C auf den Radiusvector AM gefällten Perpendikels befindet. Es ist dann

$$ME = \varrho \cos M = r \frac{r\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}{r^2 + 2\frac{dr^2}{dt^2} - r\frac{d^2r}{dt^2}},$$

in Erwägung daß

$$\cos M = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}.$$

2. Von den Evoluten.

§. 185. **Curve der Krümmungsmittelpunkte.** Geht man von Punkt zu Punkt der gegebenen Curve $y = f(x)$ über, so wird die Lage des Mittelpunkts der Krümmung fortwährend eine andere. Die Aufeinanderfolge dieser Lagen bildet eine Curve, deren Coordinaten α und β sind und deren Gleichung das Resultat der Elimination von x aus den beiden Gleichungen

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ist. Die Curve, welche sämmtliche Krümmungsmittelpunkte der Curve $y = f(x)$ enthält, hat Huyghens die Evolute der letzteren genannt.

Bei dieser Auffassung sind α, β und ϱ veränderlich und können in den drei nachstehenden Gleichungen

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2,$$

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

als Funktionen von x gelten.

Differentiirt man die zweite dieser Gleichungen und läßt diejenigen Glieder weg, welche vermöge der dritten gleich Null sind; so hat man

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Die letztere Relation zeigt, daß der Krümmungshalbmesser die Evolute beständig berührt.

Differentiirt man ebenso die erste der vorstehenden Gleichungen und läßt die Glieder weg, die in Folge der zweiten gleich Null sind; so erhält man

$$(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta = \varrho\,d\varrho.$$

Substituirt man hierin für $x-\alpha$ und $y-\beta$ ihre Werthe

$$\varrho\frac{dy}{ds} \text{ und } \frac{dx}{ds},$$

welche durch Zusammenstellung der beiden Gleichungen

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2,$$

und

$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0$$

sich ergeben; so findet man

$$d\alpha\frac{dy}{ds} - d\beta\frac{dx}{ds} = d\varrho.$$

Man hat aber weiter, wie oben gefunden wurde,

$$dx\,d\alpha + dy\,d\beta = 0,$$

oder

$$dx\frac{d\alpha}{ds} + dy\frac{d\beta}{ds} = 0.$$

Wenn man beide Theile der zwei letzteren Gleichungen auf's Quadrat erhebt und die Resultate addirt, findet man endlich:

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = d\varrho^2$$

oder

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}}{dx}.$$

Bezeichnet man das Bogenelement der Evolute mit $d\sigma$, so ist also

$$d\varrho = d\sigma, \text{ d. h. } \varrho = \sigma + \text{const.}$$

Wenn man demnach auf der gegebenen Curve $y = f(x)$ von dem Punkte m zu dem Punkte m′ übergeht (Fig. 43), und gleichzeitig vom Punkte μ der Evolute zu dem Punkte μ' derselben; so ist die Bogenlänge zwischen diesen beiden Punkten gleich der Differenz der beiden Krümmungshalbmesser $m\mu$ und $m'\mu'$.

Hieraus schließt man, daß die Curve mm′ durch eine stetige Bewegung des Endpunktes eines auf die Curve $\mu\mu'$ gewickelten vollkommen biegsamen Fadens beschrieben werden kann, wenn derselbe nach und nach von der Curve abgewickelt wird. Aus diesem Grunde hat Huyghens die Curve $\mu\mu'$ die Evolute der Curve mm′ und diese die Evolvente der Curve $\mu\mu'$ genannt. Die Beschreibung der ebenen Curven durch ihre Evoluten hat eine große Aehnlichkeit mit der des Kreises: jeder Punkt der Evolute vertritt nach und nach die Stelle eines Mittelpunktes und der Halbmesser ändert sich von einem Punkte der Curve zum andern.

§. 186. **Fortsetzung.** Wenn die Gleichung der Curve von der Form $F(x, y) = 0$ ist, so hat man

$$\frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dx} = 0,$$

und

$$\frac{dF}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2}\,\frac{dy^2}{dx^2} + 2\,\frac{d^2F}{dx\,dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dx^2} = 0.$$

Zwischen diesen drei Gleichungen und den beiden folgenden

$$(y-\beta)\,\frac{dy}{dx} + x - \alpha = 0,$$

und

$$(y-\beta)\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + 1 = 0$$

hat man die vier Größen

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

zu eliminiren, um die Gleichung der Evolute zu erhalten.

Es sei F (r, t) = 0 die Polargleichung der gegebenen Curve; ferner seien δ, γ die Polarcoordinaten des einem Punkte (x, y) oder (t, r) der Curve zugehörigen Krümmungsmittelpunktes, so daß die Relationen

$$y = r \sin t,\ x = r \cos t$$

und $\beta = \gamma \sin \delta$, $\alpha = \gamma \cos \delta$

bestehen. Nach den im §. 184 aufgestellten Formeln ist

$$\frac{\alpha - x}{-dy} = \frac{\beta - y}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Aus denselben entspringt:

$$\beta y - y^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x} \cdot ydx$$

und

$$\alpha x - x^2 = -\frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x} \cdot xdy;$$

ferner

$$\beta x - xy = \frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}\, xdx$$

und

$$xy - \alpha y = \frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}\, ydy;$$

oder

$$\frac{\alpha x + \beta y - y^2 - x^2}{ydx - xdy} = \frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}$$

und

$$\frac{\beta x - \alpha y}{ydx + xdy} = \frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Substituirt man statt der rechtwinkligen Coordinaten die Polarcoordinaten und erwägt dabei, daß

$$rdr = xdx + ydy,\ r^2 dt = xdy - ydx,\ dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2dt^2$$

und

$$dxd^2y - dyd^2x = (2r'^2 - rr'' + r^2)\, dt^3;$$

so findet man

$$\frac{\gamma \cos(\delta - t) - r}{-r\,dt} = \frac{\gamma \sin(\delta - t)}{r'dt} = \frac{r^2 + r'^2}{(2r'^2 - rr'' + r^2)\, dt};$$

daraus folgt

$$\gamma \sin(\delta - t) = r' \cdot \frac{r^2 + r'^2}{2r'^2 - rr'' + r^2},$$

und

$$\gamma \cos(\delta - t) = r \frac{r'^2 - rr''}{2r'^2 - rr'' + r^2};$$

oder

$$\operatorname{tang}(\delta - t) = \frac{r'}{r} \cdot \frac{r^2 + r'^2}{r'^2 - rr''},$$

und

$$\gamma^2 = \frac{r'^2 (r^2 + r'^2)^2 + r^2 (r'^2 - rr'')^2}{(2r'^2 - rr'' + r^2)^2}.$$

Um die Polargleichung der Evolute zu erhalten, brauchen wir nur noch zwischen den beiden letzteren Gleichungen, der Gleichung $F(r, t) = 0$ und den zwei ersten Differentialgleichungen derselben, die vier Größen r, r', r'' und t zu eliminiren.

Bemerken wollen wir noch, daß die obige Formel

$$1 - \frac{\gamma}{r} \cos(\delta - t) = \frac{\gamma}{r'} \sin(\delta - t) = \frac{r^2 + r'^2}{2r'^2 - rr'' + r^2}$$

auch folgende Form annimmt:

$$1 - \frac{\gamma}{r} \cos(\delta - t) = \frac{\gamma}{r'} \sin(\delta - t) = \frac{\varrho}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

wenn man erwägt, daß

$$\frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{2r' - rr'' + r^2} = \varrho.$$

Aus derselben ergeben sich dann die beiden nachstehenden Gleichungen:

$$\gamma \sin(\delta - t) = \frac{r'\varrho}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \varrho \cos(\lambda - t),$$

und

$$\gamma \cos(\delta - t) - r = \frac{r\varrho}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \varrho \sin(\lambda - t),$$

wenn man beachtet, daß $\operatorname{tang}(\lambda - t) = \frac{r}{r'}$ ist.

§. 187. **Bestimmung der Evoluten einiger Curven.** 1) Für die Parabel $y^2 = 2px$ (Fig. 44) erhalten wir für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes folgende Gleichungen:

$$\alpha = 3x + p \text{ und } \beta = -\frac{2xy}{p},$$

woraus durch Elimination von x und y als Gleichung der Evolute sich ergibt:

$$\beta^2 = \frac{8}{27p} (\alpha - p)^3,$$

oder, wenn man den Ursprung nach dem Punkte J verlegt, dessen Abscisse p ist:

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}\,\alpha^3.$$

Die Evolute ist eine cubische Parabel und besteht aus den beiden Zweigen $J\mu$ und $J\nu$, wovon der erste durch seine Abwickelung den Zweig AM und der andere den Zweig AN der Apollonischen Parabel erzeugt. Bei der Abwickelung des um den einen oder den andern dieser Zweige gelegten Fadens muß derselbe im Punkte J in der Verlängerung der Tangente JX eine dem Krümmungshalbmesser in A, d. h. dem Parameter p der Parabel, gleiche Länge besitzen.

2) Für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Fig. 45) haben wir

$$\alpha = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^4}\right) x^3 = \frac{c^2 x^3}{a^4}$$

und $\beta = -\frac{c^2 y^3}{b^4}$, wenn $a^2 - b^2 = c^2$ gesetzt wird. In den Scheitelpunkten A und A′ der Ellipse wird $\alpha = \pm\frac{c^2}{a}$ und $\beta = 0$; in den Scheitelpunkten B und B′ ist $\alpha = 0$ und $\beta = \pm\frac{c^2}{b}$: die auf solche Weise bestimmten Punkte h, h′, i, i′ geben die Krümmungsmittelpunkte für die Endpunkte der Achsen an.

Die Gleichung der Evolute ergibt sich, wenn wir x und y in α und β ausdrücken und diese Werthe in die ursprüngliche Gleichung der Ellipse substituiren; wir erhalten so

$$\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{2/3} = 1.$$

Diese Curve besteht aus vier gleichen Aesten, welche ihre convexe Seite den beiden Achsen zuwenden, gegen die sie symmetrisch liegen und von denen die Curve berührt wird.

Auf ähnliche Weise finden wir für die Evolute der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung: $\left(\frac{a\alpha}{a^2 + b^2}\right)^{2/3} - \left(\frac{b\beta}{a^2 + b^2}\right)^{2/3} = 1$; die Curve ist ebenfalls aus vier gleichen Zweigen zusammengesetzt, welche in Bezug auf die Achsen der Hyperbel symmetrisch liegen; die Curve wird von der Achse der x berührt.

3) Für die Cycloide $x = a \cdot \text{arc}\left(\cos = \frac{a - y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$ (Fig. 46) erhalten wir

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2},\ \beta = -y.$$

Diese Ausdrücke lehren, daß der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel F der Cycloide sich in L befindet, wo EL = EF. Um die Gleichung der Evolute in ihrer einfachsten Form zu erhalten, setze man

$$\alpha = \pi a - \alpha', \ \beta = -2a + \beta',$$

d. h. man beziehe die Curve auf zwei neue Coordinaten, welche in dem Punkte L ihren Ursprung haben und den ursprünglichen Coordinaten parallel in dem Sinne LE und in dem Sinne LB gerichtet sind. Die obigen Gleichungen verwandeln sich dadurch in:

$$\alpha' = \pi a - x - 2\sqrt{2ay - y^2}, \ \beta' = 2a - y.$$

Mit Rücksicht auf den Ausdruck von

$$x = a \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

erhält man

$$\alpha' = a\left(\pi - \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a-y}{a}\right)\right) - \sqrt{2ay - y^2};$$

oder, wenn y eliminirt wird:

$$\alpha' = a \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a-\beta'}{a}\right) - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

Die Evolute der Cycloide ist daher wieder eine Cycloide, die von dem nämlichen Erzeugungskreise wie die erste gebildet wird, indem sich derselbe auf der Geraden LB in einer der Geraden AE entgegengesetzten Richtung fortwälzt.

Dasselbe Resultat läßt sich auch aus dem Werthe des Krümmungshalbmessers $\varrho = 2\sqrt{2ay}$ herleiten. Der Krümmungsmittelpunkt μ für den Punkt m der Cycloide liegt nämlich in der Verlängerung der Normale, so daß $D\mu = Dm$; d. h. der Bogen $D\mu$ des Kreises, dessen Halbmesser = a und dessen Mittelpunkt in γ ist, ist gleich dem Bogen Dm des Kreises von dem nämlichen Halbmesser, dessen Mittelpunkt in C liegt. Es ist aber der Bogen mD gleich der Geraden AD, mithin der Bogen $B\mu$ gleich der Geraden LB. Die Eigenschaft der Cycloide, sich durch die Abwickelung selbst wieder zu erzeugen, ist von Johann Bernouilli aufgefunden worden.

4) Für die Evolute der logarithmischen Linie $y = me^{x/m}$ haben wir:

$$\alpha = x - m\left(e^{\frac{2x}{m}} + 1\right) \text{ und } \beta = m\left(\frac{2e^{\frac{2x}{m}} + 1}{e^{\frac{x}{m}}}\right).$$

Die zweite dieser Gleichungen liefert

$$e^{\frac{x}{m}} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 8m^2}}{4m};$$

folglich

$$\frac{x}{m} = \log \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 8m^2}}{4m}.$$

Wird dieser Werth in die erste Gleichung eingeführt, so entsteht

$$\alpha = m \log \frac{\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 8m^2)}}{4m} - \frac{\beta^2 + 4m^2 \pm \beta \sqrt{(\beta^2 - 8m^2)}}{8m}$$

als Gleichung der Evolute.

§. 188. **Fortsetzung.** 1) Die Gleichung der Archimedischen Spirale $r = at$ liefert $r' = a$ und $r'' = 0$; wodurch die Relationen für die Polarcoordinaten der Evolute dieser Curve in

$$\tang(\delta - t) = t + \frac{1}{t},$$

und

$$\gamma^2 = a^2 \left(1 - \frac{1}{2 + t^2} - \left(\frac{1}{2 + t^2}\right)^2\right)$$

übergehen. Für $t = 0$ wird $\tang \delta = \frac{1}{0}$ und $\gamma = \frac{a}{2}$; dagegen für $t = \frac{1}{0}$ ist $\tang(\delta - t) = \frac{1}{0}$ und $\gamma = a$.

Hieraus folgt, daß der vom Pol nach dem Krümmungsmittelpunkt geführte Leitstrahl γ beständig wächst, jedoch zwischen den Grenzen $\gamma = a/_2$ und $\gamma = a$ liegt.

Führt man den aus der Gleichung

$$\gamma^2 = a^2 \left(1 - \frac{1}{2 + t^2} - \frac{1}{(2 + t^2)^2}\right)$$

oder aus der ihr gleichgeltenden

$$\frac{1}{2 + t^2} = \frac{-1 + \sqrt{5 - \frac{4\gamma^2}{a^2}}}{2}$$

entlehnten reellen und positiven Werth von t in die Gleichung

$$\tang(\delta - t) = t + \frac{1}{t}$$

ein; so bekommt man für die Polargleichung der Evolute:

$$\tang\left(\delta - \frac{\left\{\sqrt{5 - \frac{4\gamma^2}{a^2}} - 3 + \frac{4\gamma^2}{a^2}\right\}^{1/2}}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right)}}\right) =$$

$$\frac{\frac{2\gamma^2}{a^2} - 1 + \sqrt{5 - \frac{4\gamma^2}{a^2}}}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right)}\left\{\sqrt{5 - \frac{4\gamma^2}{a^2}} - 3 + \frac{4\gamma^2}{a^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

2) Es sei die Evolute der Curve zu finden, deren Gleichung ist $r = e^t + e^{-t}$. Da dießmal die in den allgemeinen Formeln des §. 186 vorkommenden Ausdrücke $r^2 + r'^2$, $r'^2 - rr''$ und $2r'^2 - rr'' + r^2$ sich wie $1 : 1 : 2$ verhalten, so vereinfachen sich genannte Formeln in folgende Ausdrücke:

$$\gamma^2 = \tfrac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t})$$

$$\mathrm{tg}\,(\delta - t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}};$$

mithin ist

$$e^{2t} = \gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - 1},$$

$$e^{-2t} = \gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 - 1}.$$

Um t zu eliminiren, bringe man nun $\mathrm{tg}\,(\delta - t)$ auf die Form $\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$; man hat

$$\mathrm{tg}\,(\delta - t) = \frac{2\sqrt{\gamma^4 - 1}}{2\gamma^2 + 2} = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}},$$

und da ferner

$$t = \frac{1}{2}\, l\,(\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - 1})$$

$$= l\left(\sqrt{\frac{\gamma^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2}}\right)$$

ist, so findet man als gesuchte Gleichung der Evolute

$$\mathrm{tg}\left(\delta - l\left(\sqrt{\frac{\gamma^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2}}\right)\right) = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}},$$

oder

$$\delta = l\left(\sqrt{\frac{\gamma^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2}}\right) + \mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}}\right).$$

Bei Auflösung der obigen quadratischen Gleichung in e^{2t} hätte man ebenso setzen können $e^{2t} = \gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 - 1}$, $e^{-2t} = \gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - 1}$. Man findet leicht, daß diese zweite Annahme über die Zeichen eintreten muß, sobald t negativ wird, und daß, wenn die Rechnung mit den entgegengesetzten Zeichen geführt wird, δ sich negativ herausstellt.

3) Die logarithmische Spirale $r = e^{\frac{t}{m}}$ gibt $r' = \frac{r}{m}$ und $r'' = \frac{r}{m^2}$.

Die für die Polarcoordinaten der Evolute aufgestellten Formeln werden hiernach:

$$\gamma \sin(\delta - t) = \frac{r}{m},$$

und $$\gamma \cos(\delta - t) = 0;$$

folglich $$\delta = t + \frac{\pi}{2} \text{ und } \gamma = \frac{r}{m}.$$

Die Leitstrahlen r und γ der logarithmischen Spirale und ihrer Evolute stehen demnach senkrecht auf einander. Eliminiren wir r und t zwischen den drei Gleichungen

$$r = e^{\frac{t}{m}},\ \delta = t + \frac{\pi}{2} \text{ und } \gamma = \frac{r}{m};$$

so erhalten wir

$$\gamma = \frac{1}{m} e^{\frac{1}{m}(\delta - \pi/_2)} = e^{\frac{1}{m}(\delta - \pi/_2 - mlm)}$$

als Polargleichung der Evolute. Setzt man darin $\delta = t + \frac{\pi}{2} + mlm$, so hat man $\gamma = e^{\frac{t}{m}}$, woraus hervorgeht, daß die Evolute der logarithmischen Spirale die nämliche Curve ist, welche um den Pol eine Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2} + mlm$ erlitten hat. Diese Eigenschaft gibt sich auch schon dadurch zu erkennen, daß die Tangente der Evolute, welche mit dem Krümmungshalbmesser der Evolvente zusammenfällt, mit ihrem Radiusvector einen constanten Winkel bildet.

4) Die Polargleichung der Kardioide (Fig. 17) ist

$$r^2 = a(1 + \cos t);\ \text{wo } a = AX,$$

hieraus $r^2 + r'^2 = 2a(1 + \cos t)$, $r'^2 - rr'' = a(1 + \cos t)$.

Mit Hilfe der allgemeinen Formeln

$$\gamma \sin(\delta - t) = r' \frac{r^2 + r'^2}{2r'^2 - rr'' + r^2},$$

$$\gamma \cos(\delta - t) = r\left(1 - \frac{r^2 + r'^2}{2r'^2 - rr'' + r^2}\right)$$

erhält man hieraus, wenn man $\gamma \sin \delta = y_1$, $\gamma \cos \delta = x_1$ setzt

$$\operatorname{tg} t = \frac{y_1}{x_1 - \frac{2}{3}a},$$

$$x_1 - \frac{2a}{3} + y_1 \operatorname{tg} t + \frac{a}{3} = \frac{a}{3 \cos t}.$$

Durch Elimination von t ergibt sich also

$$\left(x_1 - \frac{2a}{3}\right)^2 + y_1^2 + \frac{a}{3}\left(x_1 - \frac{2a}{3}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\left[\left(x_1 - \frac{2a}{3}\right)^2 + y_1^2\right]}.$$

Setzt man nun wieder $y_1 = \varrho \sin \varphi$; $x_1 - \dfrac{2a}{3} = -\varrho \cos \varphi$, was darauf hinausläuft, den Ursprung A um eine Entfernung $\dfrac{2}{3}$ a zur Rechten nach C zu verlegen und zugleich den Sinn der positiven Polaraxe gerade umzukehren, so erhält man, nachdem gehörig reducirt worden: $\varrho = \dfrac{a}{3} (1 + \cos \varphi)$ als Polargleichung der Evolute, welche demnach selbst eine Kardioide, aber nur den dritten Theil so groß als die ursprüngliche und von entgegengesetzter Lage ist. Da die Kardioide aus der Epicycloide entsteht, wenn der ruhende Kreis, dessen Durchmesser = a, dem rollenden gleich wird; so ist also auch die Evolute eine Epicycloide, deren ruhender Kreis, concentrisch mit dem ruhenden der ursprünglichen Curve, einen Durchmesser $= \dfrac{a}{3}$ hat.

3. Von den Brennlinien durch Zurückwerfung.

§. 189. **Entstehung dieser Linien.** Wenn von einem leuchtenden Punkt S aus eine unendliche Menge von Lichtstrahlen auf eine spiegelnde Curve fallen, so werden sie bekanntlich dergestalt reflectirt, daß der einfallende und zurückgeworfene Strahl mit der Normalen gleiche Winkel bilden. Die so zurückgeworfenen Strahlen werden sich nach einem Gesetz zerstreuen, welches von der Beschaffenheit der reflectirenden Curve abhängt, indem die Neigung eines jeden zurückgeworfenen Strahles gegen die Normale sich nach dem Punkt ändert, bei welchem die Reflection stattfindet. Es wird daher ein jeder reflectirter Strahl den unmittelbar folgenden schneiden, so daß in dem Durchschnittspuncte, weil mehr Licht in denselben trifft als in die Umgebung, eine erhöhte Lichtintensität stattfindet; der geometrische Ort dieser Durchschnittspunkte bildet so eine hellere Curve, an welcher die zurückgeworfenen Strahlen die Berührungslinien abgeben. Diese wird die Brennlinie durch Zurückwerfung oder Katakaustik genannt. Eine einfache und allgemeine Methode, die Katakaustik für eine beliebige Curve zu construiren, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Es sei AMB (Fig. 47) die reflectirende Curve, S der leuchtende Punkt,

SM der einfallende Strahl, MF der entsprechende zurückgeworfene Strahl und F der Punkt der Katakaustik. Nachdem der dem Punkt M zugehörige Krümmungshalbmesser MC bestimmt worden, beschreibe man aus S und F als Mittelpunkten die kleinen Bögen MR und MT, und ziehe die Senkrechten CE, CE′, CG und CG′ auf die einfallenden und reflectirten Strahlen. Die als geradlinig angesehenen rechtwinkligen Dreiecke MTM′ und MM′R sind einander gleich, weil Winkel TM′M = BM′F = RM′M und die Hypothenuse MM′ jenen beiden Dreiecken gemeinsam ist, mithin sind die kleinen Seiten MT und MR einander gleich. Wegen der Gleichheit der Einfallswinkel und Zurückwerfungswinkel ist EC = CG und E′C = CG′, somit EC — E′C = CG — CG′ oder EQ = PG. Die ähnlichen Dreiecke SMR und SEQ geben die Proportion: SM : SE = MR : EQ oder

$$SM + SE : SM = MR + EQ : MR;$$

ebenso geben die ähnlichen Dreiecke FMT und FPG die Proportion: MF : FG = MT : PG oder MF + FG : MF = MT + PG : MT,

aber $MT = MR$ und $MT + PG = MR + EQ;$

folglich $SM + SE : SM = MF + FG : MF,$

oder $2SM - ME : SM = MG : MF.$

Daraus entspringt, wenn SM durch r, ME = MG durch a, und MF durch z dargestellt wird: $z = \frac{ar}{2r - a}$ als Ausdruck des Theils des reflectirten Strahls von dem Reflexionspunkt M bis zum entsprechenden Punkt F der Katakaustik.

Um also für einen einfallenden Strahl SM den zugehörigen Punkt F der Katakaustik zu erhalten, bestimme man zuvörderst den dem Punkte M entsprechenden Krümmungshalbmesser MC, fälle dann vom Krümmungsmittelpunkte C aus die Senkrechten CE und CG auf den einfallenden und zurückgeworfenen Strahl, trage hierauf von M nach L auf dem Strahl MS die doppelte Länge desselben r vermindert um die Projection a des Krümmungshalbmessers auf gedachten Strahl, und verbinde endlich den Punkt L mit G durch eine Gerade. Der Durchschnittspunkt F der durch den Punkt S zu der letzteren Linie parallel gezogenen Geraden SF mit dem reflectirten Strahl MG wird den verlangten Punkt geben; denn der Construction zufolge ist $MF : MG = MS : ML,$

oder $MF : a = r : 2r - a$, woraus $MF = \frac{ra}{2r - a}$, wie es sein muß.

Ist $r = \frac{1}{0}$, wo dann die einfallenden Strahlen parallel zu einander sind, so wird $z = \frac{1}{2}a$. Wenn MF = 0 ist, so hat die Curve mit ihrer Katakaustik einen Punkt gemeinsam. Der reflectirte Strahl fällt mit dem einfal-

lenden zusammen und die Curve besitzt mit der Katakaustik einerlei Tangente, wenn $a = 0$. Für $MC = \frac{1}{0}$ hat man $z = -r$, weil dann a ebenfalls unendlich ist; in diesem Falle reducirt sich die Katakaustik auf einen Punkt, und die reflectirten Strahlen scheinen von einem Punkte auszugehen, welcher auf einer den einfallenden Strahlen entgegengesetzten Seite liegt.

Als erstes Beispiel soll die logarithmische Spirale (Fig. 12) dienen, deren Katakaustik zu bestimmen ist, wenn die einfallenden Strahlen sämmtlich von dem Pole A ausgehen. Das von dem Krümmungsmittelpunkt C auf den Leitstrahl AM gefällte Perpendikel geht durch den Punkt A, mithin $r = a$ und $z = r$. Das Dreieck AMF ist daher gleichschenkelig und es ist wegen der Gleichheit der Winkel AMC und FMC der Winkel AFM gleich dem Winkel AMT, d. h. die Tangente der Katakaustik macht mit ihrem Radiusvector einen constanten Winkel; woraus hervorgeht, daß die Katakaustik wieder eine logarithmische Spirale ist.

Als zweites Beispiel diene der Kreis MN (Fig. 48) unter der Voraussetzung, daß die Strahlen parallel mit der Abscissenaxe einfallen. Hier ist A der Krümmungsmittelpunkt, a für $r = -\infty$ die halbe Sehne MN, also $z = MF = \frac{1}{4} MN$. Es liegt also F auf einem Kreise C, dessen Durchmesser der vierte Theil des Durchmessers des ursprünglichen Kreises MN ist. Dieser Kreis MFB berührt also in B einen andern mit A concentrischen Kreis, welcher aber halbsogroß als der ursprüngliche Kreis MN ist. Da nun Winkel BCF $=$ 2 · Winkel FMC $=$ 2 · Winkel SMC $=$ 2 · Winkel BAX ist, so ist Bogen FB $=$ Bogen XB, indem der Centriwinkel des einen Bogens doppelt so groß, sein Halbmesser aber nur halbsogroß als derjenige des andern ist. Es kann also F dadurch entstanden gedacht werden, daß man den Kreis C, welcher Anfangs mit dem Punkte F den Kreis BX in X berührte, um den Bogen BX $=$ BF auf letzterem Kreise fortwälzt. Die Katakaustik gehört also zu dem Geschlechte der Epicycloiden, und zwar für den Fall, daß der sich wälzende Kreis halbsogroß als der ruhende ist.

§. 190. **Gleichung der Katakaustik.** Um die Gleichung der Katakaustik einer spiegelnden Curve CMB (Fig. 49) zu erhalten, legen wir zu Grunde ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, auf dessen Abscissenachse der leuchtende Punkt S sich befindet. Es sei SM ein einfallender Strahl, welcher durch Reflexion die Richtung MH bekommt, so daß Winkel SME $=$ Winkel EMH, wo EMT die Tangente der

Curve im Punkte M ist. Die Lage des reflectirten Strahles MF ist bekannt, wenn der Reflexionspunkt M und der Winkel MHP gegeben ist, unter welchem der verlängerte Strahl die Abscissenachse AX schneidet. Um diesen Winkel φ zu bestimmen, ziehe man MP senkrecht auf AX, setze AP $= x$ und MP $= y$ und nenne die Abscisse SA des leuchtenden Punktes a. Man hat Winkel $\varphi = 90^0 -$ HMP, aber

$$\text{HMP} = \text{PME} - \text{EMH} = 90^0 - 2\,\text{MEP} + \text{MSE},$$

mithin

$$\varphi = 2\,\text{MEP} - \text{MSE},$$

oder $\varphi = 2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{dy}{dx}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x-a}\right).$

Hieraus entspringt folgende Relation:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2(x-a)\,y' - y(1-y'^2)}{(1-y'^2)(x-a) + 2yy'}.$$

Dies vorausgeschickt wird die Gleichung des zurückgeworfenen Strahls, welcher durch den Punkt (x, y) der Curve geht, nothwendigerweise von der Form $Y - y = \operatorname{tang} \varphi \,.\, (X - x)$ sein. Für den unmittelbar folgenden reflectirten Strahl hat man:

$$Y - (y + dy) = (\operatorname{tang} \varphi + d.\operatorname{tang} \varphi)\,(X - x - dx).$$

Wird von der letzteren die erste Gleichung abgezogen, so bekommt man:

$$-\,dy = (X - x)\; d\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varphi \cdot dx.$$

Aus dieser und der ersteren Gleichung ergibt sich:

$$X = x + \frac{\operatorname{tang} \varphi - y'}{d \cdot \operatorname{tang} \varphi}\, dx,$$

$$Y = y + \operatorname{tang} \varphi \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi - y'}{d \cdot \operatorname{tang} \varphi}\, dx,$$

wo der Werth tang φ durch die oben aufgestellte Relation gegeben ist. Um die zwischen X und Y bestehende Gleichung der Katakaustik zu erhalten, müssen wir also die in den zwei letzteren Gleichungen angezeigten Differentiationen ausführen und dann vermittelst dieser Gleichungen und der Gleichung der vorgelegten spiegelnden Curve die Coordinaten x und y eliminiren.

Sind die einfallenden Strahlen parallel, so haben wir

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2y'}{1 - y'^2},$$

woraus

$$d \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi}{dx} = \frac{2y''\,(1 + y'^2)}{(1 - y'^2)^2},$$

und

$$\operatorname{tang} \varphi - y' = \frac{y'\,(1 + y'^2)}{1 - y'^2}.$$

Führen wir diese Substitutionen aus, so erhalten wir folgende Werthe für die Coordinaten der Brennlinie:

$$X = x + \frac{y'}{2y''}(1 - y'^2),$$

$$Y = y + \frac{y'^2}{y''}.$$

Um diese Theorie durch ein Paar Beispiele zu erläutern, wollen wir die Brennlinie bestimmen, wenn die reflectirende Curve eine Cycloide ist, die einfallenden Strahlen parallel zu einander sind und senkrecht auf der Linie stehen, auf welcher der Erzeugungskreis hinrollt. Wird der Halbmesser des rollenden Kreises $= 1$ gesetzt, und mit t der Winkel bezeichnet, welcher zwischen dem drehbaren Halbmesser und dem zur Achse der y rechtwinklig stehenden Halbmesser dieses Kreises enthalten ist; so hat man

$$y = t - \sin t \text{ und } x = 1 - \cos t.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}; \text{ woraus } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(2-x)\sqrt{2x - x^2}}$$

und $\frac{y'}{y''} = 2x - x^2$. Mittelst dieser Relationen gehen die allgemeinen Ausdrücke

$$X = x + \frac{1 - y'^2}{2} \cdot \frac{y'}{y''} \text{ und } Y = y + \frac{y'^2}{y''}$$

$$\text{in } X = 2x - x^2 \text{ und } Y = y + x\sqrt{2x - x^2}$$

über. Aus den beiden letzteren Ausdrücken entsteht durch Differentiation

$$\frac{dX}{dx} = 2(1 - x) = 2\sqrt{1 - X},$$

und

$$\frac{dY}{dx} = y' + \sqrt{\frac{x}{2-x}}(3 - 2x) = 2\sqrt{2x - x^2} = 2\sqrt{X}.$$

Es ist aber nach §. 25

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y'}{X'} = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$$

folglich

$$\frac{dY}{dX} = \sqrt{\frac{X}{1-X}};$$

aus welcher Relation hervorgeht, daß die Brennlinie selbst eine Cycloide ist, welche die Größe $\frac{1}{2}$ zum Halbmesser des Erzeugungskreises hat.

Ein anderes Beispiel soll die logarithmische Linie liefern, deren Gleichung $y = e^x$ (Fig. 3). Da hier $y = y' = y'' = e^x$, so verwandeln sich die oben angegebenen allgemeinen Formeln in

$$X = x + \tfrac{1}{2}(1 - e^{2x})$$

$$Y = e^x + e^x,$$

woraus sich durch Elimination von x die Gleichung der Katakaustik ergibt:

$$X = l\,\frac{Y}{2} + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{Y^2}{4}\right).$$

Dieselbe ist also identisch mit der Linie, welche eine auf der Ordinatenaxe in der Höhe $AE = 2$ befindliche Person zurücklegen würde, wenn sie eine andere Anfangs im Ursprung befindliche auf der Abscissenaxe fortschreitende Person so verfolgte, daß sie, immer in gerader Richtung auf letztere losgehend, dieselbe Geschwindigkeit wie die verfolgte Person einhielte. Man überzeugt sich nämlich leicht aus der letzten Gleichung, daß jedes Bogenelement der Katakaustik gleich demjenigen Stücke der Abscissenaxe ist, welches zwischen den Eintreffungspunkten der an den Endpunkten des Bogenelementes gezogenen Tangenten in die Abscissenaxe enthalten ist.

4) Von den Brennlinien durch Brechung.

§. 191. **Entstehung dieser Linien.** Denken wir uns aus einem leuchtenden Punkte eine unendliche Menge von Lichtstrahlen auf eine brechende Curve auffallend, welche dieselben dergestalt bricht, daß das Verhältniß der Sinus der Winkel, die der einfallende und gebrochene Strahl mit der Normale an dem Einfallspunkte bilden, constant bleibt, wie sich auch der Einfallswinkel ändern mag. Die so gebrochenen Strahlen werden wieder nach der Brechung einem Gesetze gemäß sich zerstreuen, welches von der Beschaffenheit der brechenden Curve abhängt. Die Folge von Punkten, in denen sich zwei unmittelbar an einander liegende gebrochene Strahlen schneiden, bestimmt die sogenannte Brennlinie durch Brechung oder Diakaustik. Da sie mit der Katakaustik einerlei Ursprung hat, so werden wir dasselbe Verfahren einhalten, um sie zu construiren und ihre Gleichung zu finden. — Es sei AMB (Fig. 50) die brechende Curve, S der leuchtende Punkt und SM ein einfallender Strahl, MF der dazu gehörige gebrochene und F der Punkt, wo derselbe die Diakaustik berührt. Nachdem der dem Punkt M entsprechende Krümmungshalbmesser bestimmt und der Bogen MM' unendlich klein angenommen worden, beschreibe man aus S und F

als Mittelpunkten die kleinen Bogen MR, MT, und ziehe die Senkrechten CE, CE′, CG, CG′ auf die einfallenden und gebrochenen Strahlen. Man stelle ferner SM durch r, ME durch a, MG durch b und den kleinen Bogen MR durch dt dar. — Die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke MEC und MRM′, ferner MGC und MTM′ liefern die Proportionen:

$$MC : MM' = ME : MR,$$
$$MC : MM' = MG : MT,$$

woraus

$$ME : MG = MR : MT$$

oder

$$MT = \frac{b\,dt}{a}.$$

Die ähnlichen Dreiecke SMR und SE′Q geben weiter

SM : (SQ oder SE) = MR : QE′, woraus $QE' = \frac{(a + r)\,dt}{r}$.

Ist $\frac{m}{n}$ das Brechungsverhältniß, so hat man

$$EC : CG = m : n$$

und

$$E'C : CG' = m : n,$$

mithin

$$E'C - EC : CG' - CG = m : n,$$

oder

$$E'Q : G'P = m : n,$$

woraus

$$G'P = \frac{(a + r)\,n\,dt}{mr}.$$

Die ähnlichen Dreiecke FMT und FG′P geben endlich

$$MT : G'P = MF : PF,$$

oder

$$MT - G'P : MF - PF\ (MG) = MT : MF,$$

oder

$$\frac{b\,dt}{a} - \frac{(a + r)\,n\,dt}{mr} : b = \frac{b\,dt}{a} : MF,$$

woraus

$$MF = \frac{b^2 mr}{bmr - a^2 n - arn}.$$

Hieraus ergibt sich zur Bestimmung der Größe MF folgende Construction. Mache den Winkel ECH = Winkel GCM und schneide von M aus auf dem einfallenden Strahl MS das Stück $MK = \frac{a^2}{r}$ ab und suche dann die vierte Proportionale z zu HK, HE und MG; der so bestimmte Werth z wird mit dem Ausdrucke von MF übereinstimmen. Denn die ähnlichen Dreiecke MGC und HEC liefern

$$CG : CE = MG : EH,$$

oder
$$m : n = MG : EH,$$

woraus
$$EH = \frac{bm}{n}.$$

Mithin
$$HE - ME = HM = \frac{bm - na}{n},$$

ferner

$$HM - MK = KH = \frac{bmr - nar - a^2n}{nr};$$

folglich geht die Proportion

$$HK : HE = MG : z \text{ in}$$

$$\frac{bmr - nar - a^2n}{r} : bm = b : z$$

über, d. h.

$$z = \frac{b^2mr}{bmr - nar - a^2n} = MF.$$

Ist $r = \frac{1}{0}$, wo dann die einfallenden Strahlen parallel zu einander sind, so hat man

$$MF = \frac{b^2m}{bm - an},$$

und man braucht blos die Proportion

$$HM : HE = MG : z$$

anzusetzen, woraus

$$z = \frac{b^2m}{bm - an} = MF.$$

Berührt der einfallende Strahl SM die Curve im Punkte M, so erhält man
$$a = 0 \text{ und } MF = b.$$

Wenn der einfallende Strahl SM mit der Normale zusammenfällt, werden a und b dem Krümmungshalbmesser gleich, und man bekommt

$$MF = \frac{bmr}{mr - nr - bn}.$$

Wenn der Krümmungshalbmesser verschwindet, verschwinden ebenfalls die Größen a und b und es wird $MF = 0$; die Curve und die Diakaustik haben alsdann den Punkt M gemeinschaftlich. Wenn dagegen der Krümmungshalbmesser unendlich wird, sind es auch die Größen a und b und man findet $MF = -\frac{mr}{n}$, in welchem Falle der Punkt F auf die entgegengesetzte Seite in Bezug auf die Curve AMB zu liegen kommt.

Die brechende Curve sei der vierte Theil AMD eines Kreises, dessen Mittelpunkt in C liegt (Fig. 51). Werden die einfallenden Strahlen SA, SM, SD parallel zu einander und das Brechungsverhältniß $m : n = 3 : 2$ angenommen, so beschreibe man über MC einen Halbkreis, und mache die Sehne $CG = \frac{2}{3} CE$, die von G nach M gezogene Gerade wird die Richtung des dem in M einfallenden Strahle entsprechenden gebrochenen geben, auf welchem die Größe MF nach der oben aufgestellten Regel aufzutragen ist. Für den Punkt H der Diakaustik, welcher dem normal auffallenden Strahl SA entspricht, findet man $AH = 3b = 3AC$. Wendet der brechende Kreis AM (Fig. 52) seine hohle Seite den parallel einfallenden Strahlen zu und ist das Brechungsverhältniß $m : n$ gleich $2 : 3$, so beschreibe man wieder auf MC einen Halbkreis und nehme $CG = \frac{3}{2} CE$; der Punkt G mit M durch eine Gerade verbunden bestimmt die Richtung des gebrochenen Strahls, auf welchen die Größe MF nach der gegebenen Regel aufgetragen werden muß, um den entsprechenden Punkt der Diakaustik zu erhalten. Für den normal einfallenden Strahl SA findet man

$$AH = -2d, \text{ d. h. } AH \text{ ist gleich } 2AC$$

auf der concaven Seite des Kreises. Nimmt man $CE = \frac{2}{3} CD$, so fällt der Punkt M in den Punkt N, wo die Diakaustik den Kreis berührt.

Die brechende Curve sei wieder eine logarithmische Spirale, für welche der Pol A, Fig. 12, zugleich der strahlende Punkt ist. Der Punkt E fällt hier mit dem Pole A zusammen und es wird $MF' = b$, d. h. der Punkt der Diakaustik F′ und der Punkt G sind ein und derselbe. Der über dem Krümmungshalbmesser MC beschriebene Kreis geht nothwendigerweise durch die Punkte G und A, mithin sind die Winkel TMA und T′GA, wo TM die Tangente der Spirale AM und T′G die Tangente der Diakaustik AG ist, einander gleich, indem Beide die Hälfte des Bogens AM zum Maße haben. Hieraus geht wieder hervor, daß die Diakaustik der logarithmischen Spirale ebenfalls eine logarithmische Spirale ist.

§. 192. **Gleichung der Diakaustik.** Um die Gleichung der Brennlinie durch Brechung zu erhalten, legen wir wieder ein rechtwinkliges Coordinatensystem zum Grunde.

Es sei a die Abscisse des auf der Abscissenachse befindlichen strahlenden Punktes S (Fig. 53), x und y die Coordinaten irgend eines Punktes M der brechenden Curve $f(x, y) = 0$, ferner μ das Brechungsverhältniß.

Man hat, wenn $r = \sqrt{y^2 + (x - a)^2}$ gesetzt wird:

$$\sin SMP = \frac{x - a}{r} \text{ und } \cos SMP = \frac{y}{r};$$

dann

$$\sin NMP = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \text{ und } \cos NMP = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

wo MN die Normale der brechenden Curve ist. Folglich, da

$$SMN = SMP + NMP,$$

$$\sin SMN = \sin EMN = \frac{x - a + yy'}{r\sqrt{1 + y'^2}},$$

und

$$\sin FMN = \frac{x - a + yy'}{\mu\, r \sqrt{1 + y'^2}},$$

wo MF den gebrochenen Strahl darstellt. Hieraus

$$\cos FMN = \frac{Z}{\mu r \sqrt{1 + y'^2}},$$

wenn der Kürze halber

$$Z = \sqrt{\mu^2 r^2 (1 + y'^2) - (x - a + yy')^2}$$

gesetzt wird. Es ist

$$FMN + NMP = FMP;$$

mithin

$$\sin FMP = \frac{x - a + yy' + Zy'}{\mu r (1 + y'^2)},$$

und

$$\cos FMP = \frac{Z - y'(x - a) - yy'^2}{\mu r (1 + y'^2)},$$

woraus

$$\operatorname{tang} FMP = \frac{x - a + yy' + Zy'}{Z - y'(x - a) - yy'^2},$$

oder

$$\operatorname{tang} MFP = \operatorname{tang} \varphi = \frac{Z - y'(x - a) - yy'^2}{Zy' + yy' + x - a}.$$

Für die Gleichung des gebrochenen Strahles MF, wenn X und Y seine laufenden Coordinaten sind, erhalten wir hiernach:

$$Y - y = -\operatorname{tang} \varphi \cdot (X - x).$$

Wird diese Gleichung in Bezug auf x differentiirt, indem man y, y' als Functionen davon ansieht, dabei X und Y als unveränderlich annimmt, dann x, y, y', y'' zwischen diesen beiden letzteren Gleichungen, sowie zwischen der Gleichung der brechenden Curve f (x, y) = 0 und ihren beiden ersten Derivirten eliminirt, so ist die daraus entspringende Relation zwischen X und Y die Gleichung der Diakaustik.

Sind die einfallenden Strahlen parallel zu einander, in welchem Falle a unendlich groß wird, so hat man

$$Z = a\sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1};$$

woraus

$$\tang \varphi = \frac{y' + \sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1}}{y' \sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1} - 1}.$$

Um von diesen Formeln eine Anwendung zu geben, wollen wir annehmen, daß die brechende Linie eine Gerade sei, welche mit der Achse der y zusammenfällt, und der strahlende Punkt auf der Abscissenachse liege. Die Gleichung der brechenden Linie ist $x = a$, ferner ist $y' = \infty$. Daraus erhalten wir:

$$Z = y' \sqrt{(\mu^2 - 1) y^2 + \mu^2 a^2}$$

und

$$\tang \varphi = - \frac{y}{\sqrt{(\mu^2 - 1) y^2 + \mu^2 a^2}}.$$

Mittelst dieser Werthe wird die Gleichung des gebrochenen Strahls:

$$Y - y = \frac{y}{\sqrt{(\mu^2 - 1) y^2 + \mu^2 a^2}} (X - a),$$

welche durch Differentiation liefert:

$$\mu^2 a^2 (a - X) = \left\{(\mu^2 - 1) y^2 + \mu^2 a^2\right\}^{3/2}.$$

Aus der letzteren entspringt:

$$y^2 = \frac{\left\{\mu^2 a^2 (a - X)\right\}^{2/3} - \mu^2 a^2}{\mu^2 - 1},$$

wodurch die erstere in

$$Y - y = \frac{y (X - a)}{\mu^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}} (a - X)^{\frac{1}{3}}},$$

oder in

$$Y = (\mu^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}} + (X - a)^{\frac{2}{3}}) \sqrt{\frac{(a - X)^{\frac{2}{3}} - \mu^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}}}{\mu^2 - 1}}$$

übergeht. In Berücksichtigung, daß $(X - a)^{\frac{1}{3}} = -(a - X)^{\frac{1}{3}}$, verwandelt sich die letztere Gleichung in:

$$(a - X)^{\frac{2}{3}} + (Y \sqrt{\mu^2 - 1})^{\frac{2}{3}} = \mu^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}}.$$

Die Brennlinie im betrachteten Falle ist für $\mu > 1$ die Evolute einer Ellipse und für $\mu < 1$ die Evolute einer Hyperbel.

Als zweites Beispiel der Anwendung der vorhergehenden Formeln diene die Aufgabe, die Brennlinie des Kegelschnittes zu bestimmen,

dessen Gleichung $y^2 = \left(\frac{x}{\mu} + a\right)^2 - x^2$, wenn die Strahlen parallel mit der Abscissenachse einfallen und μ das Brechungsverhältniß vorstellt. Die allgemeine Gleichung des gebrochenen Strahles ist

$$Y - y = \frac{y' + \sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1}}{1 - y' \sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1}} (X - x).$$

Aus der Gleichung des Kegelschnittes entnimmt man nun folgende Werthe:

$$y' = \frac{\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{\mu} + a\right) - x}{\sqrt{\left(\frac{x}{\mu} + a\right)^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1} = \frac{\mu a}{\sqrt{\left(\frac{x}{\mu} + a\right)^2 - x^2}}.$$

Bringt man jetzt die Gleichung des gebrochenen Strahles auf die Form

$$Y (1 - y') \sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1)} - X (y' + \sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1}) =$$
$$y (1 - y') \sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1)} - x (y' + \sqrt{\mu^2 (1 + y'^2) - 1})$$

und substituirt die eben angegebenen Werthe, so findet man, daß die rechte Seite der letzten Gleichung verschwindet, und daß für den gebrochenen Strahl die Gleichung übrig bleibt:

$$xY \frac{\left[\frac{x}{\mu^2}(1 - \mu^2) + \mu a \left(\frac{1}{\mu^2} + 1\right)\right]}{\sqrt{\left(\frac{x}{\mu^2} + a\right)^2 - x^2}} = X \left[\frac{x}{\mu^2}(1 - \mu^2) + \mu a \left(\frac{1}{\mu^2} + 1\right)\right]$$

oder nach Division mit dem beiderseits gemeinschaftlichen Factor, welcher keinem Punkte der Curve entspricht:

$$Y = \frac{1}{x} \sqrt{\left(\frac{x}{\mu} + a\right)^2 - x^2} \cdot X = \frac{y}{x} X.$$

Dieß ist die Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Geraden, wie auch x sich verändern möge. Die Brennlinie reducirt sich also dießmal auf einen im Ursprunge befindlichen Brennpunkt, so daß für jedes Brechungsverhältniß μ ein Kegelschnitt existirt, dessen Excentricitätsverhältniß $= \frac{1}{\mu}$, und welcher die parallel mit seiner Hauptaxe einfallenden Strahlen sämmtlich in einen Punkt, den Focus des Kegel-

schnittes bricht. Für den Kreis müßte $\mu = \infty$ sein, also der Strahl in der Richtung des Halbmessers gebrochen werden; für die Parabel müßte $\mu = -1$ werden.

IV. Berechnung des Flächeninhalts und der Bogenlänge ebener Curven.

1. Quadratur ebener Curven.

§. 193. **Methode der Quadraturen.** Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Curve. Bezeichnet u die Function von x, welche den Werth der Fläche von einem beliebigen Anfangspunkte bis zu einer der Abscisse x zugehörigen Ordinate darstellt, so hat man nach §. 176 für das Differential gedachter Function:

$$du = y\,dx.$$

Die fragliche Fläche ist aber offenbar die Summe der unendlichen Anzahl von Werthen, welche das Differential du annimmt, wenn man darin für x successive alle Werthe von der ersten Abscisse a bis zur letzten b einführt. Die in Rede stehende Fläche wird demnach durch das bestimmte Integral

$$u = \int_a^b f(x)\,dx$$

dargestellt, wo man unter den Grenzen a und b zwei gegebene Zahlen sich zu denken hat, welche den Abscissen der beiden die Fläche begrenzenden Ordinaten angehören. Diese Anwendung der Integralrechnung bietet sich so natürlich dar, daß man sie gleich anfangs die Methode der Quadraturen genannt hat, und noch jetzt bezeichnet man mit dem Namen Quadratur jede Operation, durch welche der Werth eines bestimmten Integrals gefunden wird.

Ist die erste Grenze a allein gegeben, die zweite aber unbestimmt, so wird diese letztere einfach durch x bezeichnet. Das Resultat dieser Integration ist dann eine Function von x, welche die Fläche ausdrückt, die mit einer der Abscisse a entsprechenden Ordinate anfängt und mit einer der unbestimmten Abscisse x zugehörigen Ordinate endigt. Man hat in vorliegendem Falle

$$u = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Wenn die zu quadrirende Curve die Abscissenachse zwischen den Grenzwerthen von x durchschneidet, so muß man jeden der zwei auf verschiedenen Seiten der Abscissenachse liegenden Flächentheile einzeln berechnen und sie mit gleichen Vorzeichen zusammennehmen, da es hier sich augenfällig nur um die arithmetische Summe handelt. Für die Curve KQACJD (Fig. 54) z. B., deren Gleichung $y = x - x^3$ ist, wo $AK = AJ = 1$ ist, findet man

$$u = \int_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{x} y\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{5}{36}.$$

Für $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ wird $u = 0$, was blos anzeigt, daß die Flächen BCJ und JED einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. Und in der That findet man, daß Fläche $BCJ = \frac{1}{9} = -$ Fläche DJE; deßgleichen hat man Fläche $ACJ = \frac{1}{4} = -$ Fläche KQA.

Aehnlicherweise muß man zu Werke gehen, wenn die durch $y = f(x)$ charakterisirte Curve von $x = a$ bis $x = b$ nicht endlich und stetig bleibt, indem dann das bestimmte Integral dem Unterschiede zweier speciellen Werthe des unbestimmten Integrals nicht mehr gleich ist. So z. B. für $y = \dfrac{1}{(k-x)^2}$, wo k positiv ist, $a = 0$ und $b = 2k$, würde man ohne diese Vorsicht das Resultat

$$u = -\frac{2}{k}$$

erhalten, dessen Unrichtigkeit schon daran zu erkennen ist, daß die Curve keine negative Fläche haben kann, weil die Ordinate immer positiv bleibt. Die Curve besteht aber innerhalb des Intervalles 0 bis 2k aus zwei gleichen Zweigen, von denen der erste sich von 0 bis k und der zweite von k bis 2k erstreckt. Beide Zweige gehen an der Stelle $x = k$ ins Unendliche; die in Rede stehende Fläche ist somit das Doppelte des innerhalb des Intervalles 0 bis k enthaltenen Flächenstückes, welches unendlich groß ist; daher ist auch die über der Abscisse $x = 2k$ liegende Fläche der Curve unendlich groß.

§. 194. **Beispiele.** Wir wollen uns nunmehr mit der Bestimmung der Flächenstücke einzelner Curven beschäftigen oder, wie man sagt, dieselben quadriren.

1) Für die Hyperbel (Fig. 55), deren Gleichung in Bezug auf ihre Achsen ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

hat man, wenn unter u die Fläche BMP verstanden wird,

$$u = \frac{b}{a}\int_{a}^{x} dx\,\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Um das Integral $\int_a^x dx\sqrt{x^2-a^2}$ zu erhalten, setze man

$$\sqrt{x^2-a^2}=tx;$$

woraus

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2}=\int t\cdot x\,dx=\tfrac{1}{2}tx^2-\tfrac{1}{2}\int x^2dt=\tfrac{1}{2}tx^2-\tfrac{1}{2}a^2\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}tx^2+\tfrac{1}{4}a^2\cdot l\,\frac{1-t}{1+t}+C,$$

$$=C+\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\tfrac{1}{2}a^2\cdot l\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Läßt man das Integral bei $x=a$ anfangen, so hat man

$$\int_a^x dx\sqrt{x^2-a^2}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\tfrac{1}{2}a^2\cdot l\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Der Ausdruck der hyperbolischen Fläche BMP ist folglich

$$u=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}\cdot l\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

$$=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\cdot l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Zieht man diese Fläche von der Fläche des Dreiecks AMP ab, so wird der Rest

$$\frac{ab}{2}\cdot l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

die Fläche des Sectors ABM ausdrücken. Diese Fläche wird unendlich groß, wenn der Radiusvector mit der Asymptote zusammenfällt. Die Fläche der Hyperbel hängt mithin von einer logarithmischen Function ab, während die Fläche der Ellipse eine Kreisfunction ist. Diese zwischen der Ellipse und Hyperbel stattfindende geometrische Analogie entspricht der Analogie zwischen den trigonometrischen und Exponentialfunctionen.

Bei der gleichseitigen Hyperbel, deren Gleichung ist

$$x^2-y^2=a^2$$

reducirt sich der Ausdruck für das hyperbolische Flächenstück ABM auf:

$$\tfrac{1}{2}a^2\,l\left(\frac{x+y}{a}\right).$$

Die Gleichung dieser auf ihre Achse bezogenen Hyperbel ist

$$xy=\frac{a^2}{2};$$

hiernach wird die Größe der zwischen den Ordinaten, welche den Abscissen x_0 und x entsprechen, liegenden asymptotischen Fläche ausgedrückt durch:

$$u = \frac{a^2}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \frac{a^2}{2} l\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Setzt man $a = \sqrt{2}$ und $x_0 = 1$, so hat man blos $u = lx$. Die Neperschen Logarithmen können mithin durch die Flächen einer gleichseitigen Hyperbel dargestellt werden. Aus diesem Grunde hat man diese Logarithmen auch hyperbolische Logarithmen genannt.

Diese Benennung ist aber nicht gut gewählt, weil jedes andere Logarithmensystem sich durch hyperbolische Flächenräume darstellen läßt. Für die ungleichseitige Hyperbel nämlich, deren Asymptotenwinkel α heißen mag, hat man schiefwinklige Coordinaten vom Winkel α. Also

$$u = \sin\alpha \int_{x_0}^{x} y dx = \frac{a^2 + b^2}{4} \sin\alpha l \frac{x}{x_0},$$

weil $y = \frac{a^2 + b^2}{4} x$ ist. Setzt man $\frac{a^2 + b^2}{4} = 1$ und $x_0 = 1$, so hat man blos $u = \sin\alpha lx$. Nimmt man $\sin\alpha \cdot lx = \log x$, wonach $\sin\alpha$ den Modul jenes Systems darstellt, dessen Logarithmen durch log bezeichnet werden; so ist $u = \log x$, was eben ausgesprochen wurde.

2) Für die Cissoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (Fig. 2) hat man

$$u = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}};$$

oder

$$u = \frac{3a^2}{2} \text{ arc}\left(\sin = \frac{x - a}{a}\right) - \frac{3a + x}{2} (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Hieraus entspringt innerhalb des Intervalls von $x = 0$ bis $x = 2a$ für die halbe ins Unendliche sich erstreckende Fläche der Cissoide AMZB der Ausdruck $\frac{3a^2\pi}{2}$; folglich die ganze ins Unendliche gehende Fläche der Cissoide $= 3a^2\pi$, d. h. diese Fläche ist dreimal so groß als die Fläche des Kreises, dessen Radius $= a$.

3) Für die Curve, deren Ordinate sich zur Ordinate des Kreises verhält wie die beiden Curven gemeinschaftlichen Abscisse zum Halbmesser a, deren Gleichung ist:

$$a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$$

und welche in der Figur 56 ihre Darstellung hat, bekommt man:

$$u = \int y dx = \frac{1}{a} \int x dx (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Wird $a^2 - x^2 = t$ gesetzt, so wird das Integral

$$u = -\frac{1}{2a}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3a} + C = -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a} + C.$$

Von $x = 0$ bis $x = x$ erhält man das bestimmte Integral

$$u = \frac{a^2}{3} - \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a},$$

so daß die Fläche zwischen $x = 0$ und $x = a$, wie auch die Fläche zwischen $x = 0$ und $x = -a$ gleich $= \frac{a^2}{3}$ ist. Auch hier darf man das allgemeine Integral nicht auf einmal von $x = -a$ bis $x = +a$ nehmen, weil die Wurzelgröße für positive Ordinaten im zweiten Quadranten negativ ist, sondern man muß die Fläche von $x = 0$ bis $x = +a$ und die Fläche von $x = 0$ bis $x = -a$ jede besonders berechnen, wenn man die über dem Durchmesser CB stehende Fläche der Curve ermitteln will.

4) Die logarithmische Linie (Fig 3), welche

$$y = me^{\frac{x}{m}}$$

zur Gleichung hat, liefert

$$u = \int_a^b y\,dx = m^2\left(e^{\frac{b}{m}} - e^{\frac{a}{m}}\right)$$

für die Fläche MNQP, welche mit den Abscissen $AP = a$ und $AQ = b$ begrenzt wird. Hieraus entspringt für die Fläche von A aus nach der Seite der positiven x der Ausdruck:

$$m^2\left(e^{\frac{x}{m}} - 1\right);$$

und für die Fläche von A aus nach der Seite der negativen x der Ausdruck:

$$m^2\left(1 - e^{\frac{x}{m}}\right).$$

Dieser Letztere gibt, wenn man darin $x = -\infty$ setzt, m^2 für den Betrag der Fläche, welche zwischen der Achse und der Curve liegt, beide ins Unendliche verlängert gedacht.

5) Die Gleichung der Kettenlinie (Fig. 4)

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

gibt für die zwischen der Abscissenachse, der Curve und den beiden Ordinaten m, y liegende Fläche den Ausdruck:

$$u = \frac{m^2}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = ms,$$

wenn man nach §. 178 erwägt, daß die Bogenlänge

$$s = m\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

ist.

6) Für die Cycloide (Fig. 5) hat man $x = a\,(t - \sin t)$ und $y = a\,(1 - \cos t)$. Die Fläche AMP wird ausgedrückt durch

$$u = \int_0^x y dx$$

oder

$$u = a^2 \int_0^t (1 - \cos t)^2\, dt.$$

Hieraus entspringt

$$u = a^2 \int_0^t (\tfrac{3}{2} - 2 \cos t + \tfrac{1}{2} \cos 2t)\, dt,$$

oder wenn man berücksichtigt, daß $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$:

$$u = a^2\,(\tfrac{3}{2} t - 2 \sin t + \tfrac{1}{4} \sin 2t).$$

Um die ganze Fläche AFA′ zu ermitteln, welche zwischen der Achse und der Cycloide liegt, muß man $t = 2\pi$ setzen. Man findet diese Fläche dreimal so groß als die Fläche des erzeugenden Kreises.

§. 195. **Durch verschiedene Curvenäste begrenzte Flächenräume..** Es sei u die einerseits von zwei Curven (Fig. 57), deren Gleichungen beziehungsweise $y = f(x)$ und $y = F(x)$ sind, und anderseits von den den Abscissen a, x entsprechenden Ordinaten begrenzte Fläche. Sind M, M' zwei Punkte der ersten Curve, und N, N' zwei Punkte der zweiten, welche den Abscissen $x, x + \Delta x$ angehören, und bleibt die Differenz $F(x) - f(x)$ von x bis $x + \Delta x$ positiv; so haben wir für den analogen Zuwachs Δu den Ausdruck:

$$\Delta u = \Delta x \left\{F(x + H\Delta x) - f(x + h\Delta x)\right\},$$

wo H und h zwei zwischen 0 und 1 liegende Zahlen bedeuten. Daraus folgt bei dem unendlichen Abnehmen von Δx die Relation:

$$\frac{du}{dx} = F(x) - f(x) \text{ oder } du = dx\,(F(x) - f(x));$$

mithin durch Integration:

$$u = \int_a^x dx \left\{F(x) - f(x)\right\}.$$

Fiele die Differenz $F(x) - f(x)$ negativ aus, so würden an die Stelle der beiden vorhergehenden Formeln die folgenden treten:

$$du = dx \left\{ f(x) - F(x) \right\} dx,$$

und
$$u = \int_a^x \left\{ f(x) - F(x) \right\} dx.$$

Gehören die beiden Werthe von y einer und derselben Gleichung $\varphi(x,y) = 0$ an, d. h. sind jene Werthe die Ordinaten einer von allen Seiten geschlossenen Curve, so braucht man blos statt a und x die kleinste und die größte der den Curvenpunkten entsprechenden Abscissen zu setzen, um den von jener Curve begrenzten Flächenraum zu erhalten. Gewöhnlicherweise gehören dergleichen Abscissen solchen Punkten der Curve an, deren Tangente zu der Ordinatenachse parallel läuft. Uebrigens kann auch das Gegentheil stattfinden, wenn die durch $\varphi(x,y) = 0$ dargestellte Curve Rückkehrpunkte darbietet.

Um das Gesagte durch ein Paar Beispiele zu erläutern, seien die zwei entgegengesetzt liegenden Parabeln AF, AF′ gegeben (Fig. 58), welche $y^2 = 2px$ und $y^2 = -2px$ zu Gleichungen haben. Für das Flächenelement MNN′M′ = du haben wir

$$du = 2dy \cdot x = 2 \cdot \frac{y^2}{2p} \cdot dy;$$

mithin

$$u = \tfrac{2}{3} \cdot \int_0^y \frac{y^2}{2p}\, dy = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{2p} = \tfrac{2}{3}\, yx$$

für die von A bis C gehende Fläche AFCF′.

Als zweites Beispiel diene die der Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

angehörige Curve, deren völlig begrenzter Flächenraum zu bestimmen ist. Man hat

$$y = \pm \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}};$$

überdies findet man bald, daß -1 die kleinste und $+1$ die größte von den der Curve zugehörigen Abscissen ist. Für den in Rede stehenden Flächenraum hat man daher den Ausdruck:

$$u = 2 \int_{-1}^{+1} \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx,$$

oder

$$u = 4 \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Um die Integration zu bewerkstelligen, setze man $x = \sin^3\varphi$, es entspringt daraus

$$u = 12 \int_0^{\pi/2} \left(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi\right) d\varphi;$$

oder wenn man die zweite Formel des §. 96 zu Hülfe nimmt:

$$u = 6\pi \left\{ \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right\} = \tfrac{3}{8}\pi.$$

2. Näherungsweise Quadratur und Quadratur in Polarcoordinaten.

§. 196. **Näherungsweise Quadratur.** Wenn man das Integral $\int y dx$ für eine vorgelegte Curve nicht in einem geschlossenen Ausdruck angeben kann, so muß man zur Ermittelung eines von der Curve und zweien Ordinaten eingeschlossenen Flächenstücks das Integral durch eine Reihe darstellen; man vergleiche hiermit §. 105 u. §. 106. Man kann aber auch an die Stelle der fraglichen Curve ein Polygon oder eine Curve setzen, die der gegebenen Curve möglichst nahe kommt und deren Flächeninhalt sich bestimmen läßt, welcher dann als ein Näherungswerth des gesuchten Inhalts gilt Es sei (Fig. 59) BMR irgend eine Curve und der Flächeninhalt ABRQ zu bestimmen. Wir theilen zu diesem Behuf AQ in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile, und errichten in den Theilungspunkten die Ordinaten. Die Fläche ABRQ wird dadurch in n Streifen zerlegt, welche näherungsweise als Rechtecke angesehen werden können, wenn n eine große Zahl ist. Bezeichnen wir die Ordinaten der Reihe nach mit $y_0, y, y_2 \cdots y_n$, den nten Theil von AQ mit h und die Fläche ABRQ mit u, so ist näherungsweise

$$u = h \left\{ y_0 + y_1 + y_2 \cdots y_{n-1} \right\}.$$

Eine größere Genauigkeit erhält man, wenn man die einzelnen Streifen als Trapeze ansieht; es gibt dies

$$u = h \left\{ \tfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 \cdots + y_{n-1} \right\}.$$

Eine noch größere Genauigkeit erreicht man, wenn man die einzelnen Stücke des Bogens BMR als parabolische Bögen ansieht. Die Zahl n als gerade 2n annehmend denken wir uns durch je drei Theilpunkte M, M′, M″ des Bogens BMR, deren Ordinaten gleiche Abstände h haben, eine Parabel gelegt, deren Achse zur Ordinatenachse parallel läuft. Die Gleichung dieser Parabel wird von der Form sein

$$y - \beta = \frac{(x - \alpha)^2}{q},$$

wo α und β die Coordinaten des Scheitels S der Parabel sind. Denken wir uns nun für einen Augenblick durch den Scheitel S (Fig. 60) ein neues Coordinatensystem parallel dem früheren gelegt,

so wird die Gleichung gedachter Parabel die Form $Y = \frac{X^2}{q}$ haben, und das parabolische Flächenstück

$$MM''Q''Q = SM''Q'' - SMQ = \frac{(X + 2h)^3}{3q} - \frac{X^3}{3q} \text{ sein;}$$

wofür man schreiben kann

$$MQQ''M'' = \tfrac{1}{3}h \left\{\frac{X^2}{q} + 4\,\frac{(X + h)^2}{q} + \frac{(X + 2h)^2}{q}\right\}.$$

Bezeichnen wir die drei Ordinaten MQ, M'Q', M''Q'' mit Y_0, Y_1, Y_2, so verwandelt sich der vorige Ausdruck in:

$$MQQ''M' = \tfrac{1}{3}h\,(Y_0 + 4Y_1 + Y_2).$$

Bezeichnen wir ähnlicherweise die drei Ordinaten MP, M'P', M''P'' mit y_0, y_1, y_2; so ist nunmehr

Fläche MPP''M'' = Rechteck QPP''Q'' + Fläche MQQ''M'';

d. h.

$$\text{Fläche } MPP''M'' = 2h\beta + \tfrac{1}{3}h\,(y_0 - \beta + 4\,(y_1 - \beta) + y_2 - \beta)$$

oder

$$\text{Fläche } MPP''M'' = \tfrac{1}{3}h\,(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Da jeder parabolische Streifen eine ähnliche Formel liefert, so erhalten wir für die Fläche ABRQ (Fig. 59) folgenden Ausdruck:

$$u = \tfrac{1}{3}h\,(y_0 + 4y_1 + y_2) + \tfrac{1}{3}h\,(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots$$
$$+ \tfrac{1}{3}h\,(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n});$$

oder

$$u = \tfrac{1}{3}h \left\{\begin{array}{l} y_0 + y_{2n} \\ + 4\,(y_1 + y_3 + y_5 \dots + y_{2n-1}) \\ + 2\,(y_2 + y_4 + y_6 \dots + y_{2n-2}) \end{array}\right\}.$$

Diese Formel ist nach ihrem Erfinder unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannt und liefert schon bei mäßig großen n ziemlich genaue Resultate.

Wir nehmen das im §. 106 behandelte Beispiel wieder hier auf; wonach für die Curve, deren Gleichung $xy = 1$ ist, das Flächenstück von $x = 1$ bis $x = 2$ berechnet werden soll. Indem wir an die Stelle der zu quadrirenden Curve eine Parabel setzen, welche mit der vorgelegten Curve $xy = 1$ die Punkte, deren Abscissen

$$x = 1,\ x = 1\tfrac{1}{4},\ x = 1\tfrac{1}{2},\ x = 1\tfrac{3}{4} \text{ und } x = 2$$

sind, gemein hat, bekommen wir

$$y_0 = 1,\ y_1 = \tfrac{4}{5},\ y_2 = \tfrac{2}{3},\ y_3 = \tfrac{4}{7} \text{ und } y_4 = \tfrac{1}{2}.$$

Substituiren wir diese Werthe in obige Formel, so erhalten wir

$$u = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \left\{1 + \tfrac{1}{2} + 4\,(\tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{7}) + 2 \cdot \tfrac{2}{3}\right\} = 0{,}69325.$$

Dieser genäherte Werth stimmt mit dem wahren Werthe 0,69314 in den drei ersten Decimalstellen überein.

§. 197. **Quadratur in Polarcoordinaten.** Das Differential der Fläche eines Sectors einer durch Polarcoordinaten ausgedrückten Curve ist

$$dv = \tfrac{1}{2} r^2 dt;$$

mithin der Sector

$$v = \tfrac{1}{2} \int_0^t r^2 dt,$$

wo für r^2 sein durch die Polargleichung der Curve gegebener Werth zu substituiren ist. Wenn der Radiusvector innerhalb der zu bestimmenden Fläche durch Unendliche geht, so besteht dieselbe aus zwei gesonderten Sectoren, welche einzelnen berechnet werden müssen. — Zu den besondern Beispielen möge nun übergegangen werden.

1) Um einen Ellipsensector FMA (Fig. 34) zu quadriren, wenn der eine Brennpunkt F als Pol gilt und die Gerade von diesem Punkte nach dem nächstliegenden Endpunkte der großen Achse als Anfangslage betrachtet wird, haben wir

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos t},$$

wo p den halben Parameter und ε die Excentricität < 1 bezeichnet. Für den Sector v hat man nun

$$v = \tfrac{1}{2} p^2 \cdot \int \frac{dt}{(1 + \varepsilon \cos t)^2}.$$

Um den Werth des Integrals zu finden, setze man

$$\cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

woraus entspringt

$$\sin t = \frac{2x}{2 + x^2},\ dt = \frac{2dx}{2 + x^2}.$$

Das Integral geht dadurch über in:

$$\int \frac{dt}{(1 + \varepsilon \cos t)^2} = 2 \int \frac{(1 + x^2)\, dx}{\{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon)\, x^2\}^2} =$$

$$\frac{2}{1 - \varepsilon} \int \frac{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon)\, x^2 - 2\varepsilon}{\{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon)\, x^2\}^2}\, dx =$$

$$\frac{2}{1 - \varepsilon} \int \frac{dx}{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon)\, x^2} - \frac{4\varepsilon}{1 - \varepsilon} \int \frac{dx}{\{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon)\, x^2\}^2}.$$

Wird die Integration ausgeführt und dann für x sein Werth tang $\frac{1}{2}$t substituirt, so ergibt sich

$$\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ arc } \left(\text{tang} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \text{ tang } \tfrac{1}{2}t\right) - \frac{1}{1-\varepsilon^2} \, \frac{\varepsilon \sin t}{1+\varepsilon \cos t};$$

mithin der fragliche Sector

$$v = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ arc } \left(\text{tg} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \text{ tg } \tfrac{1}{2}t\right) - \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)} \cdot \frac{\varepsilon \sin t}{1+\varepsilon \cos t};$$

wo der Sector v von der großen Achse an gerechnet wird.

Derselbe läßt sich auch auf folgende Weise berechnen:

$$\text{Sector FMA} = \text{CMA} - \text{CMF} =$$
$$= \frac{b}{a} \cdot \text{CNA} - \frac{b}{a} \cdot \text{NP} \cdot \text{CF} = \frac{ab}{2} (w - e \sin w).$$

Um den Hülfswinkel w zu berechnen, setze man

$$r \cos t = a \cos w - ae = \frac{a(1-e^2) \cos t}{1 + e \cos t},$$

woraus

$$\cos w = \frac{e + \cos t}{1 + e \cos t}, \text{ oder } \text{tg } \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+2}} \cdot \text{tg } \frac{t}{2}.$$

2) Aus der Gleichung der logarithmischen Spirale (Fig. 12) erhalten wir

$$v = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} r^2 dt = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{2t}{m}} dt = \tfrac{1}{4} m e^{\frac{2t}{m}} = \tfrac{1}{4} m r^2.$$

Da die Polarsubtangente des Punktes M gleich mr ist, so ist der in unendlich vielen Windungen vom Radius überstrichene Sector gleich dem halben Dreieck, welches von der Tangente, der Polarsubtangente und dem Radius eingeschlossen wird.

3) Die Gleichung der Cylinderfocale (Fig. 19)

$$r = \frac{\cos 2t}{\sin t} \text{ gibt}$$

$$v = \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 4 + 4 \sin^2 t\right) dt.$$

Daraus entspringt

$$v = \tfrac{1}{2} \int_{\pi/4}^{t} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 4 + 4 \sin^2 t\right) dt$$
$$= 1 - \frac{\cos t}{2 \sin t} (1 + 2 \sin^2 t) + \frac{\pi}{4} - t;$$

woraus das Flächenstück

$$BNA = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

4) Die Tangentencurve $r = \text{tang}\ t$ (Fig. 16) gibt

$$2 = \tfrac{1}{2} \int \text{tang}^2 t\, dt = \tfrac{1}{2}\ \text{tang}\ t - \tfrac{1}{2} t = \tfrac{1}{2} r - \frac{1}{2t},$$

wo der Sector in O seinen Anfang nimmt. Hieraus folgt, wenn OB als Einheit angenommen wird, daß der Sector OM = ONB — OGB, d. h. gleich dem zwischen dem Bogen GB, seiner Tangente und der Verlängerung des Radiusvectors enthaltenen Flächenstücke ist.

5) Für die Lemniscate, deren Gleichung ist

$$r^2 = a^2 \cos 2t,$$

hat man

$$v = \tfrac{1}{2} a^2 \int \cos 2t\, dt = \tfrac{1}{4} a^2 \sin 2t.$$

Dieses Integral darf nur zwischen den Grenzen $-\tfrac{1}{4}\pi$ und $+\tfrac{1}{4}\pi$, oder zwischen $t = \tfrac{3}{4}\pi$ und $t = \tfrac{5}{4}\pi$ genommen werden, weil für Werthe von t zwischen $\tfrac{1}{4}\pi$ und $\tfrac{3}{4}\pi$ oder zwischen $\tfrac{5}{4}\pi$ und $\tfrac{7}{4}\pi$ gelegen, r imaginär wird. Man hat hiernach

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} r^2 dt = \tfrac{1}{4} a^2$$

für den vierten Theil des von der Curve eingeschlossenen Flächenraums.

6) Bezeichnet v den Sector einer Curve, deren Polarcoordinaten φ, r sind, so ist $\frac{dv}{d\varphi} = \tfrac{1}{2} v^2$. Wenn nun φ als eine Function von t angesehen wird, so ist $\frac{dv}{dt} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$; mithin

$$v = \tfrac{1}{2} \int r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt.$$

Es ist aber $\text{tang}\ \varphi = \frac{y}{x}$; also

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{y^2 + x^2} = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{r^2};$$

folglich

$$v = \tfrac{1}{2} \int \left(x \frac{dy}{dx} - y \frac{dx}{dt}\right) dt.$$

Die Gleichungen der Epicycloide (Fig. 6)

$$y = (a + b) \sin t - a \sin \left(\frac{a + b}{a}\right) t,$$

$$x = (a + b) \cos t - a \cos \left(\frac{a + b}{a}\right) t$$

liefern

$$\frac{dy}{dt} = (a + b) \left(\cos t - \cos \frac{a + b}{a} t\right)$$

und

$$\frac{dx}{dt} = -(a + b) \left(\sin t - \sin \frac{a + b}{a} t\right).$$

Mittelst dieser Werthe finden wir

$$v = \tfrac{1}{2} (a + b) (b + 2a) \left(t - \frac{a}{b} \sin \frac{b}{a} t\right),$$

wo der Sector von dem Radius b = OA anfängt. Dieser Ausdruck für den fraglichen Flächeninhalt läßt eine geometrische Auslegung zu, wenn man ihn auf die Form

$$v = \frac{(a + b) (b + 2a)}{ab} \left[\frac{abt}{2} - \frac{a^2}{2} \sin \frac{b}{a} t\right]$$

bringt. Es ist nemlich bt = Bogen DA = Bogen MD, also $\frac{abt}{2} =$ Sector MDC. Ferner ist $\frac{b}{a} t$ gleich dem Winkel DCM, weil AD = MD. Also ist $\frac{a^2}{2} \sin \frac{b}{a} t =$ Dreieck DMC, und

$$\frac{abt}{2} - \frac{a^2}{2} \sin \frac{b}{a} t = \text{Kreissegment MD};$$

folglich

$$\text{Sector der Epicycloide} = \frac{(a + b) (2a + b)}{ab} \cdot \text{Segment MD}.$$

Macht der rollende Kreis einen ganzen Umlauf, so wird das Segment MD zu einem vollen Kreise MDG, und der Flächeninhalt des zwischen zwei Spitzen der Epicycloide enthaltenen Sectors ist:

$$(a + b) \frac{(2a + b)}{ab} \cdot a^2\pi.$$

Zieht man von diesem Werthe die Fläche des Kreissectors OAD ab, so erhält man für die Fläche des Stückes AD A'M den Ausdruck:

$$3a^2\pi \left(1 + \frac{2a}{3b}\right).$$

3. Bogenlänge der ebenen Curven.

§. 198. **Rectification der Curven.** Das Differential des Bogens einer Curve, deren Gleichung in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y ist: $y = f(x)$, wird durch

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ausgedrückt; folglich

$$s = \int_a^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

die Länge des Bogens, wo a die Abscisse des Punktes der Curve darstellt, von welchem aus der Bogen gerechnet wird.

Die Wurzelgröße $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ muß im Allgemeinen innerhalb der Integrationsgrenzen mit dem nämlichen Vorzeichen genommen werden, und zwar wird man jener Größe das Zeichen + oder − beilegen, je nachdem s mit x zugleich wächst oder nicht.

Die Formel wird unbrauchbar, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ für gewisse Werthe von x imaginär sich herausstellen, und die Wurzelgröße $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ dennoch reell wäre. Z. B. wenn

$$f(x) = \tfrac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \tfrac{1}{2} l \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

oder

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - 1},$$

gibt die Rectificationsformel

$$s = \int_a^x x dx = \tfrac{1}{2}(x^2 - a^2),$$

wo der Ausdruck von s für Werthe von x kleiner als 1, welche $f(x)$ und $f'(x)$ imaginär machen, reell ist.

Bei Anwendung der Rectificationsformel ist wieder darauf zu achten, daß die Function $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleibt. Für $y = l \cos x$ z. B. hat man

$$f'(x) = -\operatorname{tang} x; \quad \sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{1}{\cos x};$$

$$s = \int dx \sqrt{1 + f'(x)^2} = \tfrac{1}{2} l \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C;$$

woraus

$$\int_\pi^0 dx \sqrt{1 + f'(x)^2} = 0.$$

Erwägt man aber, daß die in Rede stehende Curve aus zwei übereinstimmenden Aesten zusammengesetzt ist, welche bei $x = \pi/2$ ins Unendliche gehen; so bekommt man

$$s = \int_0^{\pi/2} = \infty,$$

wie es sein muß.

§. 199. **Beispiele.** Wir wollen nun die Rectificationsformel auf einige Curven anwenden.

1) Die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px \text{ gibt } \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}};$$

mithin

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx.$$

Man setze

$$\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = t,$$

woraus

$$x = \frac{p}{2(t^2 - 1)};$$

ferner

$$\int dx \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = \int dx \cdot t = tx - \int x dt = tx - \frac{p}{2}\int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

$$= tx - \frac{p}{4} \cdot l\, \frac{t-1}{t+1} + C.$$

Daraus entspringt

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = x\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} - \frac{p}{4}\, l\, \frac{\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} + 1}.$$

2) Die Gleichung der Ellipse in Bezug auf ihre Achsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

liefert

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)};$$

folglich
$$s = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2 - x^2)}} = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}} \cdot dx;$$
wenn $a^2 - b^2 = a^2e^2$ gesetzt wird, wo e die Excentricität der Ellipse bezeichnet. Dieses Integral läßt sich nicht in endlicher Gestalt darstellen; ein Verfahren, eine convergirende Reihe dafür zu erhalten, ist folgendes. Man setze $x = a \cos \varphi$;
daraus entsteht:
$$s = -a \int_{\pi/2}^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi},$$
oder wenn man $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}$ in eine Reihe entwickelt:
$$s = a\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{a \cdot 1}{1} \cdot \frac{e^2}{2} \int_{\pi/2}^{\varphi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{a \cdot 1}{2} \cdot \frac{e^4}{4} \int_{\pi/2}^{\varphi} \cos^4 \varphi d\varphi$$
$$+ \frac{a \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{e^6}{6} \int_{\pi/2}^{\varphi} \cos^6 \varphi d\varphi + \text{etc.}$$
Es ist aber
$$2 \cos \varphi = e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}};$$
woraus
$$2^{2n} \cos^{2n} \varphi = (e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}})^{2n},$$
oder
$$2^{2n-1} \cos^{2n} \varphi = \cos 2n\varphi + \frac{2n}{1} \cos(2n-2)\varphi + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \cos(2n-4)$$
$$+ \frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos(2n-6) + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2}.$$
Wird die letztere Formel mit $d\varphi$ multiplicirt und dann integrirt, so bekommt man
$$\int_{\pi/2}^{\varphi} \cos^{2n} \varphi d\varphi = 2^{1-2n} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin 2n\varphi - \sin 2n \cdot \frac{\pi}{2}}{2n} \\[2ex] + \dfrac{2n}{1} \cdot \dfrac{\sin(2n-2)\varphi - \sin(2n-2) \cdot \frac{\pi}{2}}{2n-2} \\[2ex] + \dfrac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{\sin(2n-4)\varphi - \sin(2n-4) \cdot \frac{\pi}{2}}{2n-4} \\[2ex] + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ + \tfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{(1 \cdot 2 \cdots n)^2} \left(\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\}.$$

Mittelst dieser Formel lassen sich die einzelnen Integrale in dem Ausdrucke von s leicht bestimmen. Durch Vereinigung der gleichartigen Glieder ergibt sich folgendes Resultat:

$$s = a \left\{ A_0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + A_2 \sin 2\varphi + A_4 \sin 4\varphi + \cdots \right\},$$

wobei $A_0 = 1 - \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 e^4 \cdots\cdot;$

$$A_2 = \frac{1}{8} e^2 + \frac{1}{4 \cdot 8} e^4 + \cdots\cdot;$$

$$A_4 = \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 4} e^4 + \cdots\cdot.$$

Für die Länge des elliptischen Quadranten erhält man

$$s = aA_0 \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}a\pi \left\{1 - \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 e^4 \cdots\cdot \right\}.$$

Geht die Ellipse in einen Kreis über, so wird $e = 0$ und man erhält für die Länge des Quadranten $s = \frac{1}{2}a\pi$, wie es zu erwarten stand.

3) Für die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

erhält man

$$s = a\int_a^x dx \sqrt{\frac{(a^2 + b^2) x^2 - a^4}{a^2 (x^2 - a^2)}} = \int_a^x dx \sqrt{\frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}},$$

wenn $a^2 + b^2 = e^2$ gesetzt wird.

Macht man $x = \frac{a}{\cos\varphi}$, so kommt

$$s = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \sqrt{e^2 - \cos^2\varphi} = ae\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \left\{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

oder wenn man $\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe entwickelt:

$$s = ae \operatorname{tang}\varphi - \frac{a}{2e}\varphi - a\int_0^\varphi d\varphi \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4e^3} \cos^2\varphi \right.$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{6e^5} \cos^4\varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{8e^7} \cos^6\varphi + \text{etc.}\right\};$$

oder

$$s = a \left\{e \operatorname{tang} \cdot \varphi - B_0 \cdot \varphi - B_2 \sin 2\varphi - B_4 \sin 4\varphi \cdots \right\},$$

wo

$$B_0 = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{e^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{e^4} + \cdots\right);$$

$$B_3 = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{e^3} + \frac{1}{6^4} \frac{1}{e^5} + \cdots$$

$$B_4 = \frac{1}{512} \frac{1}{e^5} + \cdots\cdots.$$

Die Verlängerung der zum Endpunkte des Bogens gehörigen Ordinate schneidet von der Asymtote ein Stück ab, dessen Größe

$$z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot x = ex = \frac{ae}{\cos \varphi};$$

mithin der Unterschied z — s zwischen diesem Stücke und dem darunter liegenden Bogen gleich

$$ae \cdot \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} + aB_0\varphi + aB_2 \sin 2\varphi + \cdots.$$

Setzt man hierin $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so sind z und s unendlich groß; ihre Differenz nähert sich aber der endlichen Größe $aB_0\varphi$ oder

$$\frac{a\pi}{4e} \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{e^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)\frac{1}{e^4} \cdots \right\}.$$

4) Die Gleichung der logarithmischen Linie $y = e^{\frac{x}{m}}$ gibt

$$x = l\,\frac{y}{m};$$

woraus

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.$$

folglich

$$s = \int\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\,dy = \int\frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y}\,dy;$$

oder

$$s = \sqrt{y^2 + 1} + l\,\frac{\sqrt{y^2 + 1} - 1}{y} + C.$$

5) Aus der Gleichung der Cycloide ergibt sich

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

also

$$s = \int_0^y dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{2a} \int_0^y dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2a - y}};$$

oder wenn die Integration ausgeführt wird:

$$s = 4a - 2\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a - y},$$

als Ausdruck für die Bogenlänge zwischen dem Anfangspunkt der Curve und dem Punkte, dessen Ordinate y ist. Es entspringt daraus, wenn $y = 2a$ gesetzt wird, für die Hälfte der Cycloide der Werth 4a.

6) Ist x eine Function von t, so wird

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2};$$

mithin

$$s = \int dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Die Gleichungen der Epicycloide geben nun

$$\frac{dx}{dt} = -(a+b)\left\{\sin t - \sin \frac{a+b}{a} t\right\},$$

und

$$\frac{dy}{dt} = (a+b)\left\{\cos t - \cos \frac{a+b}{a} t\right\}.$$

Werden diese Werthe in den vorstehenden Ausdruck eingeführt, so kommt

$$s = 2(a+b)\int \sin \frac{b}{2a} t dt = -4a \frac{(a+b)}{b} \cos \frac{b}{2a} t + C.$$

Soll das Integral für $t = 0$ verschwinden, so ist

$$C = 4a \frac{(a+b)}{b};$$

mithin

$$s = 4a \frac{(a+b)}{b}\left(1 - \cos \frac{b}{2a} t\right).$$

Für den letzten Grenzwerth $\frac{2a}{b}\pi$ von t, welchem der auf den Anfangspunkt nächstfolgende Rückkehrpunkt der Curve entspricht, erhält man

$$s = 8a \frac{(a+b)}{b}.$$

§. 200. **Rectificationen in Polarcoordinaten.** Für das Differential des Bogens bezogen auf Polarcoordinaten hat man

$$ds = dt \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2};$$

folglich

$$s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$$

für die Länge des Bogens, welcher zwischen den beiden Punkten liegt, denen die Werthe t_0 und t der Winkelabscisse angehören.

Um auch ein Paar Beispiele für die Rectification der Polarcurven aufzustellen, wollen wir zuerst den Bogen der archimedischen Spirale suchen, deren Gleichung ist $r = at$.

Man hat

$$s = a \int_0^t dt \sqrt{1 + t^2};$$

oder wenn die Integration ausgeführt wird:

$$s = \frac{a}{2} \left\{ t \sqrt{1 + t^2} + l \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right) \right\}.$$

Als zweites Beispiel diene die Tangentencurve, deren Gleichung ist $r = \text{tang } t$ und gibt

$$s = \int \frac{dt}{\cos^2 t} (1 + \sin^2 t \cos^2 t)^{\frac{1}{2}};$$

oder wenn man in eine Reihe entwickelt:

$$s = \int dt \left(\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{2} - \frac{1}{8} \cos^2 t \sin^4 t + \frac{1}{16} \cos^4 t \sin^6 t \cdots \right).$$

Wird integrirt, so kommt

$$s = \text{tang } t + \frac{1}{4} t - \frac{1}{2} \sin t \cos t +$$

$$\int dt \cos^2 t \sin^4 t \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cos^2 t \sin^4 t - \cdots \right).$$

Das Integral des letzten Gliedes hängt von dem Integral der Formel $\sin^m t \cos^n t dt$ ab, welches, wenn m und n gerade Zahlen sind, als Glieder verschiedene Potenzen von $\sin t \cos t$ und als letztes Glied den Bogen t enthält. Wird auf diese Weise die Integration bewerkstelligt und werden sämmtliche Glieder von $\sin t \cos t$ unter dem nämlichen Zeichen K zusammengefaßt; so erhält man, weil die Constante verschwindet:

$$s = \text{tang } t + K \sin t \cos t + t \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \right.$$

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{128} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left. + \text{etc.} \right).$$

Aus diesem Ausdrucke folgt, daß, wenn $t = \pi/2$ gesetzt wird, der ins Unendliche sich erstreckende Zweig der Curve seine Asymptote um die Größe

$$\pi/2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{128} + \frac{3}{4096} - \frac{25}{262144} + \cdots \right)$$

übertrifft.

Die Pascal'sche Schneckenlinie (Fig. 61) entsteht dadurch, daß man durch einen auf dem Umfang eines Kreises gelegenen Punkt A Geraden zieht und auf dieselben von ihrem andern Schnittpunkte B mit dem Kreise an gerechnet die Stücke BM = BN = m aufträgt. Ist also der Halbmesser des Kreises = a, so ist die Gleichung der Curve

$$r = 2a \cos t + m.$$

Hieraus folgt

$$ds = dt \sqrt{m^2 + 4a^2 + 4am \cos t} = dt \sqrt{(2a + m)^2 - 8ma \sin^2 \tfrac{1}{2} t}.$$

Also ist der Bogen

$$XM = \int_0^t dv \sqrt{(2a + m)^2 - 8am \sin^2 \frac{v}{2}}.$$

Setzt man hier $v = 2\varphi$, so ist Bogen

$$XM = 2 \int_0^{\frac{1}{2}t} d\varphi \sqrt{(2a + m)^2 - 8am \sin^2 \varphi}.$$

Da nun, wenn

$$x = \alpha \sin \varphi, \; y = \beta \cos \varphi$$

die Gleichungen einer Ellipse sind, der von der Y Axe an gerechnete elliptische Bogen, welcher dem Winkel $\frac{t}{2}$ correspondirt,

$$= \int_0^{\frac{1}{2}t} d\varphi \sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2) \sin^2 \varphi}$$

ist; so kann man, um eine Vergleichung beider Bögen anzustellen, eine Ellipse construiren, deren Achsen

$$\alpha = 2a + m, \; \beta = 2a - m,$$

und deren Bogen

$$= \int_0^{\frac{t}{2}} d\varphi \sqrt{(2a + m)^m - 8am \sin^2 \varphi}.$$

Man hat also Bogen MX = dem doppelten elliptischen Bogen, welcher dem nemlichen halben Polarwinkel $\frac{t}{2}$ correspondirt. Letzterer ist leicht zu construiren. Man construire nemlich aus den Achsen AP und AY = AX eine Ellipse, halbire den Winkel XAM und ziehe von dem Schnittpunkte R dieser Halbirungslinie mit dem Kreise XRY eine Parallele zu AX; in Q, wo diese die Ellipse trifft, wird der fragliche Bogen PQ abgeschnitten, welcher die Hälfte von XM ist. Der Umfang der ganzen Schneckenlinie ist gleich dem Umfange der ganzen Ellipse.

4. Rectificationen mittelst elliptischer Integrale.

§. 201. **Rectificationen der Ellipse.** Die elliptischen Integrale können zur Lösung verschiedener mit der Rectification der Ellipse in Verbindung stehender Aufgaben benutzt werden, da das elliptische Integral zweiter Art die Länge eines elliptischen Bogens unmittelbar ausdrückt. Denn für CB = b, AC = a, CP = x (Fig. 34) hat man Bogen

$$\mathrm{BM} = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - c^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

oder Bogen

$$\mathrm{BM} = a \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi} = aE(c, \varphi),$$

wo Winkel BCN = φ als unabhängige Veränderliche gilt. $E(c, \varphi)$ bedeutet mithin einen elliptischen Bogen, wenn die halbe große Achse = 1, die Excentricität = c und die Amplitude φ das Complement der excentrischen Anomalie des Endpunktes M ist; das vollständige elliptische Integral $E(c, \frac{1}{2}\pi) = E(c)$ gibt den elliptischen Quadranten.

Die Gleichung

$$E(c, \varphi) + E(c, \psi) - E(c) = c^2 \sin\varphi \sin\psi$$

des §. 146, wo die entsprechende Amplitudengleichung

$$\tang\psi \cdot \tang\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} = \frac{a}{b},$$

liefert, wenn mit a multiplicirt wird:

$$aE(c, \varphi) - a\{E(c) - E(c, \psi)\} = ac^2 \sin\varphi \sin\psi.$$

Dieser von Fagnani gegebene Satz sagt also aus, daß zu jedem vom Endpunkte der kleinen Achse BN an gerechneten Bogen ein anderer vom Endpunkte der großen Achse an ausgehender AM gehört, welcher von dem ersten um eine algebraische Größe verschieden ist.

Nimmt man $\psi = \varphi$, wodurch $\tang^2\varphi = \frac{a}{b}$ und

$$ac^2 \sin\varphi \sin\psi = a - b \text{ wird,}$$

so erhält man einen Punkt K auf der Ellipse, für welchen die Differenz der Bögen BK und AK gleich der Differenz der halben Achsen ist. Man hat dann

$$\text{arc BK} = \tfrac{1}{2}E(c) + \tfrac{1}{2}(a - b)$$

und

$$\text{arc AK} = \tfrac{1}{2}E(c) - \tfrac{1}{2}(a - b).$$

Die Gleichung

$$2E(c, \varphi) - E(c, \varphi_2) = c \sin^2\varphi \sin\varphi_2$$

mit der dazugehörigen

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \Delta\varphi_2 = \cos\varphi_2$$

dient zur Verdoppelung und Halbirung der elliptischen Bögen.

§. 202. **Rectificationen der Hyperbel.** Aehnliche Relationen gelten für die Hyperbel. Es sei CA (Fig. 62) die halbe Hauptachse a, AB die halbe Nebenachse b, die Excentricität $\sqrt{a^2 + b^2} = \varepsilon$; CP = x, MP = y und arc AM = s. Man findet

$$s = \int_a^x dx \sqrt{\frac{\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}.$$

Nehmen wir $CE = \frac{b^2}{\varepsilon}$, ziehen EQ parallel zu AB, fällen auf diese die Senkrechte MQ und sehen den Winkel ECQ $= \varphi$ als neue Veränderliche an; so ist $y = \frac{b^2}{\varepsilon} \operatorname{tang} \varphi$ und

$$x = a\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 - b^2}{\varepsilon^2}\sin^2\varphi}.$$

Setzt man der Abkürzung halber

$$\frac{\varepsilon^2 - b^2}{\varepsilon^2} = \frac{a^2}{\varepsilon^2} = c^2,$$

so findet man leicht

$$dx = \frac{a(1 - c^2)\sin\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

und

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}} = \frac{1}{c\sin\varphi};$$

wodurch entsteht

$$s = \frac{b^2}{\varepsilon}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}},$$

indem $\varphi = 0$ wird für x = a. Differentiirt man den Ausdruck

$$\operatorname{tang}\varphi \cdot \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi} = \operatorname{tang}\varphi \cdot \Delta\varphi,$$

so entsteht

$$d\left\{\operatorname{tang}\varphi \cdot \Delta\varphi\right\} = \frac{(1-c^2)d\varphi}{\cos^2\varphi\Delta\varphi} - \frac{(1-c^2)d\varphi}{\Delta\varphi} + \Delta\varphi d\varphi;$$

folglich durch Integration zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$.

$$\operatorname{tang}\varphi \cdot \Delta\varphi = (1-c^2)\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\Delta\varphi} - (1-c^2)F(c,\varphi) + E(c,\varphi).$$

Mit Hülfe dieser Relation ergibt sich, weil $c = \frac{a}{\varepsilon}$ ist, der Ausdruck:

$$s = \frac{b^2}{\varepsilon} F(c, \varphi) - \varepsilon E(c, \varphi) + \varepsilon \operatorname{tang} \varphi \Delta\varphi.$$

wonach ein hyperbolischer Bogen durch elliptische Integrale der ersten und zweiten Art dargestellt wird. Da sich die Function F durch E ausdrücken läßt, so kann also auch jeder hyperbolische Bogen durch elliptische Bögen ausgedrückt werden.

Wird durch den Punkt M eine Tangente an die Hyperbel gelegt und vom Ursprung C eine Senkrechte auf jene Tangente errichtet; so haben wir für die Gleichungen dieser beiden Linien

$$Y = \frac{b^2x}{a^2y} X - \frac{b^2}{y}$$

und

$$Y = -\frac{a^2y}{b^2x} X.$$

Daraus ergeben sich für die Coordinaten des Durchschnittspunktes T die Werthe:

$$X = \frac{b^4a^2x}{a^4y^2 + b^4x^2} \text{ und } Y = \frac{a^4b^2y}{a^4y^2 + b^4x^2},$$

oder, wenn statt y der Werth $\frac{b^2}{\varepsilon} \operatorname{tang} \varphi$

und statt x der Werth

$$\frac{a}{\cos\varphi} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\varepsilon^2} \sin^2\varphi}$$

eingeführt wird:

$$X = a \cos\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}$$

und

$$Y = -\frac{a^2}{\varepsilon} \sin\varphi \cos\varphi.$$

Mithin

$$X - x = \frac{a \sin^2\varphi}{\cos\varphi} \Delta\varphi$$

und

$$Y - y = -\varepsilon \operatorname{tang} \varphi (\Delta\varphi)^2;$$

woraus

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = \varepsilon^2 \operatorname{tang}^2\varphi \cdot (\Delta\varphi)^2.$$

Es ist folglich das Längestück MT gleichbedeutend mit ε tang $\varphi \cdot \Delta\varphi$. Hiernach gibt die obige unter die Form:

$$\varepsilon \operatorname{tang} \varphi \Delta\varphi - s = \varepsilon \cdot E(c, \varphi) - \frac{b^2}{\varepsilon} F(c, \varphi)$$

gebrachte Gleichung, die Differenz zwischen jenem Stück der Tangente und dem Bogen.

Macht man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so wird der Bogen AM unendlich und die Differenz zwischen jenem Stücke der Tangente und dem Bogen reducirt sich auf:

$$\varepsilon \cdot E(c) - \frac{b^2}{\varepsilon} F(c).$$

Sind M, N, Q drei Punkte einer Hyperbel, deren Amplituden φ, ψ, μ der Gleichung

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

genügen, so besteht zwischen den Hyperbelbögen AM, AN, AQ, welche durch $H(\varphi)$, $H(\psi)$, $H(\mu)$ bezeichnet werden mögen, folgende Relation:

$$H(\varphi) + H(\psi) + H(\mu) = -\varepsilon \{E(c, \varphi) + E(c, \psi) - E(c, \mu)\}$$
$$+ \varepsilon \{\operatorname{tang} \varphi\Delta\varphi + \operatorname{tang} \psi\Delta\psi - \operatorname{tang} \mu\Delta\mu\};$$

oder

$$H(\varphi) + H(\psi) - H(\mu)$$
$$= \varepsilon \{\operatorname{tang} \varphi\Delta\varphi + \operatorname{tang} \psi\Delta\psi - \operatorname{tang} \mu\Delta\mu - c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\mu\},$$

wenn statt

$$E(c, \varphi) + E(c, \psi) - E(c, \mu)$$

sein Werth

$$c^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$$

substituirt wird.

§. 203. **Rectificationen der Lemniscate.** Die Polargleichung der Lemniscate (Fig. 15)

$$r^2 = a^2 \cos 2t = a^2 (\cos^2 t - \sin^2 t)$$

liefert, wenn man den Punkt A, wo die Curve die Achse der x schneidet, als Anfangspunkt der Bögen gelten läßt:

$$s = a \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t - \sin^2 t}}.$$

Setzt man

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi,$$

so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right).$$

Der Lemniscatebogen kann demnach durch eine elliptische Function der ersten Art dargestellt werden, wo die Amplitude von der Größe des Bogens abhängt, der Modulus aber constant und gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

In dem ersten Viertel AMC der Curve erstreckt sich der Werth von φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so daß dieses Viertel gleich $F(\sqrt{\frac{1}{2}})$ ist. In dem zweiten Viertel CNB erstreckt sich der Werth von $\frac{1}{2}\pi$ bis π; in dem dritten BQC von π bis $\frac{3}{2}\pi$; in dem vierten CRA endlich von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π.

Die Eigenschaften der elliptischen Function der ersten Art lassen sich so in Eigenschaften der Lemniscate umsetzen, dergestalt daß deren Bögen wie Kreisbögen addirt oder multiplicirt werden können.

Um z. B. zwei Bögen, deren Amplituden φ und ψ sind, zu addiren oder in einen einzelnen gleichgeltenden zu verwandeln, braucht man nur die Größe μ mittelst der Relation

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \psi\right) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \mu\right)$$

zu bestimmen, der jederzeit eine algebraische Gleichung entspricht.

§. 204. **Rectification der Cylinderfocale** (Fig. 19). Verlegt man den Pol nach A, so ist wegen AN = AC — BC für AP als Polarachse

$$r = \frac{1}{\sin t} - \operatorname{cotg} t = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$$

die Polargleichung der Focale. Hieraus folgt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + 4 \sin^2 \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} t}}{2 \cos^2 \frac{1}{2} t} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 t}}{1 + \cos t},$$

d. h. wenn Zähler und Nenner mit 1 — cos t multiplicirt und

$$\sqrt{1 + \sin^2 t} = \Delta$$

gesetzt wird:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\Delta - \Delta \cos t}{\sin^2 t} = \frac{1 + \sin^2 t}{\Delta \sin^2 t} - \frac{\Delta \cos t}{\sin^2 t},$$

oder

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\varDelta \sin^2 t} - \frac{\varDelta \cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{\varDelta}.$$

Der bei beiderseitiger Integration erscheinende Werth $\int \frac{dt}{\varDelta \sin^2 t}$ wird mittelst der allgemeinen Reductionsformel

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^{2n}\varphi \varDelta(c, \varphi)} = - \frac{\cos \varphi \varDelta (c, \varphi)}{(2n-1) \sin^{2n-1}\varphi}$$

$$+ \frac{(2n-2)(1+c^2)}{2n-1} \int \frac{d\varphi}{\sin^{2n-2}\varphi \varDelta (c, \varphi)} - \frac{(2n-3)c^2}{2n-1} \int \frac{d\varphi}{\sin^{2n-4}\varphi \varDelta (c, \varphi)}$$

für $n = 1$, $c^2 = -1$ in

$$- \int \frac{\sin^2 t \, dt}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} - \cot t \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} - \int \sqrt{1 + \sin^2 t} \, dt - \cot t \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

umgewandelt, während das andere Integral

$$\int - \frac{\cos t}{\sin^2 t} \varDelta \, dt = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 t}}{\sin t} - l\,(\sin t + \sqrt{1 + \sin^2 t})$$

ist. Hiernach ergibt sich

$$s = \int \frac{dt}{\varDelta} - \int \varDelta dt - \varDelta \cot t + \frac{\varDelta}{\sin t} - l(\sin t + \varDelta) + \int \frac{dt}{\varDelta} + C.$$

Fängt der Bogen vom Pol an, wo r mit t verschwindet; so ist

$$s = \varDelta \operatorname{tg} \frac{t}{2} - l\,(\sin t + \varDelta) + 2 \int_0^t \frac{dt}{\varDelta} - \int_0^t \varDelta dt.$$

Um letztere Integrale auf elliptische zurückzuführen, mache man

$$t = \pi/2 - \varphi;$$

wodurch sich

$$\varDelta = \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

in

$$\sqrt{2\,(1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi)}$$

verwandelt; mithin werden dieselben

$$= \sqrt{2} \left\{ \int_{\pi/2}^{\pi/2 - t} \sqrt{1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi} \, d\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi/2 - t} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \right\}.$$

Folglich

$$s = \operatorname{tg}\frac{t}{2}\sqrt{1+\sin^2 t} - l\,(\sin t + \sqrt{1+\sin^2 t})$$

$$+\sqrt{2}\left\{E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{2}-t\right)-F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{2}-t\right)+F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Für $t = \pi/2$ z. B. ist die Länge des Bogens ANB

$$= \sqrt{2} - l\,(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\left\{F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= 1,2447 \cdots AB.$$

Viertes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen.

I. Integration der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung.

1. Unmittelbare Integration. Trennung der Veränderlichen.

§. 205. **Allgemeine Form der Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen.** Bisher wurde angenommen, daß die Differentialquotienten der in Rede stehenden Function unmittelbar durch die unabhängige Veränderliche ausgedrückt waren. Nunmehr werden wir uns mit den Differentialgleichungen beschäftigen, d. h. den Gleichungen, welche Relationen zwischen der unabhängigen Veränderlichen x, der Function y derselben und den Differentialen oder Derivirten der verschiedenen Ordnungen dieser Function ausdrücken. Derartige Gleichungen integriren heißt die Relation zwischen x und y finden, die primitive Gleichung oder das Integral der gegebenen Differentialgleichung bestimmen. — Jede Gleichung von der Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

wird eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen genannt. Sie kann jederzeit auf folgende Form:

$$Mdx + Ndy = 0$$

gebracht werden, wobei im Allgemeinen M und N zwei Functionen von x und y bezeichnen.

Analytisch betrachtet läuft mithin das Problem der Integration einer solchen Differentialgleichung darauf hinaus, eine Relation zwischen

x und y aufzustellen, welche differentiirt und in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, den vorgelegten Ausdruck $-\frac{M}{N}$ wieder zum Vorschein bringt. Von einem geometrischen Gesichtspunkte ausgehend gibt die in Rede stehende Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = \varphi\,(x,\ y)$$

die trigonometrische Tangente des Winkels an, welchen die in einem beliebigen Punkte einer unbekannten Curve gezogene Berührungsgerade mit der Achse der Abscissen macht. Nimmt man also willkührlich die Coordinaten $x = a$, $y = b$ eines ersten Punktes M an und zieht dann die Linie MT, welche mit der Abscissenachse einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente

$$= \varphi\,(a,\ b)$$

ist; so wird gedachte Gerade MT die gesuchte Curve im Punkte M berühren. Da nun die krumme Linie und ihre Tangente in der Nähe des Berührungspunktes als zusammenfallend angesehen werden können, so wird der auf der geraden Linie MT in einer sehr kleinen Entfernung von M liegende Punkt M′ der Curve nahezu angehören, d. h. sehr nahe

$$\varDelta y = \frac{dy}{dx}\,\varDelta x$$

sein. Vermittelst der beiden Coordinaten

$$a + \varDelta x \text{ und } b + \frac{dy}{dx}\,\varDelta x$$

liefert dann die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\,(y,\ x)$$

eine zweite Tangente, welche wieder dazu dienen kann, einen dritten Punkt der Curve zu bestimmen. Die Fortsetzung dieses Verfahrens wird ein Polygon liefern, das von der gesuchten Curve, welcher die gegebene Differentialgleichung zukommt, desto weniger abweichen wird, je kleinere Werthe man dem Zuwachse $\varDelta x$ beigelegt hat. Aus dieser Construction folgt, daß eine Differentialgleichung der ersten Ordnung einer unendlichen Anzahl von Curven angehört, indem man irgend einen Punkt beliebig annehmen kann. Nichts desto weniger haben alle diese Curven eine gemeinsame Eigenschaft, welche durch die gegebene Differentialgleichung ausgedrückt wird. Diese Eigenschaft besteht in der Bestimmung der Neigung der Tangente in einem beliebigen

Punkte als Function der Coordinaten dieses Punktes und gibt ein Mittel an die Hand die Curve zu construiren, sobald irgend einer ihrer Punkte festgestellt worden ist.

Aus dem Gesagten läßt sich leicht entnehmen, was es für eine Bewandtniß mit der primitiven Gleichung oder dem Integral der gegebenen Differentialgleichung hat. Dieses Integral muß, insofern es dieselbe Allgemeinheit wie die gegebene Differentialgleichung haben und sämmtliche Curven in sich begreifen soll, welche vermittelst jener Gleichung construirt werden können, eine willkührliche oder eigentlich noch zu bestimmende Constante enthalten. Die Unbestimmtheit gedachter Constante verleiht dem Integrale die erforderliche Allgemeinheit, damit es alle jene Curven darstellt, denen die vorgelegte Differentialgleichung entsprechen kann. Außerdem muß dieses Integral oder diese ursprüngliche Gleichung der gegebenen Differentialgleichung genügen, d. h. es müssen die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ aus der ursprünglichen Gleichung und ihrem Differentiale gezogen und eingesetzt in die gegebene Differentialgleichung dieselbe entweder identisch machen, oder es muß die Elimination der willkührlichen Constante aus der ursprünglichen Gleichung und ihrer Derivirten die gegebene Differentialgleichung wieder zum Vorschein bringen. — Jede ursprüngliche Gleichung, welche eine willkührliche Constante einschließt und der gegebenen Differentialgleichung genügt, wird das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung genannt. Aus diesem allgemeinen Integrale gehen die besonderen Integrale hervor, wenn man der willkührlichen Constante verschiedene besondere Werthe beilegt.

Zur Erläuterung des Gesagten mögen folgende zwei Beispiele dienen.

1) Es sei die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} - y + b = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-b}{x}$$

gegeben. Man erkennt bald, daß diese Gleichung einer geraden Linie angehört, welche durch den Punkt geht, dessen Coordinaten $x = 0$ und $y = b$ sind. Das allgemeine Integral ist:

$$y - ax - b = 0,$$

wo a eine willkührliche Constante bedeutet; läßt man a von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren, so erhält man die besonderen Integrale. Setzt

man die Werthe $y = ax + b$ und $\frac{dy}{dx} = a$, welche aus dem allgemeinen Integral hervorgehen, in die gegebene Differentialgleichung; so wird dieselbe identisch.

2) Es sei ferner die Differentialgleichung

$$dy - (a + 2x)\, dx = 0$$

gegeben, deren primitive Gleichung ist:

$$y - (ax + x^2 + b) = 0,$$

wo b eine willkührliche Constante bezeichnet. Die primitive Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Achse parallel zur Achse der y liegt, in einem Abstande $-\frac{a}{2}$ von derselben. Um alle Parabeln zu bekommen, denen die gegebene Differentialgleichung angehört, muß man in der primitiven Gleichung der Constante b alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegen.

§. 206. **Unmittelbare Integration.** Wenn schon die Integration der Differentialfunctionen mit einer Variabeln öfters bedeutenden Schwierigkeiten unterliegt, so wird die Integration der Differentialgleichungen noch weit größere Hindernisse darbieten. Uebrigens wird die Integration einer Differentialgleichung schon als beendet angesehen, wenn man dahin gelangt ist, ihr Integral so darzustellen, daß darin nur noch Integrationen von Differentialformeln von einer Veränderlichen oder sogenannte Quadraturen zu bewerkstelligen sind. — Ehe man sich auf weitere Schritte zur Bestimmung des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ einläßt, wobei, wie schon gesagt, im Allgemeinen M und N Functionen von x und y bedeuten, wird man vor Allem untersuchen, ob $Mdx + Ndy$ nicht etwa das genaue Differential einer gewissen Function $u = F(x, y)$ ist, so daß sich die gegebene Differentialgleichung auf die Form:

$$du = d f(x, y) = 0$$

bringen läßt. In diesem Falle ist klar, daß das allgemeine Integral dann ist:

$$u = f(x, y) = C.$$

Beispiele. 1) Für

$$xdy + ydx = d(xy) = 0$$

ist das allgemeine Integral:

$$xy = C.$$

2) Für

$$dy - f(x)\, dx = d(y - \int f(x)\, dx) = 0$$

ist das allgemeine Integral:

$$y - \int f(x)\, dx = C.$$

Es wirft sich darum zunächst die Frage auf, woran sich erkennen läßt, daß der Ausdruck

$$Mdx + Ndy$$

das genaue Differential einer Function

$$u = f(x, y)$$

sei. Das vollständige Differential einer solchen Function ist:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy,$$

wo $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ die Differentialquotienten der Function u in Bezug auf x allein und in Bezug auf y allein bezeichnen. Soll demnach der Ausdruck Mdx + Ndy aus der unmittelbaren Differentiation der Function u hervorgegangen sein, so muß sein:

$$M = \frac{du}{dx}, N = \frac{du}{dy}.$$

Nach §. 58 ist aber stets

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx};$$

folglich muß auch sein

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

welche Bedingung erfüllt werden muß, wenn Mdx + Ndy das genaue Differential einer Function von x und y sein soll.

Wenn dieser Bedingung Genüge geschieht, steigt man zu dem Integral auf folgende Weise auf:

Es sei

$$du = Mdx + Ndy;$$

mithin das partielle Differential in Bezug auf x:

$$\frac{du}{dx} dx = Mdx,$$

woraus

$$u = \int Mdx + Y,$$

wo Y eine beliebige Function von y bedeutet, weil die Integration sich nur auf die Veränderliche x bezog; allein hier wird diese Function dadurch bestimmt, daß der Werth von u noch der Gleichung

$$N = \frac{du}{dy} \text{ genügen muß.}$$

Nun gibt die Gleichung $u = \int Mdx + Y$:

$$\frac{du}{dy} = \int \frac{dMdx}{dy} + \frac{dY}{dy}.$$

Da diese Größe gleich N sein muß, so erhält man:

$$\frac{dY}{dy} = N - \int \frac{dMdx}{dy};$$

woraus

$$Y = C + \int \left(N - \int \frac{dM}{dy} dx\right) dy;$$

mithin das gesuchte Integral:

$$u = C + \int Mdx + \int \left(N - \int \frac{dMdx}{dy}\right) dy.$$

Dieses Resultat lehrt, daß

$$N - \int \frac{dMdx}{dy}$$

eine Function von y allein ist, weil im entgegengesetzten Falle Mdx und Ndy nicht die partiellen Differentiale einer und derselben Function u wären. Die Ausführbarkeit der Integration

$$\int \left(N - \int \frac{Mdx}{dy}\right) dy$$

setzt die oben aufgestellte Bedingung voraus: denn damit das Differential von

$$N - \int \frac{dMdx}{dy}$$

in Bezug auf x den Werth Null habe,

$$\text{muß } \frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy} \text{ sein.}$$

Hätte man zuerst gesetzt:

$$u = \int Ndy + X,$$

wo X eine Function von x bezeichnet; so würde man für das allgemeine Integral gefunden haben:

$$u = C + \int Ndy + \int \left(M - \int \frac{dN}{dx} dy\right) dx,$$

wo die Function

$$M - \int \frac{dN}{dx} dy$$

kein x enthält.

1) Als erstes Beispiel diene die Differentialfunction:

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

oder

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Da

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ist, so genügt die Differentialfunction der Bedingung der Integrabilität. Mithin

$$u = \int \frac{ydx}{x^2 + y^2} + Y$$

oder

$$u = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y.$$

Daraus entspringt durch Differentiation:

$$\frac{du}{dy} = - \frac{x}{y^2 + x^2} + \frac{dY}{dy}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der vorgelegten Function, so findet man

$$\frac{dY}{dy} = 0;$$

folglich das gesuchte Integral

$$u = C + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right).$$

2) Es sei als zweites Beispiel:

$$\frac{dx}{x} + \frac{y^2 dx}{x^3} - \frac{ydy}{x^2} + \frac{(ydx - xdy)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^3} + \frac{dy}{2y};$$

oder

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2 + y\sqrt{x^2 + y^2}}{x^3}\right)dx + \left(\frac{1}{2y} - \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2}\right)dy.$$

Man findet

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = \frac{2y}{x^3} + \frac{x^2 + 2y^2}{x^3\sqrt{x^2 + y^2}},$$

woraus folgt, daß die vorgelegte Function unmittelbar integrirt werden kann. Zuerst erhält man:

$$\int Mdx = lx - \frac{y^2}{2x^2} + y\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2 + y^2};$$

dann gibt die theilweise Integration

$$\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2 + y^2}},$$

leicht findet man, wenn

$$\sqrt{x^2 + y^2} = yz$$

gesetzt wird, daß:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{y}\, l\left(\frac{-y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right);$$

folglich

$$\int Mdx = lx - \frac{y^2}{2x^2} - y\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} l\left(\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right).$$

Außerdem findet man $Y = \frac{1}{2} ly$;

folglich das allgemeine Integral

$$u = C + lx - \frac{y^2}{2x^2} - y\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} l\left(\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right).$$

§. 207. **Trennung der Veränderlichen.** Die gegebene Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

läßt sich immer integriren oder wenigstens auf die Integration von Differentialfunctionen von einer einzigen Veränderlichen zurückführen, wenn eine Trennung der Veränderlichen vorgenommen, d. h. die Differentialgleichung auf die Form:

$$Xdx + Ydy = 0$$

gebracht werden kann, wobei X eine bloße Function von x, und Y eine bloße Function von y bedeutet. Das allgemeine Integral ist alsdann

$$\int Xdx + \int Ydy = C,$$

wo C die willkührliche Constante bezeichnet. In der Differentialgleichung

$$ydx - xdy = 0$$

z. B. läßt sich die Trennung der Veränderlichen leicht bewerkstelligen, wenn man durch xy dividirt. Man erhält auf diese Weise:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0;$$

woraus

$$l\frac{x}{y} = lC;$$

oder

$$x = Cy.$$

Eine allgemeine Differentialgleichung, in welcher die Trennung der Veränderlichen leicht bewirkt werden kann, ist folgende:

$$XYdx + X_1Y_1dy = 0,$$

wo X und X_1 Functionen von x, Y und Y_1 Functionen von y bezeichnen. Denn durch die Division mit YX_1 bekommt man sofort die gesonderte Gleichung:

$$\frac{X}{X_1}\,dx + \frac{Y_1}{Y}\,dy = 0.$$

Auf solche Art geht die Gleichung

$$x^3 y dx + (2y - 1)\, x dy = 0$$

über in:

$$x^2 dx + \frac{(2y - 1)}{y}\, dy = 0;$$

woraus durch Integration entspringt:

$$\frac{x^3}{3} + 2y - ly = C.$$

Wenn sich die Trennung der Veränderlichen unmittelbar nicht bewerkstelligen läßt, so muß man durch Umformung oder durch Einführung neuer Variabeln solche Trennung herbeizuführen suchen. Ein einfaches Beispiel einer derartigen Umformung bietet uns die Gleichung:

$$(ax + by + c)\, dx + (a'x + b'y + c')\, dy = 0$$

dar. Setzt man $t + \alpha$ für x und $u + \beta$ für y und nimmt die Constanten dergestalt an, daß

$$a\alpha + b\beta + c = 0 \text{ und } a'\alpha + b'\beta + c' = 0,$$

so verwandelt sich die gegebene Gleichung in:

$$(at + bu)\, dt + (a't + b'u)\, du = 0.$$

Macht man nun $u = tz$, so wird

$$(zdt + tdz)\,(a' + b'z) + (a + bz)\, dt = 0,$$

oder

$$\frac{dt}{t} + \frac{(a' + b'z)\, dz}{a + bz + a'z + b'z^2} = 0;$$

welches Resultat eine gesonderte Differentialgleichung ist, deren Integration keine weiteren Schwierigkeiten darbietet.

Die vorhergehende Transformation ist nicht mehr möglich, wenn $ab' - ba' = 0$ wird, indem dann die Werthe von α und β unendlich groß werden. In diesem Falle aber wird die gegebene Differentialgleichung durch die Elimination von b' auf folgende Form gebracht:

$$(ax + by)\left(dx + \frac{a'}{a}dy\right) + cdx + c'dy = 0.$$

Setzt man nun $ax + by = t$,

so geht sie in nachstehende gesonderte Differentialgleichung über:

$$dx + \frac{(ta' + ac')\, dt}{bca - a^2c' + t\,(ba - aa')} = 0.$$

§. 208. Bei den **homogenen Differentialgleichungen**, d. h. bei denjenigen, in welchen die Summe der Exponenten der Veränderlichen

x und y in jedem Gliede dieselbe ist, läßt sich die Sonderung der Variabeln immer ausführen. Denn ist n jene Summe der Exponenten, so verwandelt sich das beliebige Glied $Ay^k x^h$, wenn man durch x^n dividirt und $y = xt$ setzt, in At^k, weil $h + k = n$ sein soll. Im vorliegenden Falle werden sich demnach M und N auf bloße Functionen von t reduciren, so daß die Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0,$$

wenn durch M dividirt wird, die Form

$$dy + Tdx = 0$$

erhält, wo T eine Function von t allein bezeichnet. Aus $y = xt$ entsteht

$$dy = xdt + tdx;$$

durch Substitution dieses Werthes erhält man:

$$xdt + (t + T)\, dx = 0$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{dt}{t + T} = 0.$$

Läßt sich hier das Integral $\int \frac{dt}{t + T}$ durch Logarithmen darstellen, so bekommt man eine algebraische Gleichung zwischen x und y.

Ein besonderer Fall dieser Gleichungen ist folgender:

$$dy + f\left(\frac{y}{x}\right) dx = 0.$$

Setzt man nämlich $y = xt$, so verwandelt sie sich in nachstehende:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dt}{t + f(t)} = 0.$$

Beispiele. 1) Für

$$ydy + (x + 2y)\, dx = 0$$

erhält man durch die erwähnte Transformation:

$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{t^2 + 2t + 1} = 0.$$

Hieraus durch Integration:

$$l\,(cx) + l\,(1 + t) + \frac{1}{1 + t} = 0,$$

oder wenn man statt t seinen Werth $\frac{y}{x}$ einführt:

$$lc\,(x + y) + \frac{x}{x + y} = 0.$$

2) Für $\quad xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2}$

findet man

$$\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{dt};$$

woraus durch Integration entspringt:

$$x = ct + c\sqrt{1 + t^2},$$

oder wenn man statt t seinen Werth $\frac{y}{x}$ substituirt und das Wurzelzeichen zum Verschwinden bringt:

$$x^2 = 2cy + c^2.$$

2. Integration einiger der merkwürdigeren Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 209. **Lineäre Gleichung von der ersten Ordnung.** Uebrigens lassen sich in Bezug auf Integration durch Substitution keine allgemeine Regeln aufstellen. Zuweilen bleiben die neueingeführten Veränderlichen unbestimmt, um sie im Verlaufe der Operationen besonderen Bedingungen unterwerfen zu können, welche die Absonderung der Variabeln erleichtern oder die Gleichungen vereinfachen. Ein bemerkenswerthes Beispiel dieser Art bietet die Gleichung:

$$dy + Pydx = Qdx$$

dar, in welcher P und Q Functionen von x allein sind. Man nennt diese Gleichung eine lineäre Gleichung der ersten Ordnung, weil sie nur die ersten Potenzen der Function y und ihrer Derivirten y′ enthält. Passender wäre es, solche Gleichungen schlechtweg Gleichungen vom ersten Grade und von der ersten Ordnung zu nennen, weil sie am häufigsten transcendenten Curven angehören und die gerade Linie nicht eigentlich dabei in Betracht kommt. Setzt man y = zt, so geht die gegebene Gleichung in:

$$zdt + tdz + Pztdx = Qdx$$

über, worin die Absonderung auf der Stelle erfolgt, wenn man den Coefficienten von z = 0 setzt, was hier ohne Weiteres geschehen kann, indem z und t als Functionen angenommen sind, von denen eine offenbar willkührlich ist. Hiernach hat man:

$$dt + Ptdx = 0 \text{ und } tdz = Qdx.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{dt}{t} = -Pdx, \quad t = e^{-\int Pdx}.$$

Dieser Werth in die zweite eingeführt liefert:

$$dz = -dx \cdot Qe^{\int Pdx},$$

woraus

$$z = C - \int dx \cdot Qe^{\int Pdx}.$$

Aus beiden Werthen für y und t folgt endlich

$$y = e^{-\int Pdx} (C - \int dx \cdot Qe^{\int Pdx})$$

als allgemeines Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Um zu der ursprünglichen Gleichung von

$$Pydx + dy = Qdx$$

zu gelangen, ist demnach eine doppelte Integration vorzunehmen; denn einmal hat man das Integral $\int Pdx$ und das andere Mal das Integral $\int dx Qe^{\int Pdx}$ zu bestimmen. Auch sieht man, daß es unnöthig ist, dem ersten Integral eine Constante b hinzuzufügen, weil der Werth von y nur eine einzige besitzt. Uebrigens würde, wenn man dem Integrale $\int Pdx$ wirklich eine Constante b zulegen wollte, in dem Gliede $e^{-b-\int Pdx} \int dx Qe^{b+\int Pdx}$ des obigen Werthes von y ein Product $e^b e^{-b}$ vorkommen, wenn eine derartige Constante wieder verschwände.

Beispiele. 1) Es sei

$$dy + ydx = ax^3 dx.$$

Man hat hier $\int Pdx = x$;

und

$$\int Qe^{\int Pdx} dx = ae^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6);$$

folglich das gesuchte Integral

$$y = ce^{-x} + a (x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

2) Es sei ferner

$$(1 + x^2) dy - yxdx = adx.$$

Hier ist

$$\int Pdx = -l \sqrt{1 + x^2};$$

und

$$\int Qe^{\int Pdx} dx = \int \frac{adx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ax}{\sqrt{1 + x^2}} + C;$$

daher das gesuchte Integral:

$$y = ax + c \sqrt{1 + x^2}.$$

§. 210. **Fortsetzung.** Auf die Form linearer Gleichungen lassen sich andere Familien der Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Zunächst gehört zu denselben die unter dem Namen der Bernouilli'schen Gleichung bekannte Differentialgleichung:

$$dy + Pydx = Qy^n dx,$$

wo P und Q ebenfalls zwei beliebige Functionen von x bedeuten.

Denn setzt man darin

$$y^{n-1} = \frac{1}{u},$$

so verwandelt sich die Gleichung in:

$$du - (n-1)\, P \cdot udx = -(n-1)\, Qdx.$$

Macht man so in der Gleichung

$$dy + ydx = xy^2dx$$

$u = \frac{1}{y}$, so bekommt man

$$du - udx = -xdx;$$

woraus

$$u = \frac{1}{y} = x + 1 + ce^x.$$

Eben so integrirt man die Differentialgleichung:

$$y^{n-1}dy + y^n Pdx = Qdx,$$

in welcher P und Q Functionen von x sind. Denn setzt man

$$y^n = u;$$

so hat man auf der Stelle

$$du + \frac{u}{n}\, Pdx = \frac{Q}{n}\, dx.$$

Setzt man so in der Gleichung

$$xy^2dy + y^3dx = a^3\,\frac{dx}{x}$$

$u = y^3$; so erhält man

$$\frac{x}{3}\, du + udx = a^3\,\frac{dx}{x};$$

woraus durch Integration:

$$u = y^3 = \frac{3a^3}{2x} + \frac{C}{x^3}.$$

§. 211. **Die Riccatische Gleichung.** Die Differentialgleichung

$$dy + by^2dx = ax^m dx,$$

welche von dem italienischen Grafen Riccati zuerst behandelt wurde und nach demselben benannt wird, ist der Gegenstand mehrfacher Untersuchungen gewesen. Wird in jener Gleichung $m = 0$, so findet die Absonderung sofort statt, indem man alsdann hat:

$$dx = \frac{dy}{a - by^2};$$

deren allgemeines Integral ist:

$$2x\sqrt{ab} + c = l\,\frac{\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}}.$$

Ist m nicht Null, so setze man

$$y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{x^2};$$

wodurch die gegebene Gleichung in folgende übergeht:

$$x^2 dz + bz^2 dx = ax^{m+4} dx.$$

Die vorgelegte Differentialgleichung würde daher in eine homogene transformirt worden sein, wenn m = — 2 wäre. Ueberdem ließe die transformirte Gleichung eine Absonderung zu, wenn man m = — 4 hätte, weil man in diesem Falle erhielte:

$$\frac{dz}{bz^2 - a} + \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Findet keines von Beiden statt, so mache man

$$z = \frac{1}{y_1},\ x^{m+3} = x_1;$$

ferner, um abzukürzen:

$$m' = -\frac{m+4}{m+3},\ b' = \frac{a}{m+3},\ a' = \frac{b}{m+3}.$$

Dadurch gelangt man zu der Gleichung:

$$dy_1 + b'y_1^2 dx_1 = a'x_1^{m'} dx_1,$$

welche der gegebenen ähnlich ist, mithin die nämlichen Umwandlungen zuläßt; die Trennung der Veränderlichen x_1 und y_1 wird daher nach der Substitution von

$$y_1 = \frac{1}{b_1 x_1} + \frac{z_1}{x_1^2}$$

möglich sein, wenn m' = — 4.

Fände diese Bedingung nicht statt, so würde man wieder:

$$z_1 = \frac{1}{y_2},\ x_1^{m'+3} = x_2;$$

desgleichen

$$\frac{a'}{m'+3} = b'',\ \frac{b'}{m'+3} = a'',\ -\frac{m'+4}{m'+3} = m''$$

setzen; was uns die Gleichung

$$dy_2 + b''y_2^2 dx_2 = a''x_2^{m''} dx_2$$

lieferte, welche wiederum der vorgelegten ganz ähnlich ist, mithin absonderungsfähig, wenn m'' = — 4.

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man, daß sich die Riccati=sche Gleichung jederzeit absondern läßt, wenn in der Reihe der Exponenten:

$m, m' = -\frac{m+4}{m+3}, m'' = -\frac{m'+4}{m'+3}, m''' = -\frac{m''+4}{m''+3} \cdots$
einer vorkommt, welcher -4 gleich ist.

Drückt man die Größen $m', m'', \cdots$ durch m aus, so erhält folgende Werthe:

$$m' = -\frac{m+4}{m+3}, m'' = -\frac{3m+8}{2m+5}, m''' = -\frac{5m+12}{3m+7} \cdots,$$

welche Quotienten in der allgemeinen Formel

$$m^{(i)} = -\frac{(2i-1)\,m+4i}{im+2i+1}$$

enthalten sind. Da nun die entsprechende transformirte Gleichung integrirbar wird für $m^{(i)} = -4$, so liegt in der Relation

$$m = -\frac{4i}{2i-1},$$

wo i jede positive Zahl bedeutet, die Integrirbarkeit der Riccati'schen Gleichung.

Diese Gleichung bietet noch eine andere Reihe von Werthen für m dar, welche ihre Integration ermöglichen. Macht man nämlich darin

$$y = \frac{1}{y_1} \text{ und } x^{m+1} = x_1,$$

und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{a}{m+1} = b', \frac{b}{m+1} = a', -\frac{m}{m+1} = m';$$

so ergibt sich die Gleichung:

$$dy_1 + b'y_1^2\,dx_1 = a'x_1^{m'}dx_1,$$

welche, da sie der vorgelegten ganz ähnlich ist, auch dieselben Operationen zuläßt. Man gelangt daher zu einer trennbaren Transformirten, wenn:

$$m' = -\frac{4i}{2i-1} \text{ oder } -\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1}$$

$$\text{oder } m = -\frac{4i}{2i+1} \text{ ist.}$$

§. 212. **Fortsetzung.** Erstes Beispiel. Für die Gleichung

$$dy - y^2 dx = x^{-8/3}\,dx$$

ist $m = -{}^8/_3$, wonach m der Form $-\frac{4i}{2i-1}$ angehört. Man setze darum

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{z}{x^2};$$

Hieraus folgt

$$x^2 dz - z^2 dx = x^{4/3} dx.$$

Man mache nun

$$z = \frac{1}{y_1} \text{ und } x^{1/3} = x_1;$$

dadurch verwandelt sich die letztere Gleichung in:

$$dy_1 + 3y_1^2 dx_1 = -3x_1^{-4} dx_1$$

Da die Variabeln in dieser Gleichung sich noch nicht trennen lassen, so setzen wir

$$y_1 = \frac{1}{3x_1} + \frac{z_1}{x_1^2}.$$

Dadurch entsteht die Gleichung:

$$dz_1 + \frac{3z_1^2}{x_1^2} dx_1 = -3x_1^{-2} dx_1;$$

oder

$$\frac{dz_1}{z_1^2 + 1} = -3\frac{dx_1}{x_1^2},$$

in welcher die Variabeln gesondert erscheinen.

Das Integral davon ist:

$$\text{arc } (\text{tang} = z_1) = \frac{3}{x_1} + C,$$

oder wenn statt z_1 sein Werth $\frac{3y_1x_1^2 - x_1}{3}$ eingeführt wird:

$$\text{arc } \left(\text{tang} = \frac{3y_1x_1^2 - x_1}{3}\right) = \frac{3}{x_1} + C.$$

Es ist aber

$$x_1 = x^{1/3} \text{ und } y_1 = \frac{1}{x^2y + x};$$

wodurch als Integral der vorgelegten Gleichung sich ergibt:

$$\text{arc } \left(\text{tang} = \frac{3 - yx^{5/3} - x^{2/3}}{(yx + 1)\, x^{1/3}}\right) = \frac{3}{x^{1/3}} + C.$$

Zweites Beispiel. In der Gleichung

$$dy + y^2 dx = x^{-4/3} dx$$

ist $m = -4/3$, welcher Werth in der allgemeinen Formel:

$$m = -\frac{4i}{2i + 1}$$

begriffen ist. Wir setzen daher darin

$$y = \frac{1}{y_1} \text{ und } x^{-1/3} = x_1,$$

wodurch sie die Form

$$dy_1 - 3y_1^2 dx_1 = - 3x_1^{-4} dx_1$$

annimmt. Wenn hierin

$$y_1 = - \frac{1}{3x_1} + \frac{z}{x_1^2}$$

gesetzt wird, bekommt man:

$$dz - \frac{3z^2}{x_1^2} dx_1 = - \frac{3dx_1}{x_1^2},$$

oder

$$\frac{dz}{1 - z^2} = \frac{3dx_1}{x_1^2}.$$

Das Integral hiervon ist

$$l \cdot \frac{1 + z}{1 - z} - lC = \frac{3}{x_1};$$

welches wegen

$$z = \frac{3y_1x_1^2 + x_1}{3},\ y = \frac{1}{y_1} \text{ und } x^{-1/3} = x_1$$

in

$$l\ \frac{3 + y(3x^{2/3} + x^{1/3})}{(3x^{2/3} + x^{1/3})\,y - 3} - lC = 3x^{1/3}$$

übergeht.

Jede Differentialgleichung von der Form:

$$dy + by^2x^n dx = ax^m dx,$$

wo n eine beliebige von der Einheit verschiedene Zahl bedeutet, kann auf die Riccati'sche Differentialgleichung zurückgeführt werden. Denn setzt man $x^n dx = dz$, mithin

$$x = \left\{(n + 1)\, z\right\}^{\frac{1}{n+1}} \text{ und } dx = \frac{z^{-\frac{n}{n+1}}}{(n + 1)^{\frac{n}{n+1}}} dz;$$

so bekommt man durch Substitution:

$$dy + by^2 dz = a \left\{(n + 1)\, z\right\}^{\frac{m-n}{n+1}} dz.$$

Man kann auch die Differentialgleichung:

$$dy = ay^2 dx + byx^m dx + cx^n dx$$

auf die Riccati'sche zurückzuführen versuchen. Macht man zu diesem Behufe $y = z + \alpha x^r$, wo α und r zwei unbestimmte Constanten sind; so erhält man:

$$dz = - r\alpha x^{r-1}dx + az^2dx + 2a\alpha zx^r dx$$
$$+ a\alpha^2 x^{2r}dx + bzx^m dx$$
$$+ b\alpha x^{m+r}dx + cx^n dx.$$

Setzt man nun

$$r - 1 = 2r = m + r, \text{ oder } r = m = -1;$$

so hat man die Gleichung:

$$dz = (\alpha + a\alpha^2 + b\alpha)\, x^{-2}dx + (2a\alpha + b)\, zx^{-1}dx + az^2dx + cx^n dx.$$

Diese Gleichung stimmt mit der Riccati'schen überein, wenn man setzt:

$$a\alpha^2 + b\alpha + \alpha = 0 \text{ und } 2a\alpha + b = 0;$$

mithin

$$\alpha = -\frac{1+b}{a},\ \alpha = -\frac{b}{2a},\ b + 1 = \frac{b}{2},\ b = -2.$$

Daraus folgt, daß die Gleichungen von der Form:

$$dy = ay^2dx - \frac{2ydx}{x} + cx^n dx$$

auf die Riccati'sche Gleichung zurückgeführt werden können.

§. 213. Als **letztes Beispiel** wollen wir noch die von **Euler** zuerst behandelte Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}} = \frac{dy}{\sqrt{ay^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}}$$

betrachten, in welcher die Veränderlichen getrennt sind und deren allgemeines Integral eine algebraische Function ist, während die Integrale der beiden Theile dieser Gleichung, einzeln genommen, nur durch elliptische Functionen ausgedrückt werden können.

Wir setzen

$$ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = u,$$

und

$$ay^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4 = v;$$

ferner

$$dx = dz\sqrt{u},\ dy = dz\sqrt{v},$$

wo z als unabhängige Veränderliche gilt. Man hat

$$du = (4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3)\, dx,$$
$$dv = (4ay^3 + 3a_1y^2 + 2a_2y + a_3)\, dy;$$

$$u = \frac{dx^2}{dz^2},\ v = \frac{dy^2}{dz^2},\ du = \frac{2dxd^2x}{dz^2},\ dv = \frac{2dyd^2y}{dx^2};$$

$$\frac{2d^2x}{dz^2} = 4ax^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3;\ \frac{2d^2y}{dz^2} = 4ay^3+3a_1y^2+2a_2y+a_3;$$

$$\frac{dx^2-dy^2}{dz^2}=u-v=a(x^4-y^4)+a_1(x^3-y^3)+a_2(x^2-y^2)+a_3(x-y);$$

$$\frac{d^2x+d^2y}{dz^2}=\frac{d(dx+dy)}{dz^2}=2a(x^3+y^3)+\frac{3a_1}{2}(x^2+y^2)+a_2(x+y)+a_3.$$

Wir wollen weiter

$$x-y=s \text{ und } x+y=t$$

setzen; dadurch verwandeln sich die beiden letztern Gleichungen in:

$$\frac{dsdt}{sdz^2}=\frac{a}{2}(t^3+s^2t)+\frac{a_1}{4}(3t^2+s^2)+a_2t+a_3;$$

$$\frac{d^2t}{dz^2}=\frac{a}{2}(t^3+3s^2t)+\frac{3a_1}{4}(t^2+s^2)+a_2t+a_3.$$

Zieht man sie von einander ab und multiplicirt die Differenz mit $\frac{2dt}{s^2}$, so kommt:

$$\frac{1}{dz^2}\left(\frac{2dt\,d^2t}{s^2}-\frac{2ds\,dt^2}{s^3}\right)=\frac{1}{dz^2}\cdot d\left(\frac{dt^2}{s^2}\right)=2at\,dt+a_1dt;$$

folglich, wenn man integrirt:

$$\frac{1}{dz^2}\cdot\frac{dt^2}{s^2}=at^2+a_1t+C;$$

oder

$$\frac{dt}{dz}=s\sqrt{at^2+a_1t+C}.$$

Substituirt man in die letzte Gleichung statt s, t, $\frac{dt}{dz}$ ihre Werthe:

$$x-y,\ x+y,\ \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}=\sqrt{u}+\sqrt{v};$$

so erhält man das gesuchte Integral:

$$\sqrt{ax^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}+\sqrt{ay^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}$$
$$=(x-y)\sqrt{a(x+y)^2+a_1(x+y)+C}.$$

3. Vom integrirenden Factor.

§. 214. **Existenz des integrirenden Factors.** Eine Differentialgleichung ist, wie oben und in der Differentialrechnung an geeignetem Orte schon bemerkt worden, nicht immer das unmittelbare Ergebniß der Differentiation einer Gleichung mit zwei Veränderlichen, sondern im Allgemeinen das Resultat der Elimination einer willkührlichen Constante zwischen der ursprünglichen Gleichung und deren unmittelbarer Differentialgleichung. Aber selbst wenn die ursprüng-

liche Gleichung von der Form ist

$$f(x, y) = u = c,$$

hat die zum Vorschein kommende Differentialgleichung nicht jederzeit die Form eines genauen Differentials, indem die Differentiation einen gemeinschaftlichen Factor in sämmtliche Glieder einführen kann, welcher durch das Nullsetzen des Differentials verschwindet.

So z. B. gibt die ursprüngliche Gleichung $\frac{y}{x} = C$ durch Differentiation:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0,$$

oder bloß $$xdy - ydx = 0,$$

wo die linke Seite dieser Gleichung kein genaues Differential mehr ist und ihre Integrirbarkeit von der Wiederherstellung des Factors $\frac{1}{x^2}$ abhängt.

Desgleichen gibt die ursprüngliche Gleichung

$$\frac{y^2}{2(x+y)} = c \text{ durch Differentiation:}$$

$$\frac{(y^2 + 2xy)\,dy - y^2dx}{2(x+y)^2} = 0,$$

oder bloß $$(2x + y)\,dy - ydx = 0,$$

wo die linke Seite der letzteren Gleichung ebenfalls der Bedingung der Integrirbarkeit nicht mehr genügt.

Wie aber auch die vorgelegte Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

entstanden sein mag, so kann sie doch immer durch Multiplication mit einer gewissen Function zu einem genauen Differential gemacht werden. Dieser Multiplicator, welcher im Allgemeinen eine Function von x und y ist, wird der integrirende Factor genannt. Denn es sei $u = c$, wo u eine Function von x und y sein wird, die ursprüngliche Gleichung von

$$Mdx + Ndy = 0 \text{ oder von } \frac{dy}{dx} + V = 0,$$

wo V irgend eine Function von x und y bedeutet. Die Differentiation der Gleichung $u = c$ liefert

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}} = 0,$$

welche mit der vorgelegten Differentialgleichung übereinstimmen muß, d. h. es muß sein

$$\frac{dy}{dx} + V = \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}};$$

woraus

$$\left(\frac{dy}{dx} + V\right)\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx};$$

oder mit anderen Worten, es existirt ein Factor $\frac{du}{dy}$, der geeignet ist, die Function $\frac{dy}{dx} + V$ oder die beliebige Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ von der ersten Ordnung zum genauen Differential zu machen.

Es ist zu bemerken, daß außer dem Factor $\frac{du}{dy}$ noch unendlich viele integrirende Factoren für die Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} + V = 0$$

existiren. Denn multiplicirt man die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx} + V\right)\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

mit φ (u), so hat man

$$\left(\frac{du}{dx} + V\right) \cdot \frac{du}{dy} \cdot \varphi(u) = \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)\varphi(u),$$

wo φ (u) eine beliebige Function von u bezeichnet, deren Bildung aus x und y bekannt ist. Nun ist aber die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ein genauer Differentialquotient, mithin wird auch die linke Seite ein solcher sein, oder mit anderen Worten der Ausdruck $\frac{du}{dy} \cdot \varphi$ (u) wird die Function $Mdx + Ndy$ zu einem vollständigen Differential machen, von welcher Beschaffenheit die Function φ auch sein mag. Das Integral der vorgelegten Differentialgleichung, nach Einführung gedachten Factors, wird von der Form Φ (u) sein, so daß man das allgemeine Integral

$$\Phi(u) = C$$

erhält, wo C eine willkührliche Conäante bezeichnet; oder was dasselbe ist:

$$u = c;$$

es führen demnach alle Factoren, welche in dem Ausdrucke $\varphi\ (u)\ \frac{du}{dy}$ begriffen sind, in letzter Instanz zu dem nämlichen Integrale.

§. 215 **Ermittelung des integrirenden Factors.** Um den integrirenden Factor, der durch μ dargestellt sein mag, zu bestimmen, muß man der Bedingungsgleichung der Integrabilität:

$$\frac{d\ (\mu M)}{dy} = \frac{d\ (\mu N)}{dx},$$

oder der ihr gleichgeltenden:

$$M\ \frac{d\mu}{dy} - N\ \frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0$$

Genüge leisten. Könnte man aus dieser Gleichung den Werth von μ in x und y bestimmen, so wäre man im Stande, jede Differentialgleichung von der ersten Ordnung zu integriren; allein meistens ist jene Gleichung schwieriger zu behandeln als die gegebene Differentialgleichung selbst, weil darin die Function μ von zwei Veränderlichen x und y und von zwei partiellen Differentialquotienten $\frac{d\mu}{dx}$ und $\frac{d\mu}{dy}$ abhängt. Daher findet man in den meisten Fällen den integrirenden Factor μ nur durch glückliche Versuche oder mit zu Grundlegung der obenstehenden Bedingungsgleichung von einer gewissen Voraussetzung ausgehend untersucht, ob mit derselben jener Gleichung irgend wie genügt werden kann.

Wäre μ bloß eine Function von x, so geht unsere Bedingungsgleichung in:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)$$

über, weil dann $\frac{d\mu}{dy} = 0.$

Bezeichnet man den zweiten Theil der vorstehenden Gleichung, welcher sich nach der Voraussetzung auf eine Function der Veränderlichen x reduciren muß, mit X; so hat man $\mu = e^{\int Xdx}$. Es läßt sich auch umgekehrt nachweisen, daß wenn

$$\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = X$$

eine bloße Function von x ist, jederzeit $\mu = e^{\int Xdx}$ ein integrirender Factor von $Mdx + Ndy$ ist. Man hat nämlich:

$$d\ \frac{(Me^{\int Xdx})}{dy} = e^{\int Xdx} \cdot \frac{dM}{dy};$$

ferner

$$d\frac{(Ne^{\int Xdx})}{dx} = e^{\int Xdx} \cdot \frac{dN}{dx} + NXe^{\int Xdx}.$$

Die Voraussetzung

$$\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = X$$

gibt aber:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} + X;$$

folglich

$$\frac{dM}{dy}\, e^{\int Xdx} = \frac{dN}{dx} \cdot e^{\int Xdx} + NXe^{\int Xdx},$$

oder

$$d \cdot \frac{(Me^{\int Xdx})}{dy} = d \cdot \frac{(Ne^{\int Xdx})}{dx};$$

in welcher Relation die Bedingung enthalten ist, daß die Größe

$$\mu Mdx + \mu Ndy$$

sich als ein genaues Differential herausstellt.

Würde μ bloß y enthalten, so bekäme man:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dy}{M}\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right);$$

woraus, wenn der von x unabhängige Factor von dy mit Y bezeichnet wird, $\mu = e^{\int Ydy}$.

Auf ein dem obigen analoges Verfahren wird nachgewiesen, daß, wenn

$$\frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) = Y$$

eine bloße Function von y ist, jederzeit $\mu = e^{\int Ydy}$ einen integrirenden Factor von $Mdx + Ndy$ abgibt.

Bisweilen läßt sich der integrirende Factor μ einer vorgelegten Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ ermitteln, wenn man sie in zwei Theile von der Form

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0$$

zerfällt und dann zwei Factoren μ_1 und μ_2 angeben kann, welche diese beiden Theile für sich integrabel machen. Denn es sei $\mu_1\ \varphi_1\ (u_1)$ der allgemeine Ausdruck für alle integrirenden Factore von (M_1dx+N_1dy) und $\mu_2\ \varphi_2\ (u_2)$ der allgemeine Ausdruck für jene von (M_2dx+N_2dy); so wird ein integrirender Factor μ für $Mdx + Ndy = 0$ gefunden,

wenn man die Functionen $\varphi_1(u_1)$ und $\varphi_2(u_2)$ so wählen kann, daß

$$\mu_1\varphi_1(u_1) = \mu_2\varphi_2(u_2) = \mu$$

wird. Es sei z. B.:

$$aydx + bxdy + x^m y^n (hydx + kxdy) = 0.$$

Die beiden ersten Glieder werden für sich zu einem genauen Differential, wenn man $\mu_1 = \frac{1}{xy}$, und die zwei andern Glieder für sich zu einem solchen, wenn man

$$\mu_2 = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$$

nimmt; man erhält so

$$u_1 = lx^a y^b \text{ und } u_2 = lx^h y^k.$$

Die Ausdrücke

$$\mu_1\varphi_1(u_1) = \frac{1}{xy}\varphi_1(x^a y^b)$$

und

$$\mu_2\varphi_2(u_2) = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}\varphi_2(x^h y^k)$$

werden einander gleich, wenn man statt der Functionen Potenzen nimmt und setzt:

$$x^{a\alpha - 1} y^{b\alpha - 1} = x^{\beta h - m - 1} y^{\beta k - n - 1}.$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{nh - mk}{ak - ah} \text{ und } \beta = \frac{an - mb}{ak - bh};$$

mithin der integrirende Factor

$$\mu = \frac{1}{xy}(x^a y^b)^{\frac{nh - km}{ak - bh}}.$$

§. 216. **Fortsetzung.** Lassen sich durch Transformation in einer Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ die Variabeln absondern, so ist auch unmittelbar für dieselbe der integrirende Factor bekannt. Denn sind t und r die statt x und y eingeführten Veränderlichen, durch welche die gegebene Differentialgleichung in $Pdt + Qdr = 0$ übergeht, wo P und Q Functionen von t und r sind, ferner μ ebenfalls eine Function dieser Veränderlichen, durch deren Division in die letzte Gleichung eine Trennung der Variabeln vor sich geht; so wird die Größe $\frac{P}{\mu}dt + \frac{Q}{\mu}dr = 0$ ein genaues Differential sein. Werden nun hierin wieder statt r und t ihre Ausdrücke in x und y eingeführt, so bekommt man ebenfalls ein genaues Differential

$$\frac{M}{\mu} dx + \frac{N}{\mu} dy = 0,$$

wo auch μ durch x und y ausgedrückt gedacht werden muß; es ist mithin $\frac{1}{\mu}$ der integrirende Factor von $Mdx + Ndy = 0$.

Ebenso läßt sich für eine homogene Differentialgleichung der integrirende Factor leicht bestimmen. Ist nämlich μ jener Factor der als homogen vorausgesetzten Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0,$$

so kann man setzen

$$\mu Mdx + \mu Ndy = du,$$

wo u eine Function von x und y bedeutet. Daraus entspringt nach §. 56 die Relation:

$$\mu Mx + \mu Ny = ku,$$

wo unter k der um eine Einheit vergrößerte Grad der homogenen Functionen μM und μN zu verstehen ist. Dividirt man diese beiden Gleichungen durch einander, so hat man

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{du}{ku}.$$

Es ist aber $\frac{du}{ku}$ ein genaues Differential, mithin gilt dasselbe auch von der Größe $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$.

Für die lineare Differentialgleichung

$$dy + Pydx = Qdx,$$

wo P und Q Functionen von x allein sind, sei μ der unbekannte integrirende Factor, der als eine bloße Function von x betrachtet werden mag. Wird derselbe in die vorgelegte Differentialgleichung eingeführt, so wird das Glied μQdx für sich integrirbar, und es kommt nur darauf an, μ dergestalt zu bestimmen, daß die Größe $\mu dy + \mu Pydx$ ein genaues Differential werde. Danach muß also sein:

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P, \text{ woraus } \mu = e^{\int Pdx}.$$

Wir sehen aus dem hier Gesagten, daß die Aufsuchung des integrirenden Factors als Integrationsmethode sich auf alle Fälle erstreckt, mithin vor allen übrigen Methoden beachtet zu werden verdient. Letztere können als Mittel dienen, die integrirenden Factoren der Differentialgleichungen zu ermitteln, für deren Auffindung man noch kein allgemeines Verfahren besitzt.

§. 217. **Umkehrung der Aufgabe.** Euler wurde dadurch veranlaßt die Aufgabe umzukehren, d. h. die Form der Differentialgleichungen zu bestimmen, welche durch gegebene Factoren integrabel werden. Unter Umständen kann ein derartiges Verfahren in diesem wenig vorgerückten Theile der Integralrechnung von Nutzen sein, weshalb wir ein Paar von Euler behandelte Beispiele hier mittheilen wollen.

Es sei die Differentialgleichung

$$Pydx + (y + Q)\,dy = 0,$$

wo die Functionen P und Q von x der Bedingung gemäß zu bestimmen sind, daß jene Gleichung durch den Factor $\frac{1}{y^3 + Ry^2 + Sy}$, wo R und S ebenfalls Functionen von x sind, integrirbar werde. Die Entwickelung der Bedingungsgleichung

$$d \cdot \frac{\left(\frac{Py}{y^3 + Ry^2 + Sy}\right)}{dy} = d \cdot \frac{\left(\frac{y + Q}{y^3 + Ry^2 + Sy}\right)}{dx^2}$$

gibt uns:

$$-2Py^3 - PRy^2 = (y^3 + Ry^2 + Sy)\frac{dQ}{dx} - (y + Q)\left(y^2\frac{dR}{dx} + y\frac{dS}{dx}\right).$$

Daraus erhalten wir, wenn die Coeficienten der nach den Potenzen von y geordneten Gleichung einzeln gleich Null gesetzt werden, folgende Relationen:

$$2P + \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dx} = 0,\quad PR + R\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dx} = 0,$$

$$S\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dS}{dx} = 0.$$

Die Letzte liefert $S = aQ$, wo a eine beliebige Constante bezeichnet; durch Substitution dieses Werthes verwandeln sich die beiden andern in:

$$2Pdx + dQ - dR = 0,\quad PRdx + RdQ - QdR - adQ = 0$$

und geben durch die Elimination von P:

$$(2Q - R)\,dR + (2a - R)\,dQ = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $(2a - R)^2$ und integrirt; so bekommt man:

$$\frac{Q}{(2a - R)^2} = \int \frac{RdR}{(2a - R)^3} + b,$$

oder, weil

$$\int \frac{RdR}{(2a - R)^3} = -\int \frac{dR}{(2a - R)^2} + 2a\int \frac{dR}{(2a - R)^3}$$

ist:

$$\frac{Q}{(2a-R)^2}+\frac{1}{2a-R}-\frac{a}{(2a-R)^2}=b.$$

Es ist demnach $Q = R - a + b\,(2a - R)^2$,
folglich, wegen $2Pdx + dQ - dR = 0$,

$$P = b\,(2a - R)\,\frac{dR}{dx}.$$

Wir können so für R jede beliebige Function von x setzen und erhalten dergestalt folgende Differentialgleichung:

$$by\,(2a - R)\,dR + (R - a + b\,(2a - R)^2 + y)\,dy = 0,$$

welche mittelst des Factors

$$\frac{1}{y^3 + Ry^2 + (R - a + b\,(2a - R)^2)\,ay}$$

integrabel gemacht wird.

Man soll für die Differentialgleichung von der Form:

$$Pydx + (Qy + R)\,dy = 0$$

die Functionen P, Q, R von x der Bedingung gemäß bestimmen, daß die Gleichung mittelst des Factors $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$, wo S ebenfalls eine Function von x bezeichnet, integrabel werde. Die Bedingungsgleichung $\frac{d\,(M\mu)}{dy} = \frac{d\,(N\mu)}{dx}$ liefert uns:

$$(m+1)\,Py^m(1+Sy) - nPSy^{m+1} = (1+Sy)\left(y^{m+1}\frac{dQ}{dx} + y^m\frac{dR}{dx}\right)$$
$$- \,ny\,\frac{dS}{dx}\,(Qy^{m+1} + Ry^m);$$

oder, wenn nach y geordnet wird:

$$\left((m+1)P - \frac{dR}{dx}\right)y^m + \left((m+1-n)PS - \frac{dQ}{dx} - S\frac{dR}{dx} + nR\frac{dS}{dx}\right)y^{m+1}$$
$$- \left(S\,\frac{dQ}{dx} - nQ\,\frac{dS}{dx}\right)y^{m+2} = 0.$$

Hieraus folgt

$$Pdx = \frac{dR}{m+1};\; Q = aS^n \text{ und } dQ = naS^{n-1}\,dS.$$

Substituirt man diese Werthe in das mittlere Glied, so findet man

$$SdR - (m+1)\,RdS + (m+1)\,aS^{n-1}\,dS = 0.$$

Dividirt man die letzte Gleichung durch S^{m+1} und integrirt, so bekommt man:

$$\frac{R}{S^{m+1}} = b - \frac{(m+1)\,aS^{n-m-2}}{n-m-2}.$$

Wir vertauschen die willführliche Constante a mit $(m + 2 - n)\,a$, damit werde:

$$Q = (m + 2 - n)\,aS^n,$$

$$R = bS^{m+1} + (m+1)\,aS^{n-1},$$

$$P = bS^m \frac{dS}{dx} + (n-1)\,aS^{n-2}\frac{dS}{dx}.$$

Die Differentialgleichung

$$ydS\,\left(bS^m + (n-1)\,aS^{n-2}\right)$$

$$+ dy\,\left((m-n+2)\,aS^n y + bS^{m+1} + (m+1)\,aS^{n-1}\right) = 0$$

wird integrabel mittelst des Factors $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$, wo S eine beliebige Function von x ist.

Diese beiden Beispiele sind hinreichend, um den Geist der Methode kennen zu lernen. Man hat zuvörderst in Bezug auf eine der Veränderlichen die Form der Differentialgleichung und die des integrirenden Factors aufzustellen, wobei jene Formen von solcher Beschaffenheit sein müssen, daß, wenn die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der hervorgehobenen Veränderlichen der anzusetzenden Bedingungsgleichung der Integrabilität gleich Null gemacht werden, man nicht mehr besondere Gleichungen erhält als darin unbestimmte Functionen vorkommen; daß dann diese Gleichungen sich integriren lassen, ist eine weitere Bedingung, die zu erfüllen bleibt.

4. Differentialgleichungen mit höheren Potenzen der Differentiale.

§. 218. **Allgemeine Lösung.** Die allgemeine Form einer Differentialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen x und y, in welcher höhere Potenzen von dx und dy vorkommen, ist:

$$dy^n + F_1 dy^{n-1}dx + F_2 dy^{n-2}dx^2 \cdots\cdots + F_n dx^n = 0,$$

oder

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + F_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} \cdots\cdots + F_n = 0,$$

wobei F_1, $F_2 \cdots F_n$ im Allgemeinen Functionen von x und y sind. Daraus entspringen durch algebraische Auflösung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ ebenso viele andere Differentialgleichungen der ersten Ordnung:

$$dy - f_1 dx = 0,\ dy - f_2 dx = 0, \cdots$$

als der Grad der Gleichung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ Einheiten enthält. Werden diese Gleichungen einzeln integrirt, wobei jedem Integrale eine willkührliche Constante beizufügen ist; so wird das Product aller dieser Integrale auf Null reducirten das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung abgeben. Jede Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche die nte Potenz der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ in sich enthält, hat sonach zu ihrem Integrale eine ursprüngliche Gleichung, in welcher die willkührliche Constante auf die nten Potenz erhoben vorkommt. Ein derartiges Resultat ließ sich erwarten, wenn man überlegt, daß die in Frage stehende Differentialgleichung als dadurch entstanden angesehen werden kann, daß man eine zur mten Potenz erhobene Constante aus der ursprünglichen Gleichung und ihrer unmittelbaren Derivirten eliminirt hat.

Erstes Beispiel. Aus

$$ydy^2 + 2xdydx = ydx^2$$

zieht man

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y};$$

ferner

$$\frac{ydy + xdx}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \pm dx;$$

woraus

$$\pm \sqrt{y^2 + x^2} = x + c \text{ oder } y^2 = 2cx + c^2.$$

Zweites Beispiel. Aus

$$dy^2 - axdx^2 = 0$$

ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{ax};$$

woraus durch Integration:

$$y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{ax^3} + c.$$

Läßt man das Wurzelzeichen verschwinden, so kommt:

$$(y - c)^2 = \frac{4}{9} ax^3.$$

Die hier vorgetragene Methode ist ganz allgemein, nur ist sie allen Schwierigkeiten unterworfen, welche die Auflösung der Gleichungen

mit sich führt. In einzelnen Fällen läßt sich jedoch diese Auflösung umgehen, wie wir in folgenden Paragraphen sehen werden.

§. 219. **Specielle Fälle.** Es lasse sich die gegebene Gleichung nicht in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$, aber nach y auflösen, so daß man hat

$$y = F(x, y'),$$

wobei $\frac{dy}{dx}$ kurz mit y' bezeichnet ist. Aus der letztern Gleichung entspringt durch Differentiation:

$$y' = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx},$$

d. h. eine Differentialgleichung zwischen den beiden Variabeln x und y' von der ersten Ordnung. Läßt sich daraus durch Integration eine Gleichung von der Form:

$$f(x, y', c) = 0$$

erhalten, so braucht man blos zwischen denselben und der vorgelegten Gleichung $y = F(x, y')$ die Größe y' zu eliminiren, um zu der ursprünglichen Gleichung zwischen x und y zu gelangen.

Ist die gegebene Gleichung von der Form

$$y = Px + Q,$$

wo P und Q Functionen von y' bedeuten; so bekommt man durch Differentiiren:

$$(P - y')\,dx + x\,\frac{dP}{dy'}\,dy' + \frac{dQ}{dy'}\,dy' = 0,$$

d. h. eine lineäre Gleichung von der ersten Ordnung in Bezug auf y' und x. Sie wird mithin integrirbar, wenn man sie mit dem Factor $e^{\int\frac{dP}{P-y'}}$ multiplicirt, und liefert so das Integral:

$$x + e^{-\int\frac{dP}{P-y'}}\left\{c + \int\frac{dQ}{P-y'}\,e^{\int\frac{dP}{P-y'}}\right\},$$

wo c die willkührliche Constante bedeutet.

Insbesondere verdient die Gleichung

$$y = y'x + \psi(y')$$

beachtet zu werden, woraus durch Differentiation entspringt:

$$\left(x + \frac{d\psi}{dy'}\right)\frac{dy'}{dx} = 0.$$

Dieser Relation wird Genüge gethan durch $\frac{dy'}{dx} = 0$, mithin durch

$y' = c$. Setzt man diesen Werth in der gegebenen Gleichung an die Stelle von y', so erhält man für das gesuchte allgemeine Integral:

$$y = cx + \psi(c).$$

Die Gleichung $x + \frac{d\psi}{dy'} = 0$ gibt einen Werth für y', welcher in die gegebene Gleichung substituirt zu einer ursprünglichen Gleichung zwischen x und y führt, die keine willkührliche Constante enthält. Diese primitive Gleichung, welche der gegebenen Differentialgleichung Genüge leistet und durch keinen der willkührlichen Constante beigelegten speciellen Werth aus dem allgemeinen Integral hergeleitet werden kann, wird eine *besondere Auflösung* der gegebenen Differentialgleichung genannt. Von diesen besonderen Auflösungen soll in einem der folgenden Abschnitte ausführlicher die Rede sein.

Die Gleichung

$$ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

auf die Form:

$$y = y'x + a\sqrt{1 + y'^2}$$

gebracht, liefert

$$y' = c \text{ und } x + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt das allgemeine Integral

$$y = cx + a\sqrt{1 + c^2},$$

während die zweite die besondere Auflösung $y^2 + x^2 = a^2$ bietet.

§. 220. **Fortsetzung.** Die gegebene Differentialgleichung sei von der Form:

$$x = F(y, y').$$

Daraus ergibt sich durch Differentiiren:

$$1 = \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dy'} \cdot y' \cdot \frac{dy'}{dy},$$

welche Gleichung nur y und y' enthält. Läßt sie sich integriren, so braucht man blos zwischen ihrem Integral von der Form

$$f(y, y', c) = 0$$

und der Relation

$$x = F(y, y')$$

die Variabele y' zu eliminiren, um das Integral der vorgelegten Differentialgleichung zu erhalten.

Für $$y^4 y'^2 - 2xy^3 y'^3 - a = 0$$
hat man:

$$x = \frac{y}{2y'} - \frac{a}{2y^3 y'^3}.$$

Differentiirt man und setzt $\frac{dy}{y'}$ statt dx, so kommt:

$$(y'dy + ydy')\left(1 - \frac{3a}{y'^2 y^4}\right) = 0.$$

Nimmt man den Factor $y'dy + ydy' = 0$ und integrirt, so findet man $yy' = c$. Die Elimination von y' zwischen der letzteren und der vorgelegten Gleichung führt zu dem allgemeinen Integral:

$$y^2 - 2cx - \frac{a}{c^2} = 0.$$

Eliminirt man dagegen y' zwischen

$$1 - \frac{3a}{y'^2 y^4} = 0$$

und der gegebenen Gleichung, so erhält man die Auflösung:

$$y^6 = 27ax^2.$$

Dieselbe ist jedoch keine besondere Auflösung, sondern ein particulärer Fall desjenigen Integrales, welches man durch Nullsetzung des Factors $1 - \frac{3a}{y'^2 y^4}$ erhält. Das allgemeine Integral ist für diesen Fall

$$(y^3 + c)^2 = 27ax^2.$$

Hat man blos

$$x = F(y'),$$

so folgt aus

$$dy = y'dx \text{ dann } y = xy' - \int xdy',$$

oder, wenn statt x sein Werth $F(y')$ gesetzt wird:

$$y = y'F(y') - \int F(y')\,dy'.$$

Nach bewerkstelligter Integration wird man y' aus dieser Gleichung und der vorgelegten eliminiren, um das gesuchte Integral zu erhalten.

Für

$$(1 + y'^2)\,x = 1$$

hat man

$$y = \frac{y'}{1 + y'^2} - \int \frac{dy'}{1 + y'^2}.$$

Erwägt man, daß

$$\int \frac{dy'}{1 + y'^2} = \text{arc}\,(\text{tang} = y') + c,$$

und eliminirt; so bekommt man:

$$y = \sqrt{x - x^2} - \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + c$$

als ursprüngliche Gleichung.

§. 221. **Schluß.** Wenn die Differentialgleichung in Bezug auf x und y homogen ist, so setze man $y = zx$; dadurch geht x aus der Differentialgleichung ganz weg und es bleibt nur noch eine Relation zwischen y' und z übrig. Es ist aber offenbar

$$y'dx = zdx + xdz;$$

folglich

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{y' - z} \text{ und } lx = \int \frac{dz}{y' - z};$$

deßgleichen wegen

$$\frac{dz}{y' - z} = \frac{d\,(z - y')}{y' - z} + \frac{dy'}{y' - z}$$

ist

$$lx = -\,l\,(y' - z) + \int \frac{dy'}{y' - z}.$$

Man erhält auf diese Weise, je nachdem es leichter ist, y' durch z oder z durch y' darzustellen, mittelst des ersten Ausdrucks x als eine Function von z und mittelst des zweiten Ausdrucks als eine Function von y'. Die Elimination von z oder y' gibt endlich das gesuchte Integral.

Für

$$xdy - ydx = x\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

bekommt man, wenn $y = xz$ gesetzt wird,

$$y' - z = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Mittelst der zweiten Formel findet man dann:

$$x = \frac{c\,(y' + \sqrt{1 + y'^2})}{2\sqrt{1 + y'^2}};$$

wird y' zwischen den beiden letzteren Gleichungen eliminirt, nachdem für z sein Werth $\frac{y}{x}$ substituirt worden; so findet man

$$y^2 = cx - x^2$$

als gesuchtes Integral.

Es sei

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{ax + yy'}{\sqrt{ax^2 + y^2}};$$

vermittelst der Substitution $y = xz$ entsteht:

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{a + zy'}{\sqrt{a + z^2}},$$

oder

$$(1 + y'^2)(a + z^2) = (a + zy')^2.$$

Daraus entspringt

$$y' - z = \frac{\sqrt{a - 1}}{\sqrt{a}} \sqrt{a + z^2}.$$

Mithin nach der ersten Formel:

$$lx = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a - 1}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{a + z^2}},$$

oder

$$lx = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a - 1}}\, l\,(z + \sqrt{a + z^2}) + C.$$

Indem für z sein Werth eingesetzt wird, erhält man

$$lx = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a - 1}}\, l\left(\frac{y + \sqrt{ax^2 + y^2}}{x}\right) + C.$$

Sehr leicht läßt sich die Integration der Gleichung

$$F(y', y'^2 \cdots y'^n) = 0$$

bewerkstelligen, wenn darin die Veränderlichen x und y nicht vorkommen. Denn alsdann ist y' eine constante Größe, folglich

$$y = y'x + C.$$

Man darf daher nur $\frac{y - C}{x}$ statt y' in der vorgelegten Gleichung substituiren, um das verlangte Integral zu erhalten.

II. Integration der Differentialgleichungen der höheren Ordnungen.

1. Allgemeine Betrachtungen.

§. 222. In den Differentialgleichungen von der ersten Ordnung konnte man die eine oder die andere Veränderliche als Unabhängige ansehen, ohne deshalb nöthig zu haben, irgend welche Modification in dem Integrationsverfahren eintreten zu lassen. Anders verhält es sich aber mit den Gleichungen der höheren Ordnungen, wo es durchaus erforderlich ist, anzugeben, welches Differential als constant angenom-

men wurde, und jede Transformation, welche in dieser Beziehung die Rechnung etwa erheischte, gehörig zu berücksichtigen. Soll daher dx als constant gelten statt irgend eines andern Differentials, welches in einer vorgelegten Gleichung dafür galt; so muß man nach den im §. 25 aufgestellten Regeln diese Gleichung zuvörderst darnach einrichten.

Für

$$dsdy = ad^2x, \text{ wo } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

constant vorausgesetzt wurde, bekommt man, wenn ds nicht mehr als unveränderlich angesehen wird:

$$a(s'x'' - x's'') = y's'^2.$$

Hieraus folgt, wenn man $x' = 1$ setzt, also x als unabhängige Veränderliche wählt:

$$x'' = 0;\ s'^2 = 1 + y'^2;\ s's'' = y'y'';\ y's'^2 = -as'';$$

$$s'^3 = -ay'' \text{ oder } (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = -adxd^2y.$$

Mit der Integration dieser letztern oder der ihr gleichgeltenden Gleichung

$$ay'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

werden wir uns bald beschäftigen.

Soll dx statt $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ in

$$(dx^2 + dy^2)\frac{d^2y}{dx^4} = \frac{1}{a}\cos\frac{x}{b},$$

welche Gleichung mit

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dx^4}{ds^4}\cdot\frac{1}{a}\cos\frac{x}{b}$$

oder

$$y'' = x'^4\cdot\frac{1}{a}\cos\frac{x}{b}$$

gleichbedeutend ist, constant werden; so erhält man

$$\frac{s'y'' - s''y'}{s'^3} = \frac{x'^4}{s'^4}\cdot\frac{1}{a}\cos\frac{x}{b},$$

insofern sämmtliche Derivirten als veränderlich angesehen werden. Macht man dann $x' = 1$, so kommt

$$s'^2 = 1 + y'^2,\ s's'' = y'y'';$$

ferner

$$y'' = \frac{1}{a}\cos\frac{x}{b} \text{ oder } dy' = \frac{dx}{a}\cos\frac{x}{b}.$$

Hieraus entspringt durch Integration:

$$y' = \frac{b}{a}\sin\frac{x}{b} + c \text{ und } y = k + cx - \frac{b^2}{a}\cos\frac{x}{b},$$

wo c und k zwei willkührliche Constanten sind.

Uebrigens kann es zuweilen der Integration förderlich sein, statt x irgend eine andere Veränderliche für die Unabhängige zu wählen; wir werden jedoch in der Folge, wenn wir nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerken, immer dx constant voraussetzen.

§. 223. **Anzahl der willkührlichen Constanten.** Eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen zwei Variabeln x und y hat allgemein die Form:

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

wo es sich darum handelt, y als Function von x zu bestimmen. Um von der Bedeutung einer solchen Gleichung einen deutlichen Begriff zu erhalten, betrachten wir x und y als rechtwinklige Coordinaten einer ebenen Curve. Indem wir dann nach Belieben zwei Werthe für x und y feststellen, d. h. einen beliebigen Punkt der Curve wählen, ferner der Größe $\frac{dy}{dx}$ einen willkührlichen Werth beilegen, d. h. die Neigung des Curvenelements ds gegen die Abscissenachse willkührlich annehmen, wird die gegebene Gleichung einen bestimmten Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$ liefern, vermittelst dessen die Construction der Curve bewerkstelligt werden kann. Denn läßt man x um die sehr kleine Größe Δx wachsen, so werden die den Abscissen $x + \Delta x$ und $x + 2\Delta x$ entsprechenden Ordinaten

$$y + \frac{dy}{dx}\Delta x \text{ und } y + 2\frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\overline{\Delta x}^2$$

sehr nahe als der Curve angehörig betrachtet werden können. Indem man nun den Punkt, dessen Coordinaten

$$x + 2\Delta x \text{ und } y + 2\frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\overline{\Delta x}^2$$

sind, als neuen Ausgangspunkt wählt, wird man abermals zwei sehr nahe liegende Punkte der Curve bestimmen, u. s. w.

Man sieht aus dieser Construction, daß die gegebene Differentialgleichung eine einer unendlichen Anzahl von gleichartigen Curven gemeinsame Eigenschaft ausdrückt; sie bestimmt jede dieser Curven, sobald ein Punkt derselben und die Richtung der Berührungsgerade in jenem Punkte gegeben ist. Im Allgemeinen bleiben also in der Bestimmung von y zwei Größen beliebig, oder mit andern Worten das allgemeine Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält zwei Integrationsconstanten, von denen die eine y und die andere $\frac{dy}{dx}$ bestimmt, wenn ein fester Werth von x gegeben ist.

Das Gesagte läßt sich auf die Differentialgleichungen der höheren Ordnungen ausdehnen. Es sei die Differentialgleichung von der nten Ordnung:

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdot \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

gegeben. Man kann daraus den Ausdruck des nten Differentialquotienten, mithin auch die Ausdrücke der Differentialquotienten aller höheren Ordnungen in Function der ursprünglichen Veränderlichen und der n — 1 ersten aufeinanderfolgenden Differentialverhältnisse herleiten. Betrachten wir nun die Maclaurin'sche Reihe

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\frac{dy_0}{dx} + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y_0}{dx^2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y_0}{dx^3} + \cdots,$$

welche einen Ausdruck für die Function y in einer nach ganzen Potenzen der Variabeln x fortschreitenden Reihe liefert, in solchen Werthen dieser Function und ihrer Differentialquotienten, welche dem Werthe $x = 0$ entsprechen; so werden in jenem Ausdrucke die Werthe von

$$\frac{d^ny_0}{dx^n},\ \frac{d^{n+1}y_0}{dx^{n+1}} \text{ u. s. w.}$$

als Functionen der Werthe von

$$y_0,\ \frac{dy_0}{dx},\ \cdots\cdot \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$$

bekannt sein. Indem wir dann jene Werthe in den oben aufgestellten Ausdruck von y uns eingeführt denken, erhalten wir eine Relation zwischen x und y, welche als Integral der gegebenen Differentialgleichung angesehen werden kann. Dieses Integral besitzt ebenso viel willkührliche Constanten als die Ordnung der Differentialgleichungen Einheiten enthält.

Trüge es sich zu, daß die Annahme von $x = 0$ den Ausdruck des nten oder eines folgenden Differentialquotienten unendlich machte; so würde man in der Taylor'schen Reihe $x = a$ setzen, wo a einen beliebigen Werth bedeutet, der in gedachten Functionen jene Wirkung nicht hervorbringt. Hiedurch bekäme man, wenn A, A', A'' $\cdots$ diejenigen Werthe von y und von ihren Derivirten sind, welche $x = a$ entsprechen:

$$y = A + A'(x-a) + \frac{A''(x-a)^2}{1\cdot 2} + \cdots$$
$$+ \frac{A^{(n-1)}(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} + f\left(a, A, A'\cdots A^{(n-1)}\right)\frac{(x-a)^n}{1\cdots n} + \cdots,$$

in welcher Reihe die Größen A, A', A'' $\cdots$ willkührlich sind. Man sieht auf die eine wie auf die andere Weise, daß für jede zwischen

zwei Veränderlichen bestehende Differentialgleichung eine Reihe existirt, welche als deren Integral betrachtet werden kann, abgesehen von den Schwierigkeiten, welche bei der Auffindung dieser Reihe sich darbieten können, und zwar werden in derselben ebensoviele willkührliche Constanten vorkommen, als die Ordnung der Differentialgleichung Einheiten enthält.

§. 224. **Verschiedene erste Integrale.** Vergegenwärtigen wir uns das im § 22 der Differentialrechnung Gesagte, so sehen wir, daß eine Differentialgleichung der nten Ordnung n erste Integrale von der (n — 1)ten Ordnung hat, von denen jedes eine andere willkührliche Constante enthält. Wären mithin diese n ersten Integrale bekannt, so brauchte man blos daraus die n — 1 Differentialquotienten $y', y'' \cdots y^{(n-1)}$ zu eliminiren, um das nte Integral oder die ursprüngliche Gleichung der vorgelegten Differentialgleichung von der nten Ordnung zu erhalten. Daß in dem Endresultate jene n verschiedenen willkührliche Constanten sich vorfinden, ist leicht begreiflich. So folgen z. B. aus der Differentialgleichung $y'' = ay'$ oder $adx = \frac{dy'}{y'}$ durch beiderseitige Integration die beiden verschiedenen ersten Integrale $y' = a(y - C)$ und $ax = l\,\frac{y'}{ac}$, woraus durch Elimination von y' entspringt $y = C + ce^{ax}$.

Wir sehen uns also wiederum zu dem Schlusse veranlaßt, daß jedes wie auch immer gewonnene Integral einer gegebenen Differentialgleichung von der nten Ordnung, n unbestimmte Constanten in sich schließen muß, wofern es die nämliche Allgemeinheit wie die Differentialgleichung besitzen soll.

Lagrange leitete vermittelst des Taylor'schen Lehrsatzes jene Vielheit der ersten Integrale einer gegebenen Differentialgleichung aus derselben selbst her, anstatt von der ursprünglichen Gleichung auszugehen. Gedachte Reihe liefert uns nämlich:

$$y_0 = y - x \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots;$$

und durch gleiche Anwendung derselben auf die Functionen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots$ ferner die Ausdrücke:

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{dy}{dx} - x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\frac{d^3y}{dx^3} - \cdots;$$

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\frac{d^4y}{dx^4} - \cdots;$$

$$\frac{d^3y_0}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} - x \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\frac{d^5y}{dx^5} \cdots\cdots$$

u. s. w.

Ist nun die vorgelegte Differentialgleichung von der nten Ordnung, so gibt sie alle Differentialquotienten von der nten Ordnung an in Functionen der ursprünglichen Veränderlichen und der n — 1 ersten Differentialverhältnisse ausgedrückt. Indem man diese Ausdrücke in die n ersten der vorstehenden Gleichungen substituirt, bekommt man n Differentialgleichungen von der Ordnung n — 1, von denen jede eine von den Größen

$$y_0, \frac{dx_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2} \cdots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$$

als willkührliche Constante enthält.

Eine Differentialgleichung höherer Ordnung kann ebenfalls wie die der ersten Ordnung neben ihrem allgemeinen Integral noch eine besondere Auflösung zulassen, die nicht in dem allgemeinen Integral enthalten ist.

Die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung z. B.

$$x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + x = 0$$

hat zum zweiten Integral:

$$\frac{x^3}{3} + c^2x + k - 2cy = 0,$$

wo c und k willkührliche Constanten sind. Der vorgelegten Differentialgleichung genügt aber auch noch die Gleichung

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c,$$

welche, da sie in dem allgemeinen Integral nicht enthalten ist, eine besondere Auflösung der vorgelegten Differentialgleichung bildet.

2. Integration der einfachsten Differentialgleichungen von der zweiten und von höherer Ordnung.

§. 225. **Integration der Differentialgleichungen von der Form** $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Die Integration der Differentialgleichungen ist desto größeren Schwierigkeiten unterworfen, je höher die Ordnung ist. Zuvörderst wollen wir uns mit den einfachsten Formen der Differentialgleichungen beschäftigen, bei denen die Integration sich bewerkstelligen läßt, und mit der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } \frac{dy'}{dx} = f(y')$$

den Anfang machen, wo nur der erste und zweite Differentialquotient der Function vorkommen. Man erhält daraus

$$x = \int \frac{dy'}{f(y')} + c;$$

ferner hat man

$$dy = y'dx = y' \frac{dy'}{f(y')},$$

woraus

$$y = \int \frac{y'dy'}{f(y')} + c'.$$

Es erübrigt nur noch zwischen dieser und der zuvor gefundenen Gleichung, nachdem die darin angedeuteten Integrationen ausgeführt worden sind, die Größe y' zu eliminiren, um das gesuchte Integral mit zwei willkührlichen Constanten c und c' zu erhalten.

Beispiele:

1) Es sei

$$ay'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Man findet hier

$$dx = -\frac{ady'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$dy = -\frac{ay'dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

woraus durch Integration entspringt:

$$x = c - \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

und

$$y = c' + \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Eliminirt man nun y' zwischen den beiden letzten Gleichungen, so erhält man das einen Kreis darstellende Integral:

$$(x - c)^2 + (y - c')^2 = a^2.$$

Dieses Resultat war leicht vorauszusehen, indem die vorgelegte Differentialgleichung einer Curve angehört, bei welcher der Krümmungshalbmesser constant ist.

2) Es sei $$y'' = \frac{a}{y'}.$$

Man findet

$$x = \frac{y'^2}{2a} + c \text{ und } y = \frac{y'^3}{3a} + c'.$$

Indem man hierauf y' eliminirt, erhält man das gesuchte Integral:

$$8a\,(x - c)^3 = 9\,(y - c')^2.$$

Hat man

$$y''' = f\,(y''),$$

so setze man

$$dy'' = y'''dx, \text{ mithin } \frac{dy''}{f\,(y'')} = dx.$$

Aus dieser letzten Gleichung entspringt:

$$x = \int \frac{dy''}{f\,(y'')} + c;$$

ferner aus der Gleichung

$$\frac{dy'}{dx} = y''$$

nach und nach:

$$y' = \int y''dx = \int \frac{y''dy''}{f\,(y'')} + c';$$

$$y = \int y'dx = \int \frac{dy''}{f\,(y'')} \left(\int \frac{y''dy''}{f\,(y'')} + c' \right) + c''.$$

Es bleibt nur noch übrig, y'' zwischen den beiden Gleichungen

$$x = \int \frac{dy''}{f(y'')} + c \text{ und } y = \int \frac{dy''}{f\,(y'')} \left(\int \frac{y''dy''}{f\,(y'')} + c' \right) + c''$$

zu eliminiren, um die primitive Gleichung mit drei willkührlichen Constanten zu erhalten.

Dieses Verfahren läßt sich leicht auf die Differentialgleichung einer beliebigen Ordnung von der Form:

$$y^{(n+1)} = f\,(y^{(n)}) \text{ oder } \frac{dy^{(n)}}{dx} = f\,(y^{(n)})$$

ausdehnen. Denn man hat

$$x = \int \frac{dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + c;$$

ferner

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int \frac{y^{(n)}\,dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + c';$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}\,dx = \int \left(\int \frac{y^{(n)}\,dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + c' \right) \frac{dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + c''$$

u. s. w.,

bei welcher Operation man den Werth von y als eine Function von $y^{(n)}$ durch eine Reihe von Quadaturen erhält. Indem man dann $y^{(n)}$ zwischen der so zuletzt gefundenen Gleichung und der Gleichung

$$x = \int \frac{dy^{(n)}}{f y^{(n)}} + c$$

eliminirt, wird man zu dem mit n + 1 willkührlichen Constanten behafteten gesuchten Integral gelangen.

§. 226. **Integration der Differentialgleichungen von der Form** $y^{(n+2)} = f y^{(n)}$. Der zweite Differentialquotient von y sei als Function von y allein gegeben, d. h. man habe

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\,(y).$$

Multiplicirt man

$$dy' = y''dx \text{ mit } y'dx = dy,$$

so erhält man

$$y'dy' = y''dy;$$

woraus, wenn man für y'' seinen Werth fy setzt und integrirt:

$$\frac{1}{2}\,y'^2 = \frac{1}{2}\,c + \int f y dy \text{ oder } y' = \sqrt{c + 2\int f y dy}.$$

Weiter hat man

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{\sqrt{c + 2\int f y dy}} + c'.$$

Beispiele.

1) Für
$$a^2y'' = -y$$
findet man
$$a^2y'^2 = c^2 - y^2,$$
ferner
$$dx = \frac{ady}{\sqrt{c^2 - y^2}};$$
woraus durch Integration entsteht:
$$x = a \cdot \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{c}\right) + c'$$
oder
$$\frac{y}{c} = \sin\left(\frac{x - c'}{a}\right),$$
was mit
$$y = c \sin\frac{x}{a} + c' \cos\frac{x}{a}$$
gleichbedeutend ist, wo nun c und c' andere willkührliche Constanten bedeuten.

2) Ebenso liefert

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{ay} = 1$$

das Resultat

$$\frac{1}{4}ay'^2 = c + \sqrt{ay},\ \text{woraus}\ 2dx = \frac{dy\sqrt[4]{a}}{\sqrt{c+\sqrt{y}}},$$

wenn man c in $\frac{2c}{\sqrt{a}}$ umwandelt. Macht man hierauf

$$c + \sqrt{y} = z^2,$$

so bekommt man endlich

$$x = {}^2/_3\sqrt[4]{a}\,(\sqrt{y} - 2c)\sqrt{c + \sqrt{y}} + c'.$$

Wenn die vorgelegte Gleichung ist

$$\frac{d^3y}{dx^3} = fy',$$

wo fy' eine Function von $\frac{dy}{dx}$ oder y' allein bezeichnet; so kann man statt jener Gleichung auch schreiben:

$$\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{d^2y'}{dx} = fy'dy',$$

woraus durch Integration entspringt:

$$\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 = c + 2\int fy'dy',$$

oder

$$x = c' + \int\frac{dy'}{\sqrt{c + 2\int fy'dy'}}.$$

Ferner hat man

$$dy = \frac{y'dy'}{\sqrt{c + 2\int fy'dy'}},$$

oder

$$y = c'' + \int\frac{y'dy'}{\sqrt{c + 2\int fy'dy'}}.$$

Eliminirt man y' aus diesen beiden Gleichungen, so bekommt man das gesuchte Integral, welches drei willkührliche Constanten enthält.

Das obige Verfahren läßt sich leicht auf Gleichungen von höherer Ordnung anwenden, in denen der Differentialquotient als Function desjenigen Differentialquotienten gegeben ist, dessen Ordnung um zwei Einheiten tiefer liegt.

Aus der Gleichung

$$y^{(n+2)} = f y^{(n)} \text{ oder } \frac{d^2 y^{(n)}}{dx^2} = f y^{(n)}$$

folgt

$$dy^{(n)} \cdot \frac{d^2 y^{(n)}}{dx^2} = f y^{(n)} \cdot dy^{(n)},$$

oder wenn man integrirt:

$$\frac{dy^{(n)}}{dx} = \sqrt{2 \int f y^{(n)}\, dy^{(n)} + c};$$

mithin

$$x = \int \frac{dy^{(n)}}{\sqrt{2 \int f y^{(n)}\, dy^{(n)} + c}} + c'.$$

Alsdann ist

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx = \int \frac{y^{(n)}\, dy^{(n)}}{\sqrt{2 \int f y^{(n)}\, dy^{(n)} + c}} + c'';$$

wenn man auf diese Weise weiter geht, erhält man den Werth von y als Function von $y^{(n)}$. Hierauf hat man blos noch $y^{(n)}$ zwischen der letzten so gefundenen Gleichung und der Gleichung

$$x = \int \frac{dy^{(n)}}{\sqrt{2 \int f y^{(n)}\, dy^{(n)} + c}} + c'$$

zu eliminiren, um das gesuchte allgemeine Integral zu erhalten.

§. 227. **Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, worin die Veränderliche y fehlt.** Es sei also die Gleichung

$$f(x, y', y'') = 0.$$

Setzt man $\frac{dy'}{dx}$ statt y'', so hat man blos noch eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen den Veränderlichen x und y'. Ist man nun im Stande diese Gleichung nach den gegebenen Vorschriften zu integriren und aus dem Integral den Werth von y' als Function von x oder jenen von x als Function von y' herzuleiten; so hat man in dem einen Falle:

$$y = \int y' dx = \int X dx + c',$$

und im andern:

$$y = xy' - \int x dy' = xy' - \int Y, dy' + c'.$$

Läßt sich aber weder x durch y', noch y' durch x darstellen; so muß man suchen beide Größen durch eine neue Veränderliche z auszudrücken, dergestalt daß $x = Z_1$ und $y' = Z_2$; man erhält dann

$$y = \int Z_2 dZ_1.$$

Es sei die Gleichung:

$$2x\,(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a^2 y'',$$

oder

$$2x\,(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = a^2 dy'.$$

Die Integration liefert

$$x^2 + c = \frac{a^2 y'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

ferner

$$y = \int y' dx = \int \frac{(x^2 + c)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c^2)^2}} + c'.$$

Es sei zweitens

$$1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1 + y'^2}.$$

Die Gleichung auf die Form

$$dx\,(1 + y'^2) + xy'dy' = ady'\sqrt{1 + y'^2}$$

gebracht, wird integrabel, wenn man durch $\sqrt{1 + y'^2}$ dividirt. Man findet:

$$x = \frac{ay' + c}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

ferner

$$y = y'x - \int x dy' = y'x - a\sqrt{1 + y'^2} - c l(y' + \sqrt{1 + y'^2}) + c l c',$$

oder

$$y = \frac{cy' - a}{\sqrt{1 + y'^2}} - c l\left(\frac{y' + \sqrt{1 + y'^2}}{c'}\right).$$

Es bleibt nur noch übrig, y' mit Hülfe des Werthes von x daraus zu eliminiren. Man findet nach ausgeführter Rechnung, wenn der Kürze halber

$$\sqrt{a^2 + c^2 - x^2} = z$$

gesetzt wird:

$$y = z + c l \frac{x + a}{c'(c + z)}.$$

Die Gleichung

$$2\,(a^2 y'^2 + x^2)\,y'' = xy'$$

gibt die homogene Gleichung

$$2\,(a^2 y'^2 + x^2)\,dy' = xy'dx.$$

Man setze daher $x = y'z$, wodurch entsteht:

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{zdz}{2a^2 + Z^2}.$$

Die Integration liefert:

$$y' = c\sqrt{2a^2 + z^2} \text{ oder } x = cz\sqrt{2a^2 + z^2}.$$

Aus

$$y = \int y'dx$$

folgt, wenn man für y' und dx ihre Werthe in z substituirt:

$$y = \frac{2}{3} c^2 z \,(3a^3 + z^2) + c'.$$

Um die zwischen x und y bestehende Relation zu erhalten, braucht man nur noch z zu eliminiren.

§. 228. **Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, worin die Veränderliche x fehlt.** Es sei also die Gleichung

$$f\,(y,\, y',\, y'') = 0.$$

Aus den Relationen

$$y'' = \frac{dy'}{dx},\quad dx = \frac{dy}{y'}$$

entspringt der Werth

$$y'' = \frac{y'dy'}{dy},$$

durch dessen Substitution die gegebene Gleichung in eine der ersten Ordnung zwischen y und y' übergeht. Kann man diese integriren und y' durch y darstellen, dergestalt daß $y' = \varphi y$; so ist

$$x = \int \frac{dy}{\varphi y}.$$

Ließe sich bequemer y durch y' ausdrücken, dergestalt daß $y = \varphi y'$ wird; so ist

$$x = \frac{\varphi y'}{y'} + \int \frac{\varphi y'}{y'^2}\,dy'.$$

Sollte aber weder die eine noch die andere dieser Bestimmungen gelingen, so suche man y' und y durch eine neue Veränderliche z auszudrücken, dergestalt daß $y' = Z$ und $y = Z_1$ werde, wo Z und Z_1 Functionen von y sind: man hat alsdann

$$x = \int \frac{dZ_1}{Z}.$$

Erstes Beispiel. Die Gleichung

$$y''\,(yy' + a) = y'\,(1 + y'^2)$$

verwandelt sich in:

$$dy'\,(yy' + a) = dy\,(1 + y'^2),$$

oder

$$dy - \frac{yy'dy'}{1 + y'^2} = \frac{ady'}{1 + y'^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt bei Anwendung des integrirenden Factors $\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$:

$$y = ay' + c\sqrt{1 + y'^2};$$

ferner ist

$$x = \int \frac{dy}{y'} = a\,l\,(c'y') + c\,l\,(y' + \sqrt{1 + y'^2}).$$

Zwischen diesen beiden Ausdrücken bleibt nur noch y' zu eliminiren übrig. Setzt man $c = 0$, so findet man das besondere Integral

$$y = ay' \text{ und } x = a\,l\,(c'y'),$$

woraus

$$y = Ce^{\frac{x}{a}}$$

Zweites Beispiel. Es sei

$$y'^2 + 2y''y = 0.$$

Daraus

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dy'}{y'};\ \text{ferner}\ y' = \sqrt{\frac{c}{y}};$$

folglich

$$x = \frac{2}{3\sqrt{c}}\,y^{\frac{3}{2}} + c'.$$

Drittes Beispiel. Die Gleichung

$$y'' + Ay' + By = 0,$$

wo A und B constante Größen sind, verwandelt sich in die homogene Gleichung:

$$y'dy' + Ay'dy + Bydy = 0.$$

Macht man daher

$$y' = yu,\ \text{mithin}\ dy' = ydu + udy,$$

so ergibt sich:

$$\frac{dy}{y'} = \frac{dy}{yu} = -\frac{du}{u^2 + Au + B} = -\frac{du}{(u-a)(u-b)},$$

wenn durch a und b die Wurzeln von $u^2 + Au + B = 0$ dargestellt werden. Man hat weiter, wenn man erwägt, daß

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{uy} = -\frac{du}{(u-a)(u-b)}$$

ist:

$$\frac{dy}{y} - adx = -\frac{du}{u-b}\ \text{und}\ \frac{dy}{y} - bdx = -\frac{du}{u-a};$$

mithin

$$ly - ax = l\,\frac{m}{(u - b)} \text{ und } ly - bx = l\left(\frac{n}{u - a}\right);$$

oder

$$u - b = \frac{m}{y}\,e^{ax} \text{ und } u - a = \frac{n}{y}\,e^{bx}.$$

Hieraus ergibt sich durch Subtraction:

$$y\,(b - a) = ne^{bx} - me^{ax},$$

oder wenn die Constanten geändert werden:

$$y = Ce^{ax} + De^{bx}.$$

Sind a und b imaginär, oder

$$a = k - h\sqrt{-1} \text{ und } b = k + h\sqrt{-1};$$

so findet man durch Einführung dieser Werthe:

$$y = e^{kx}\,(Ce^{-hx\sqrt{-1}} + De^{hx\sqrt{-1}}).$$

Daraus entspringt, wenn man erwägt, daß

$$e^{hx\sqrt{-1}} = \cos hx + \sqrt{-1}\,\sin hx$$

und

$$e^{-hx\sqrt{-1}} = \cos hx - \sqrt{-1}\,\sin hx$$

ist, nach Aenderung der Constanten:

$$y = e^{kx}\,(C'\cos hx + D'\sin hx) = C''e^{kx}\cos(hx + f).$$

Für a = b, wo C und D unendlich ausfallen würden, erhält man, wenn die Rechnung noch einmal gemacht wird:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{u\,du}{(u - a)^2};$$

woraus

$$y\,(u - a) = ce^{\frac{a}{u-a}}.$$

Es ist aber

$$dx = \frac{dy}{yu} = -\frac{du}{(u - a)^2};$$

daraus

$$u - a = \frac{1}{x + k}.$$

Eliminirt man u − a, so findet man endlich:

$$y = ce^{a(x+k)}\,(x + k) = Ce^{ax}\,(x + k).$$

§ 229. **Differentialgleichungen, welche nur eine der ursprünglichen Veränderlichen enthalten.** Derartige Gleichungen lassen sich wenigstens um eine Ordnung erniedrigen. Es sei die Gleichung von der Form:

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0;$$

macht man $\frac{dy}{dx} = y'$, so kommt die Gleichung:

$$f\left(x, y', \frac{dy'}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}y'}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

welche in Bezug auf x und y' nur noch von der $n - 1^{ten}$ Ordnung ist. Läßt sich diese Gleichung integriren und dann x in y' oder y' in x ausdrücken, so hat man weiter:

$$y = \int y'dx + C \text{ oder } y = y'x - \int xdy' + C.$$

Die Gleichung von der Form:

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

wird auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt, wenn man dy statt dx als constant annimmt. Zu diesem Behufe wird man nach den Vorschriften des §. 25:

$$-\frac{dyd^2x}{dx^3} \text{ statt } \frac{d^2y}{dx^2},$$

ferner

$$\frac{3dy\,(d^2x)^2 - dxdyd^3x}{dx^5} \text{ statt } \frac{d^3y}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

setzen.

1) In der Gleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3}(2x^2+x-1) + \frac{d^2y}{dx^2}(4x^3-7x) + \frac{dy}{dx}(1+6x-2x^2-4x^3)=0$$

setze man

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y''',$$

wonach man sie auf die Form bringen kann:

$$\frac{y''-y'''}{y'-y''} = \frac{1+6x-2x^2-4x^3}{2x^2+x-1} = \frac{dl\,(y'-y'')}{dx}.$$

Durch beiderseitige Integration ergibt sich nun:

$$y' - y'' = 2C\,(2x^2 + x - 1)\,e^{-x^2},$$

welche Gleichung durch den Factor e^{-x} integrabel wird. Man erhält

$$y' = C_1 e^x - 2Cxe^{-x^2},$$

also endlich

$$y = C_2 + C_1 e^x + Ce^{-x^2}.$$

2) Die Gleichung

$$x^2 y''^2 = 4xy'y'' + 4y'^2 + y' + x^2,$$

in Bezug auf $y'' = \frac{dy'}{dx}$ aufgelöst, gibt:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{2y'}{x} + \sqrt{y' + x^2},$$

welche Gleichung homogen gemacht werden kann, wenn man sich y' von einer gewissen Dimension m denkt. Durch Vergleichung der Dimensionen der einzelnen Glieder der letzten Gleichung erhalten wir aber

$$m - 1 = m - 1 = 1, \; m = 2.$$

Machen wir also

$$y' = x^2 z, \; dy' = x^2 dz + 2xzdx,$$

so ergibt sich

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z}} = \frac{1}{x},$$

mithin

$$y' = (C^2 - 1)\, x^2 + Cx^2 lx + \frac{x^2}{4}(lx)^2,$$

$$y = \left[\frac{C^2}{3} - \frac{C}{9} - \frac{17}{54} + \left(\frac{C}{3} - \frac{1}{18}\right) lx + \frac{1}{12}(lx)^2\right] x^3 + C_1.$$

3) Setzt man in der Gleichung $y'^2 = 1 + yy''$ für y' und y'' die Werthe $\frac{1}{x'}$ und $\frac{-x''}{x'^3}$, wo sich jetzt die Differentiationen auf y beziehen; so erhält man

$$\frac{1}{x'^2} = 1 - \frac{yx''}{x'^3} \text{ oder } \frac{dx'}{x'^3 - x'} = \frac{dy}{y},$$

mithin ist

$$Cy = \frac{\sqrt{x'^2 - 1}}{x'}, \text{ oder } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - C^2 y^2}};$$

also endlich

$$C_1 + Cx = \operatorname{arc}(\sin = Cy),\ \text{d. h. } y = \frac{1}{C}\sin(Cx + C_1).$$

Für $C = C_1 = 0$ erhält man das particuläre Integral $y = x$.

4) Die Gleichung

$$yy'' + y^2y' = y'^2$$

geht für

$$y' = \frac{1}{x'},\ y'' = \frac{-x''}{x'^3}$$

über in:

$$yx'' - x'^2y^2 + x' = 0,$$

wo jetzt y die unabhängige Variabele ist. Diese Gleichung ist homogen, wenn man sich die Unbekannte x' vom -2^{ten} Grade denkt. Setzt man also $x' = y^{-2}z$, so liefert sie die integrabele Gleichung $\frac{1}{y} = \frac{z'}{z + z^2}$, aus welcher z und somit $x' = \frac{-1}{y(C+y)}$ bestimmt wird. Die Integration der letzten Gleichung liefert endlich das Resultat $y = \frac{CC_1}{e^{Cx} - C_1}$. Für $C = 0$, $C_1 = 1$ ergibt sich das particuläre Integral $y = \frac{1}{x}$.

3. Integration der linearen Differentialgleichungen.

§. 230. **Einfachster Fall.** Unter einer linearen Differentialgleichung versteht man eine solche, in welcher sowohl y als die Differentialquotienten dieser Function nur in der ersten Potenz vorkommen. Sie ist demnach von der Form:

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots + Uy = V,$$

wo $P, Q \cdots U, V$ Functionen der unabhängigen Veränderlichen x allein bezeichnen. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, wenn nämlich $V = 0$ und $P, Q \cdots U$ constant sind. Setzt man $y = e^{mx}$, so verwandelt sich die gegebene Differentialgleichung in folgende algebraische Gleichung:

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \cdots + U = 0,$$

deren Wurzeln $m_1, m_2, m_3 \cdots m_n$ heißen mögen. Nimmt man demnach für m einen dieser n Werthe, so wird der Ausdruck $y = e^{mx}$ der vorgelegten Differentialgleichung genügen, mithin ein besonderes

Integral derselben sein. Dies wird auch noch der Fall sein, wenn man jeden gedachter n Werthe mit einer willkührlichen Constanten multiplicirt; so daß das allgemeine Integral der in Rede stehenden Differentialgleichung folgendes ist:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \cdots + C_n e^{m_n x},$$

wo $C_1, C_2, C_3 \cdots C_n$ willkührliche Constanten sind.

Wenn sämmtliche Wurzeln der oben aufgestellten algebraischen Gleichung reell und ungleich sind, so lassen sich die n willkührlichen Constanten der Bedingung gemäß bestimmen, daß für $x = 0$ die Function y und ihre $n - 1$ ersten Differentialquotienten gegebene Werthe $y_0, y'_0, y''_0 \cdots y_0^{(n-1)}$ erhalten. Man hat, nachdem $n - 1$ mal hintereinander differentiirt worden, nämlich alsdann die n folgenden Gleichungen:

$$C_1 + C_2 + C_3 \cdots + C_n = y_0;$$
$$C_1 m_1 + C_2 m_2 \cdots + C_n m_n = y'_0;$$
$$C_1 m_1^2 + C_2 m_2^2 \cdots + C_n m_n^2 = y''_0;$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$C_1 m_1^{n-1} + C_2 m_2^{n-1} \cdots + C_n m_n^{n-1} = y_0^{(n-1)};$$

in denen die zu bestimmenden willkührlichen Constanten nur im ersten Grade vorkommen.

Besitzt die Gleichung

$$m^n + P m^{n-1} + \cdots + U = 0$$

imaginäre Wurzeln, so können die imaginären Exponentialgrößen in Sinus und Cosinus reeller Bögen verwandelt werden. Sind nämlich $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ zwei zusammengehörige imaginäre Wurzeln jener Gleichung, so geben die entsprechenden Exponentialglieder die Summe:

$$C_1 e^{x(\alpha + \beta\sqrt{-1})} + C_2 e^{x(\alpha - \beta\sqrt{-1})};$$

oder

$$e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}});$$

oder

$$e^{\alpha x}\left\{(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)\sqrt{-1}\sin\beta x\right\};$$

oder, wenn man $C_1 + C_2 = M$ und $(C_1 - C_2)\sqrt{-1} = N$ setzt:

$$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x),$$

wo M und N zwei neue willkührliche Constanten bezeichnen; oder auch, wenn $M = \lambda\cos\gamma$ und $N = -\lambda\sin\gamma$ geschrieben wird;

$$\lambda e^{\alpha x}\cos(\beta x + \gamma),$$

wo alsdann λ, γ zwei willkührliche Constanten sind.

Wenn einige Wurzeln der mehrfach erwähnten Gleichung einander gleich werden, so bedarf das angegebene Verfahren einer Modification. Ist nämlich z. B. $m_1 = m_2$, in welchem Falle die beiden Glieder $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ in ein einziges Glied $Ce^{m_1 x}$ übergehen, mithin das Integral nicht mehr die erforderliche Allgemeinheit hat; so setzen wir

$$y = e^{m_1 x} (A_1 + B_1 x).$$

Durch Substitution dieses Werthes geht die gegebene Differentialgleichung über in:

$$e^{m_1 x} (A_1 + B_1 x) (m_1{}^n + Pm_1{}^{n-1} + Qm_1{}^{n-2} \cdots + Tm_1 + U)$$
$$+ B_1 e^{m_1 x} (nm_1{}^{n-1} + (n-1) Pm_1{}^{n-2} + (n-2) Qm_1{}^{n-3} \cdots + T) = 0.$$

Die beiden in Klammern stehenden Polynome kommen aber zum Verschwinden, weil m_1 eine doppelte Wurzel der Gleichung

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \cdots + Tm + U = 0$$

ist. Folglich wird, wenn $m_3 \cdots m_n$ wieder die einfachen Wurzeln dieser Gleichung sind, der Ausdruck

$$y = e^{m_1 x} (A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x} \cdots + C_n e^{m_n x}$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein, indem die n Constanten A_1, B_1, $C_3 \cdots C_n$ sich nicht weiter untereinander reduciren lassen. Ebenso würde man finden, daß in dem Falle die drei Wurzeln m_1, m_2, m_3 einander gleich sind, die Summe der drei entsprechenden Werthe

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$$

durch

$$e^{m_1 x} (A_1 + B_1 x + C_1 x^2)$$

ersetzt werden muß.

Wie auf diese Weise für eine größere Anzahl von gleichen Wurzeln zu verfahren ist, wird man leicht einsehen.

§. 231. **Allgemeinere Voraussetzung variabeler Coefficienten.** Sind die Coefficienten P, Q $\cdots$ U beliebige Functionen von x und die Größe V gleich Null, d. h. hat man bloß

$$\frac{d^n y}{dx^2} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} \cdots + Uy = 0;$$

so behält diese Gleichung die oben angeführte charakteristische Eigenschaft bei, die Eigenschaft nämlich, daß, wofern y_1, y_2, $y_3 \cdots y^n$ n verschiedene besondere Werthe von y sind, welche der gegebenen

Differentialgleichung Genüge thun, auch die Summe dieser beziehungsweise mit den willkührlichen Constanten C_1, C_2, C_3 ... multiplicirten Werthe derselben Gleichung genügen wird. Die Form der Rechnung, durch welche dieser Satz bewiesen wird, ist höchst einfach, so daß sie blos angedeutet zu werden braucht.

Wenn man einen particulären Werth y_1 anzugeben weiß, welcher der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots + Uy = 0$$

zu genügen vermag; so läßt sich die Ordnung dieser Gleichung immer um eine Einheit erniedrigen. Denn setzt man

$$y = y_1 \int z\,dx,$$

wo z eine neue Veränderliche bedeutet, die eine Function von x ist; so erhält man, wenn man die in §. 20 aufgestellte allgemeine Formel

$$y^{(n)} = uv^{(n)} + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} \cdots + vu^{(n)}$$

zu Hülfe nimmt, durch Substitution in die gegebene Differentialgleichung, folgende um eine Einheit erniedrigte andere:

$$z^{(n-1)} + \frac{(ny'_1 + Py_1)}{y_1} z^{(n-2)}$$
$$+\left(\frac{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y''_1 + (n-1)Py'_1 + Qy_1}{y_1}\right) z^{(n-3)} \cdots = 0,$$

wofern man das Ganze durch y_1 dividirt und erwägt, daß der Coefficient

$$y_1^{(n)} + Py_1^{(n-1)} + Qy_1^{(n-2)} \cdots + Uy_1$$

von $\int z\,dx$ nach der Voraussetzung verschwindet. — Wenn man einen zweiten particulären Werth y_2 anzugeben weiß, welcher der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{Pd^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdots + Uy = 0$$

genügt; so muß ein aus der Gleichung

$$z^{(n-1)} + \left(\frac{ny'_1 + Py_1}{y_1}\right) z^{(n-2)} \cdots = 0$$

entnommener Werth z_1 der Gleichung

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx \text{ oder } z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}$$

ebenfalls Genüge leisten. Wenn man demnach zwei particuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + Uy = 0$$

kennt, so kennt man auch ein particuläres Integral der Gleichung

$$z^{(n-1)} + \left(\frac{ny'_1 + Py_1}{y_1}\right) z^{(n-2)} \cdots = 0;$$

mithin wird die Ordnung dieser letztern durch die Transformation $z = z_1 \int u dx$ um eine Einheit erniedrigt. Indem man diese Schlüsse weiter fortsetzt, sieht man, daß die Ordnung der gegebenen Differentialgleichung durch jedes der m particulären Integrale $y_1, y_2 \cdots y^m$ um eine Einheit vermindert wird und deren Integration auf jene einer Differentialgleichung von der $(n-m)^{ten}$ Ordnung zurückgeführt ist, dergestalt daß, wenn gedachte Integration ausgeführt worden, das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + Uy = 0$$

sich durch einfache Quadraturen ergibt.

Zur Aufsuchung der particulären Integrale besitzen wir keine allgemeine Regeln; doch gibt uns die Substitution von Reihen öfters ein Mittel an die Hand, hier ans Ziel zu gelangen, wie wir an nachstehendem Beispiel sehen:

Es sei die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + a^2 y = 0,$$

welche durch

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \cdots$$

in folgende übergeht:

$$\frac{2B}{x} + (6C + a^2 \cdot A) + (12D + a^2 B)\, x$$
$$+ (20E + a^2 C)\, x^2 + \cdots = 0.$$

Aus derselben ergeben sich für die Coefficienten folgende Werthe:

$$B = 0;\ C = -\frac{a^2}{2 \cdot 3};\ D = 0;\ E = +\frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5};$$

mithin

$$y = A\left(1 - \frac{a^2 x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdots\right)$$

Dieser Ausdruck läßt vermuthen, daß $y_1 = \frac{\sin ax}{x}$ ein particuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein werde; die Substitution gedachten Werthes in dieselbe bestätigt jene Vermuthung.

Setzt man nun $y = \frac{\sin ax}{x} \int z\,dx$ in der gegebenen Differentialgleichung, so bekommt man:

$$\frac{dz}{dx} + 2a \cdot z \cot g\, ax = 0,$$

oder

$$\frac{dz}{z} + 2a \cot g\, ax \cdot dx = 0;$$

woraus durch Integration entspringt:

$$z = \frac{C'}{\sin^2 ax}.$$

Der Formel $y = y_1 \int z\,dx$ zufolge ist nun das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung:

$$y = \frac{\sin ax}{x} \int \frac{C'}{\sin^2 ax}\, dx$$

oder

$$y = \frac{C \cos ax}{x} + \frac{C' \sin ax}{x}.$$

§. 232. **Allgemeinste lineare Differentialgleichung.** Betrachten wir nunmehr die Differentialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{Q d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + Uy = V.$$

Verstehen wir unter $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$ die n particulären Integrale der einfacheren Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{Q d^{n-2} y}{dx^{n-2}} \cdots + Uy = 0;$$

so wird der Ausdruck:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \cdots + C_n y_n$$

für das allgemeine Integral der vorgelegten ersteren Differentialgleichung genommen werden können, insofern die Größen $C_1, C_2, C_3 \cdots C_n$ als Functionen von x betrachtet werden, welche gehörig zu bestimmen sind. Denn nimmt man von diesem Ausdrucke die Derivirte, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + C_3 \frac{dy_3}{dx} \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx}$$

$$+ y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + y_3 \frac{dC_3}{dx} \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx};$$

oder bloß

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + C_3 \frac{dy_3}{dx} \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx};$$

wenn man die Functionen $C_1, C_2, C_3 \cdots C_n$ der Bedingung unterwirft, der Gleichung

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + y_3 \frac{dC_3}{dx} \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0$$

Genüge zu leisten. Differentiirt man die vorletzte Gleichung wieder, so kommt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + C_3 \frac{d^2y_3}{dx^2} \cdots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2}$$

$$+ \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \cdot \frac{dC_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} \cdot \frac{dC_3}{dx} \cdots + \frac{dy_n}{dx} \cdot \frac{dC_n}{dx};$$

oder bloß:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + C_3 \frac{d^2y_3}{dx^2} \cdots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2},$$

wo die Derivirten

$$\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx} \cdots \frac{dC_n}{dx}$$

der Bedingungsgleichung:

$$\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \cdot \frac{dC_2}{dx} \cdots + \frac{dy_n}{dx} \cdot \frac{dC_n}{dx} = 0$$

genügen müssen. Indem man auf diese Weise fortgeht, ergibt sich, daß der Ausdruck

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \cdots + C_ny_n,$$

welcher der Gleichung

$$\frac{d_ny}{dx_n} + \frac{Pd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{Qd^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots + Uy = 0$$

Genüge leistet, auch der Gleichung

$$\frac{d_ny}{dx_n} + \frac{Pd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{Qd^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots + Uy = V$$

genügt, wofern die Größen

$$C_1, C_2, C_3 \cdots C_n$$

die Bedingungsgleichungen:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + y_3 \frac{dC_3}{dx} \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}+\frac{dy_3}{dx}\frac{dC_3}{dx}\cdots+\frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_2}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^2y_2}{dx_2}\frac{dC_2}{dx}+\frac{d^2y_3}{dx^2}\frac{dC_3}{dx}\cdots+\frac{d^2y_n}{dx^2}\frac{dC_n}{dx}=0,$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx}+\frac{d^{n-1}y_3}{dx^{n-2}}\frac{dC_3}{dx}\cdots$$

$$+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}=V$$

erfüllen. Da diese Gleichungen rücksichtlich der n Unbekannten

$$\frac{dC_1}{dx},\frac{dC_2}{dx},\frac{dC_3}{dx}\cdots\frac{dC_n}{dx}$$

vom ersten Grade sind, so werden sie für dieselben immer bestimmte Functionen von x liefern, die mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \cdots \varphi_n$ bezeichnet werden mögen. Auf diese Weise erhält man für das gesuchte allgemeine Integral folgenden Ausdruck:

$$y=y_1(a_1+\int\varphi_1dx)+y_2(a_2+\int\varphi_2dx)+\cdots+y_n(a_n+\int\varphi_ndx),$$

wo $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ die willkührlichen Constanten bedeuten.

Wenn man nur eine Anzahl von particulären Integralen kennt, die kleiner als n ist; so bedarf die obige Methode einer Modification, um zur Anwendung zu kommen. Der Einfachheit der Darstellung halber wollen wir die Differentialgleichungen der dritten Ordnung:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{Pd^2y}{dx^2}+\frac{Qdy}{dx}+Uy=V, \qquad (a)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{Pd^2y}{dx^2}+\frac{Qdy}{dx}+Uy=0 \qquad (b)$$

nehmen, wo y_1, y_2 zwei bekannte Functionen von x bezeichnen, welche der letzten Gleichung genügen. Soll die Function

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

der Gleichung Genüge leisten; so kann man die Bedingungsgleichung:

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}=0$$

aufstellen. Die vollständigen Entwickelungen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$ sind:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}+\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx},$$

und:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_1 \frac{d^3y_1}{dx^3} + C_2 \frac{d^3y_1}{dx^3} + \frac{2d^2y_1}{dx^2} \cdot \frac{dC_1}{dx}$$
$$+ \frac{2d^2y_2}{dx^2} \cdot \frac{dC_2}{dx} + \frac{dy_1}{dx} \frac{d^2C_1}{dx^2} + \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2C_2}{dx^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (a), so entsteht nach vorgenommener Reduction:

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{d^2C_1}{dx^2} + \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2C_2}{dx^2} + \frac{2d^2y_1}{dx^2} \cdot \frac{dC_1}{dx}$$
$$+ \frac{2d^2y_2}{dx^2} \cdot \frac{dC_2}{dx} + P \frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + Q \frac{dy_2}{dx} + U \frac{dC_2}{dx} = V,$$

aus welcher Gleichung man $\frac{dC_2}{dx}$ und $\frac{d^2C_2}{dx^2}$ mittelst der Relation

$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0$ und deren Derivirten wegschaffen kann.

Die Endgleichung, welche in Bezug auf $\frac{dC_1}{dx}$ eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung ist, integrirt liefert den Werth von C_1 als Function von x, folglich auch jenen von C_2 als Function von x mit Hülfe einfacher Quadraturen. Durch die drei Integrationen sind drei willkührliche Constanten eingeführt, wonach das Integral

$$y = C_1 y_2 + C_2 y_2$$

die erforderliche Allgemeinheit besitzt.

Wenn man nur ein einziges particuläres Integral für y hat, so erhält man, insofern für $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$ beziehungsweise $C_1 y_1$,

$C_1 \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dC_1}{dx}$, $C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + y_1 \frac{d^2C}{dx^2}$

und $C_1 \frac{d^3y_1}{dx^3} + 3 \frac{d^2y_1}{dx^2} \frac{dC_1}{dx} + 3 \frac{dy_1}{dx} \frac{d^2C_1}{dx^2} + y_1 \frac{d^3C_1}{dx^3}$

substituirt werden, folgende Hülfsgleichung:

$$\left.\begin{aligned} & y_1 \frac{d^3C_1}{dx^3} + 3 \frac{dy_1}{dx} \frac{d^2C_1}{dx^2} + 3 \frac{d^2y_1}{dx^2} \frac{dC_1}{dx} \\ & + Py_1 \frac{d^2C_1}{dx^2} + 2P \frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + Qy_1 \frac{dC_1}{dx} \end{aligned}\right\} =$$

welche in Bezug auf $\frac{dC_1}{dx}$ von der zweiten Ordnung ist. Indem man ganz den nämlichen Weg einschlägt, läßt sich allgemein nachweisen, daß die Integration einer linearen Differentialgleichung der

nten Ordnung mit einem zweiten Theile immer auf die Integration einer neuen linearen Differentialgleichung von der $(n-m)$ten Ordnung und auf m auf einander folgende Quadraturen zurückgeführt werden kann, wenn man m particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung von der nten Ordnung ohne zweiten Theil kennt.

Für den speciellen Fall, in welchem die Coefficienten $P, Q \cdots U$ constante Zahlen sind und nur die Größe V eine Function von x ist, kennt man unmittelbar die particulären Integrale $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$, welche ausgedrückt werden durch $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, e^{m_3 x} \cdots e^{m_n x}$, wo $m_1, m_2, m_3 \cdots m_n$ die Wurzeln der Gleichungen sind:

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + \cdots + U = 0.$$

Die oben auseinandergesetzte Methode gibt mithin den Ausdruck des gesuchten Integrals.

§. 233. **Lineäre Gleichungen der zweiten Ordnung.**

1) Es sei die Gleichung der zweiten Ordnung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = V,$$

wo P und Q constant sind und V eine Function von x ist. Bezeichnet man mit m_1 und m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$m^2 + Pm + Q = 0,$$

so ist das allgemeine Integral

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

wofern die Größen C_1 und C_2 den Gleichungen

$$\frac{dC_1}{dx} e^{m_1 x} + \frac{dC_2}{dx} e^{m_2 x} = 0,$$

$$\frac{dC_1}{dx} m_1 e^{m_1 x} + \frac{dC_2}{dx} m_2 e^{m_2 x} = V$$

genügen. Aus denselben entspringt:

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{Ve^{-m_1 x}}{m_1 - m_2} \text{ und } \frac{dC_2}{dx} = \frac{Ve^{-m_2 x}}{m_1 - m_2}.$$

Hieraus geht weiter hervor:

$$C_1 = \frac{a_1 + \int dx \cdot Ve^{-m_1 x} dx}{m_1 - m_2},$$

$$C_2 = \frac{a_2 + \int dx \cdot Ve^{-m_2 x} dx}{m_2 - m_1}$$

wo a_1 und a_2 die beiden willkührlichen Constanten bedeuten. Mithin endlich das gesuchte Integral:

$$y = \frac{\left(a_1 + \int dx\, Ve^{-m_1 x}\right) e^{m_1 x} - \left(a_2 + \int dx\, Ve^{-m_2 x}\right) e^{m_2 x}}{m_1 - m_2}.$$

Sind die Wurzeln m_1 und m_2 von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, so ist das allgemeine Integral

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

wo die Größen C_1 und C_2 den Bedingungsgleichungen

$$\frac{dC_1}{dx} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{dC_2}{dx} e^{\alpha x} \sin \beta x = 0,$$

$$\frac{dC_1}{dx}\left(\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x\right)$$
$$+ \frac{dC_2}{dx}\left(\alpha e^{x\alpha} \sin \beta x + \beta e^{x\alpha} \cos \beta x\right) = V$$

unterworfen sind; woraus man ableitet:

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{Ve^{-\alpha x} \sin \beta x}{\beta} \text{ und } \frac{dC_2}{dx} = \frac{Ve^{-\alpha x} \cos \beta x}{\beta};$$

ferner

$$C_1 = \frac{a_1 - \int dx \cdot Ve^{-\alpha x} \sin \beta x}{\beta}$$

und

$$C_2 = \frac{a_2 + \int dx \cdot Ve^{-\alpha x} \cos \beta x}{\beta}.$$

Das allgemeine Integral wird hiernach:

$$y = e^{\alpha x} \frac{\left(a_1 - \int dx \cdot Ve^{-\alpha x} \sin \beta x\right) \cos \beta x + \left(a_2 + \int dx \cdot Ve^{-\alpha x} \cos \beta\right) \sin \beta x}{\beta}.$$

In der Anwendung der Analysis auf die Physik gelangt man öfters zu der Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = V,$$

bei welcher also $\alpha = 0$ und $\beta = a$; deßhalb

$$y = \frac{a_1 \cos ax + a_2 \cos ax + \sin ax \int V dx \cos ax - \cos ax \int V dx \sin ax}{a}.$$

Gewöhnlich hat die Function V die Form

$$A + B \cos \beta x + C \cos \gamma x + \cdots,$$

wo A, B, C ⋯, α, β, γ ⋯ constante Größen bezeichnen; so daß die angedeuteten Integrationen leicht bewerkstelligt werden können.

Die Gleichheit der Wurzeln m_1 und m_2 bringt den Ausdruck von y auf $\frac{0}{0}$. Um dessen wahren Werth zu erhalten, reicht es hin, Zähler und Nenner in Bezug auf m_1 zu differentiiren und dann $m_1 = m_2$ zu setzen. Man erhält auf diese Weise:

$$y = -(\int dx \cdot x V e^{-m_1 x})\, e^{m_1 x} + \int (dx V e^{-m_1 x} + a_2)\, x e^{m_1 x},$$

oder auch:

$$y = (a_1 - \int dx \cdot x V e^{-m_1 x})\, e^{m_1 x} + (a_2 + \int dx \cdot V e^{-m_1 x})\, x e^{m_1 x},$$

da die untern Grenzen willführlich bleiben.

2) Für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + a^2 y = V$$

bilde man zunächst die einfachere Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + a^2 y = 0,$$

deren particuläre Integrale wir oben gefunden haben, nämlich

$$y_1 = \frac{\cos ax}{x} \text{ und } y_2 = \frac{\sin ax}{x}.$$

Hiernach ist das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung:

$$y = C_1 \frac{\cos ax}{x} + C_2 \frac{\sin ax}{x},$$

wo die Größen C_1 und C_2 den zwei Bedingungsgleichungen

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0$$

und

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} = V$$

genügen müssen. Aus denselben ergibt sich:

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{Vy_2}{y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx}} = \frac{Vdx}{y_2 d\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}$$

und

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{Vy_1}{y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}} = \frac{Vdx}{y_1 d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}$$

Hiernach hat das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = V$$

überhaupt die Form:

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{Vdx}{y_2 d\left(\frac{y_1}{y_2}\right)} + a_1 \right\} + y_2 \left\{ \int \frac{Vdx}{y_1 d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)} + a_2 \right\};$$

welche Formel in dem vorliegenden speciellen Falle gibt:

$$y = \frac{\cos ax}{x}\left\{a_1 - \frac{1}{a}\int Vx \sin ax\,dx\right\} \cdots$$

$$+ \frac{\sin ax}{x}\left\{a_2 + \frac{1}{a}\int Vx \cos ax\,dx\right\}$$

als allgemeines Integral von

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + a^2y = V.$$

3) Es sei die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

wo P und Q Functionen von x sind. Setzt man $y = e^{\int zdx}$, so geht sie über in folgende Gleichung der ersten Ordnung:

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Pz + Q = 0.$$

Läßt sich diese Gleichung auf irgend eine Weise integriren, so findet man den Werth von y durch Quadraturen. Macht man in der letzteren Gleichung $z = ts$, so verwandelt sich dieselbe in:

$$tds + t^2\left\{s^2 + \left(\frac{dt}{t^2dx} + \frac{P}{t}\right)s + \frac{Q}{t^2}\right\}dx = 0,$$

welche eine Trennung der Variabeln gestattet, wenn

$$\frac{ds}{s^2dx} + \frac{P}{s} = a, \quad \frac{Q}{s^2} = b,$$

wo a und b constante Größen sind und s eine gegebene Function von x ist.

4) Die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = V$$

läßt sich auf die Integration der eben betrachteten Differentialgleichung zurückführen. Setzt man nämlich $y = tz$, wo t und z noch unbestimmte Functionen von x sind; so erhält man, wenn man in die gegebene Gleichung substituirt und die daraus resultirende in zwei andere zerfällt, was wegen der Variabeln z und t gestattet ist:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz = 0$$

und

$$dt' + t'\left(P + \frac{2z'}{z}\right)dx = \frac{Vdx}{z}.$$

Man bestimme nun z aus der ersteren, ferner t aus der zweiten Gleichung, welche letztere auf die in §. 209 behandelten zurückgeführt werden kann, wenn

$$y \text{ mit } t', \; P \text{ mit } P + \frac{2z'}{z} \text{ und } Q \text{ mit } \frac{V}{z}$$

vertauscht wird. Man findet auf diese Art:

$$y = tz = z\int\left(\frac{dx}{z^2 e^{\int Pdx}}\right)\int Vze^{\int Pdx}.$$

Da die in diesem Resultat vorkommende doppelte Integration willkührliche Constanten enthält, so wird das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung gefunden, wenn z dergestalt gewählt wird, daß es der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Q = 0$$

genügt. Für

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = \frac{a}{x^2 - 1}$$

haben wir zunächst die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} = 0;$$

woraus, wenn $z = e^{\int udx}$ gesetzt wird, entspringt:

$$du + \left(u^2 + \frac{u}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = 0.$$

Die letztere Gleichung wird homogen, wenn man $u = \frac{1}{v}$ setzt, hierauf integrirbar, wenn man $x = vs$ macht. Man findet so:

$$\frac{dv}{v} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 - 1)} ds; \text{ hieraus } v = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{s+1}{s-1}}.$$

Substituirt man statt v und s ihre Werthe $\frac{1}{u}$ und ux; so erhält man

$$u = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}; \int udx = l\,\frac{x^2 - 1}{x}; z = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

Die Gleichung

$$y = z \int\left(\frac{dx}{z^2 e^{\int Pdx}}\right) \cdot \int Vze^{\int Pdx}$$

wird endlich, weil $\int Vze^{\int Pdx} = ax + b$ ist:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}\int\frac{(ax + b)}{(x^2 - 1)^2} xdx,$$

oder

$$y = -\frac{ax + b}{2x} + \frac{x^2 - 1}{4x} \cdot al\left(c\,\frac{x-1}{x+1}\right).$$

§. 234. Weitere Anwendungen.

1) Es sei die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 14\frac{d^2y}{dx^2} + 64\frac{dy}{dx} - 96y = 0.$$

Die Hülfsgleichung ist:

$$m^3 - 14m^2 + 64m - 96 = 0,$$

deren Wurzeln sind: 6, 4 und 4. Folglich das allgemeine Integral:

$$y = e^{4x}(cx + c' + c''e^{2x}).$$

2) Der Differentialgleichung:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

entspricht die algebraische Gleichung:

$$m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 = (1 - m)^2(1 + m^2) = 0.$$

Hiernach wird das vollständige Integral:

$$y = e^x(c + c'x) + C\cos x + C'\sin x.$$

3) Es sei die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{d^2y}{dx^2} + 6y = x^2,$$

welche die Hülfsgleichung

$$m^3 - 7m + 6 = 0$$

gibt, deren Wurzeln sind: 1, 2 und — 3. Der Ausdruck des gesuchten Integrals ist folglich:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x},$$

wo die Größen C_1, C_2, C_3 den Bedingungen:

$$e^x \frac{dC_1}{dx} + e^{2x}\frac{dC_2}{dx} + e^{-3x}\frac{dC_3}{dx} = 0,$$

$$e^x \frac{dC_1}{dx} + 2e^{2x}\frac{dC_2}{dx} - 3e^{-3x}\frac{dC_3}{dx} = 0,$$

$$e^x \frac{dC_1}{dx} + 4e^{2x}\frac{dC_2}{dx} + 9e^{-3x}\frac{dC_3}{dx} = x^2$$

zu genügen haben. Diese Gleichungen geben für $\frac{dC_3}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$, $\frac{dC_1}{dx}$ folgende Werthe:

$$\frac{dC_3}{dx} = \frac{x^2}{20}e^{3x};\ \frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{5}x^2 e^{-2x};\ \frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{4}x^2 e^{-x};$$

aus denen sich wieder ergibt:

$$C_1 = \frac{e^{-x}}{4}(x^2 + 2x + 2);\ C_2 = -\frac{e^{-2x}}{4\cdot 5\cdot 2}(4x^2 + 4x + 2);$$

$$C_3 = \frac{e^{3x}}{20\cdot 9\cdot 3}(9x^2 - 6x + 2).$$

Der Ausdruck für das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung wird hiernach:

$$y = \frac{1}{6}\left(x^2 + \frac{7x}{3} + \frac{49}{18}\right) + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + a_3 e^{-3x}.$$

4) Für die Differentialgleichung:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 8\frac{d^3y}{dx^3} + 23\frac{d^2y}{dx^2} - 28\frac{dy}{dx} + 12y = x$$

haben wir zunächst die Hülfsgleichung:

$$m^4 - 8m^3 + 23m^2 - 28m + 12 = 0,$$

deren Wurzeln sind 2, 2, 1, 3. Hiernach der Ausdruck des gesuchten Integrals:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x + C_3 e^x + C_4 e^{3x},$$

insofern man die Functionen C_1, C_2, C_3, C_4 vier Bedingungen unterworfen ansieht. Man findet nach vorgenommener Entwickelung als Integral:

$$y = \frac{x}{12} + \frac{7}{36} + a_1 x e^{2x} + a_2 e^{2x} + a_3 e^x + a_4 e^{3x}.$$

§. 235. **Integration einiger linearen Differentialgleichungen der nten Ordnung mit veränderlichen Coefficienten.** Die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots + Uy = 0$$

läßt sich selten integriren, wenn die Coefficienten Functionen von x sind. Einige der merkwürdigsten Fälle, in denen man zum Ziel gelangt, sind folgende:

1) $$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P}{a+bx} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{Q}{(a+bx)^2} \cdot \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots + \frac{U}{(a+bx)^n} = 0,$$

wo P, Q, ⋯ T, U wieder constante Coefficienten darstellen. Setzt man $y = (a + b\,x)^m$, so entsteht

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) + \frac{P}{b} m(m-1)\cdots(m-n+2)$$

$$+ \frac{Q}{b^2} \cdot m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+3)\cdots + \frac{U}{b^n} = 0.$$

Der Ausdruck $y = (a + b\,x)^m$ genügt mithin der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man statt m irgend eine der n Wurzeln m_1, m_2, m_3 ⋯ m_n der vorstehenden algebraischen Gleichung nimmt. Das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist demnach:

$$y = C_1 (a + bx)^{m_1} + C_2 (a + bx)^{m_2} \cdots + C_n (a + bx)^{m_n}.$$

Wenn einige der Wurzeln m_1, m_2 ⋯ m_n einander gleich oder imaginär würden, müßte man eine ähnliche Transformation anwenden, wie die, welche bei den linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten angewandt worden. —

2) Vermittelst eines ganz analogen Verfahrens, wie das im §. 231 befolgte, gelangt man nun zu dem Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P}{a + bx} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{Q}{(a + bx)^2} \cdot \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots = V,$$

wo V eine Function von x ist.

3) Um die Fälle aufzufinden, in welchen die Differentialgleichung:

$$d^2y\,(1 - ax^2) - bxdxdy - cydx^2 = 0$$

integrirbar wird, verfährt Euler wie folgt: In dem Falle, daß $c = 0$ ist, wird die Gleichung:

$$d^2y\,(1 - ax^2) = bxdxdy,$$

oder wegen $dy = y'dx$

$$dy'\,(1 - ax^2) = by'xdx;$$

deren Integral ist:

$$y' = C\,(1 - ax^2)^{-\frac{b}{2a}};$$

mithin

$$y = C\int dx\,(1 - ax^2)^{-\frac{b}{2a}}.$$

In dem Falle, daß $b = a$ ist, wird unsere durch $2dy$ multiplicirte Gleichung von selbst integrabel und liefert das Integral:

$$dy^2\,(1 - ax^2) - cy^2dx^2 = Cdx^2,$$

woraus

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1 - ax^2}} = \int\frac{dy}{\sqrt{C + cy^2}} + c'.$$

4) Nachdem Euler diese zwei Hauptfälle entwickelt hat, zeigt er, daß die vorgelegte Differentialgleichung immer in eine Gleichung von der Form:

$$d^2Y\,(1 - ax^2) - BxdxdY - CYdx^2 = 0$$

sich umwandeln läßt, die demnach integrirbar wird, wenn $C = 0$ oder $B = a$ ist. Er setzt nämlich $y = \frac{dv}{dx}$, wodurch die Differentialgleichung in:

$$d^3v\,(1 - ax^2) - bxdxd^2v - cdx^2dv = 0$$

übergeht, deren einzelne Glieder die Integration zulassen. Es wird nämlich:

$$\int dx^2dv = vdx^2;$$

$$\int xdxd^2v = xdxdv - vdx^2$$

$$\int d^3v\,(1 - ax^2) = d^2v\,(1 - a'x^2) + 2axdxdv - 2avdx^2.$$

Verbindet man diese Theile, so kommt:

$$d^2v\,(1 - ax^2) - (b - 2a)\,xdxdv - (c - b + 2a)\,vdx^2 = 0;$$

welche Gleichung mit der vorgelegten ganz ähnlich ist, mithin in den beiden Fällen integrirbar wird, in denen $c - b + 2a = 0$ und $b = 3a$ ist, oder $c = b - 2a$ und $b = 3a$. Hierauf setzt Euler $v = \frac{dv'}{dx}$ und erhält folgende transformirte Gleichung:

$$(1 - ax^2)\, d^2v' - (b - 4a)\, xdxdv' - (c - 2b + 6a)\, v'dx^2 = 0,$$

welche also integrirbar, so oft

$$b = 5a \text{ oder } c = 2b - 6a$$

ist. — Werden diese Operationen wiederholt, so kommen immer Gleichungen von der nämlichen Form zum Vorschein, dergestalt, daß die vorgelegte Gleichung jederzeit integrirbar wird, so oft entweder

$$b = (2k + 1)\, a \text{ oder } c = kb - (k + 1)\, ka,$$

wo für k alle ganzen positiven Zahlen gesetzt werden können. — Auf solche Weise hat Euler zwei Gattungen integrabler Fälle herausgebracht. — Bemerken wir noch, daß die vorgelegte Gleichung in eine Differentialgleichung des ersten Grades übergeht, wenn $y = e^{\int udx}$ gesetzt wird. Man erhält nämlich die Gleichung:

$$du + u^2dx - \frac{buxdx + cdx}{1 - ax^2} = 0,$$

welche in den Fällen,

wo $b = (2k + 1)\, a$ oder $c = kb - (k + 1)\, ka$ ist,

eine Integration zuläßt.

§. 236. **Cauchy's symbolische Integrationsmethode.** Hat eine lineäre Differentialgleichung ein von y unabhängiges letztes Glied, so erfordert die Bestimmung der n variirenden Constanten der particulären Integrale nach Lagrange's Methode die Auflösung von n algebraischen Gleichungen des I. Grades. Um nun die Differentialgleichung:

$$\frac{d^ny}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_ny = X,$$

wo $A_1, A_2 \cdots A_n$ constant sind, X aber eine beliebige Function von x ist, aufzulösen, bedient sich Cauchy einer anderen symbolischen Methode, deren Grundzüge wir jetzt angeben wollen. — Vor allen Dingen müssen wir deßhalb nach Cauchy an die Stelle der Ausdrücke

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^ny}{dx^n}$$

setzen

$$y, Dy, D^2y \cdots D^ny,$$

so daß die einer Function vorgesetzte Charakteristik D^n, oder symbolisch gesprochen, das Multipliciren mit D^n, ein $n$maliges Differentiiren derselben bewirkt. Eine Gleichung wie $D^n y = X$ wird nun symbolisch integrirt, indem man schreibt $y = \frac{X}{D^n}$, wobei man sich unter der symbolischen Division mit D^n eine $n$malige Integration vorzustellen hat.

Die zuerst aufgestellte Gleichung kann nun symbolisch geschrieben werden:

$$(D^n + A_1 D^{n-1} + \cdots + A_n)\, y = X,$$

oder, wenn das Polynom

$$D^n + A_1 D^{n-1} + \cdots A_n$$

durch $F(D)$ bezeichnet wird,

$$F(D)\, y = X.$$

Derartige symbolische Functionen $F(D)$, $f(D)$ haben folgende leicht zu erweisende Eigenschaft:

$$[f(D) \cdot F(D)]\, y = F(D)\, [f(D)\, y],$$

indem die Differentiationen, welche durch ein vorgesetztes D, oder symbolisch durch Multiplication mit D bewirkt werden, in Folge dieses Verfahrens überhaupt in vollkommener Analogie mit Multiplicationen durch die Polynome $F(D)$, $f(D)$ stehen. So ist z. B. für

$$F(D) = D^2 + AD + B,\ f(D) = D^2 + ad + b$$

der dem symbolischen Ausdrucke

$$[(D^2 + AD + B)\,(D^2 + aD + b)]\, y,$$

entsprechende

$$\begin{aligned} &D^4 y + aD^3 y + bD^2 y \\ &+ AD^3 y + AaD^2 y + AbDy \\ &+ BD^2 y + BaDy + Bby \end{aligned}$$

auch gleich

$$\begin{aligned} &D^2\,(D^2 y + aDy + by) \\ &+ AD\,(D^2 y + aDy + by) \\ &+ B\,(D^2 y + aDy + by), \end{aligned}$$

also symbolisch

$$\begin{aligned} &= (D^2 + AD + B)\,(D^2 y + aDy + by) \\ &= [(D^2 + AD + B)\,(D^2 + aD + b)]\, y. \end{aligned}$$

Es sei nun das in der zu integrirenden Gleichung 1) vorkommende Polynom

$$F(D) = (D - a_1)\,(D - a_2) \cdots (D - a_n).$$

Bezeichnet man das Produkt dieser Factoren, abgesehen vom ersten, durch F_1 (D), dasselbe ohne die beiden ersten, durch F_2 (D) u. s. w., so kann die zu integrirende Gleichung auch geschrieben werden:

$$(D - a_1)\,[F_1\,(D)\,y] = X.$$

Nennt man also y_1 die unbekannte Function, welche durch F_1 (D) y ausgedrückt wird, und welche jedenfalls aus der Differentialgleichung

$$(D - a_1)\,y_1 = Dy_1 - a_1 y_1 = X$$

bestimmbar ist, so hat man weiter

$$F_1\,(D)\,y = (D - a_2)\,[F_2\,(D)\,y] = y_1.$$

Stellt man also die durch F_2 (D) y symbolisch ausgedrückte Function von X durch y_2 dar, wo y_2 aus der Gleichung bestimmt wird

$$(D - a_2)\,y_2 = Dy_2 - a_2 y_2 = y_1,$$

so hat man jetzt

$$F_2\,(D)\,y = (D - a_3)\,[F_3\,(D)\,y] = y_2 \text{ 2c.}$$

Auf diesem Wege fortfahrend, gelangt man, indem sich der Grad des Polynomes F immer um eine Einheit erniedrigt, zuletzt zu der Gleichung

$$(D - a_n)\,y = y_{n-1},$$

aus welcher, da y_{n-1} bereits vorher bestimmt ist, y gefunden werden kann. Man hat also das System folgender Differentialgleichungen nach einander zu integriren:

$$\begin{aligned} (D - a_1)\,y_1 &= X \\ (D - a_2)\,y_2 &= y_1 \\ (D - a_3)\,y_3 &= y_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ (D - a_n)\,y &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Die symbolische Methode liefert aber auch die Integrale dieser Gleichungen. In Folge der leicht durch n malige Differentiation zu bestätigenden Formel

$$e^{ax} D^n\,(ye^{-ax}) = (D - a)^n\,y_1,$$

welche für n = 1 in

$$e^{ax} D\,(y_1 e^{-ax}) = (D - a)\,y_1$$

übergeht, ist

$$e^{ax} D\,(y_1 e^{-ax}) = X,$$

also

$$D\,(y_1 e^{-ax}) = e^{-ax} X$$

und

$$y_1 = e^{ax} \int e^{-ax} X dx.$$

Man hat also

$$y = e^{a_n x} \int e^{(a_{n-1} - a_n)x} \cdots e^{a_1 x} \int e^{-a_1 x} X dx^n. \qquad (2)$$

Sind m Wurzeln a einander gleich, so treten successive Integrationen ein, so daß

$$y = e^{a_n x} \iiint \cdots e^{a_1 x} \int e^{-a_1 x} X dx^n.$$

Die ausgedehnte Analogie, welche die algebraischen Operationen mittelst der Functionen F (D) mit dem Differentiiren nach verschiedenen Ordnungen haben, veranlaßt uns, die Gleichung

$$Dy - ay = (D - a)\, y = X,$$

in Bezug auf y aufgelößt, zu schreiben $y = \frac{X}{D - a}$ und letzteres Symbol als Ausdruck für die der gegebenen Differentialgleichung genügeleistende Function anzusehen. Ferner wollen wir, um auf eine zweite Methode zu kommen, die lineären Gleichungen von der Form $F(D)\, y = X$ zu integriren, das Polynom $\frac{1}{F(D)}$ in Partialbrüche von der Form

$$\frac{A_1}{D - a_1} + \frac{A_2}{D - a_2} + \cdots \frac{A_n}{D - a_n}$$

zerlegen, in der Voraussetzung ungleicher Wurzeln. Um eine allgemeine Regel zur Bildung der Zähler A_1, A_2 zu erhalten, sei allgemein

$$\frac{f(u)}{F(u)} = \frac{A}{u - a} + \frac{P}{Q},$$

wo $\frac{P}{Q}$ die Summe aller übrigen Partialbrüche vorstellt; alsdann ist $Q = \frac{F(u)}{u - a}$; multiplicirt man also beiderseits mit $(u - a)\, F(u)$, so ist

$$(u - a)\, f(u) = AF(u) + P\, (u - a)^2.$$

Diese Gleichung, auf beiden Seiten nach u differentiirt, gibt, wenn man nachher $u = a$ setzt:

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}.$$

Schreiben wir nun die Gleichung $F(D)\, y = X$ unter die Form $y = \frac{X}{F(D)}$, oder

$$y = \frac{1}{F'(a_1)} \cdot \frac{X}{D - a_1} + \frac{1}{F'(a_2)} \cdot \frac{X}{D - a_2} + \cdots \frac{1}{F'(a_n)} \cdot \frac{X}{D - a_n},$$

so ist

$$y = \frac{e^{a_1 x}}{F'(a_1)} \int e^{-a_1 x} X dx + \cdots \frac{e^{a_n x}}{F'(a_n)} \int e^{-a_n x} X dx \quad (3)$$

in Folge oben angegebener Bedeutung des Symbolos $\frac{X}{D - a}$. — Daß der Ausdruck (3) wirklich der gegebenen Gleichung $F(D) X = Y$ genüge leistet, ergibt sich durch Substitution, d. h. durch Multiplication des Ausdrucks (3) durch $F(D)$. Denken wir, den ersten Partialbruch multiplicirend,

$$F(D) = (D - a_1) \varphi_1 (D),$$

so wird das Product

$$= \varphi_1 (D) \left[(D - a_1) \left(\frac{e^{a_1 x}}{F'(a_1)} \int e^{-a_1 x} X dx\right)\right]$$

$$= \varphi_1 (D) \frac{X}{F'(a_1)}.$$

Die übrigen Partialbrüche liefern entsprechende Resultate, so daß das Resultat die identische Gleichung liefert:

$$\frac{\varphi_1 (D)}{F'(a_1)} X + \frac{\varphi_2 (D)}{F'(a_2)} X + \cdots = F(D) X.$$

Kommen gleiche Wurzeln vor, so liefert ein Partialbruch von der Form $\frac{A}{(D - a)^n} X$, als Auflösung der Gleichung $(D - a)^n z = AX$ betrachtet, ein Resultat

$$z = e^{ax} \int^{(n)} e^{-ax} X dx,$$

zufolge einer angeführten symbolischen Formel

$$(D - a)^n z = e^{ax} D^{(n)} (z e^{-ax}).$$

Beispiele.

1) Die Gleichung (2) liefert, auf

$$D^2 y - 3Dy + 2y = x$$

angewandt:

$$y = e^{2x} \int e^{-x} \int e^{-x} \cdot x dx^2 = e^{2x} \int e^{-x} (- x e^{-x} - e^{-x} - C) dx$$

$$= e^{2x} \left(\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} + C e^{-x} + C_1\right)$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{4} + C e^{x} + C_1 e^{2x}.$$

2) Dieselbe Gleichung, auf das Beispiel

$$D^2y - 2Dy + y = e^x$$

angewandt, gibt

$$y = e^x \iint dx^2 = e^x \left(\frac{x^2}{2} + Cx + C_1\right).$$

3) Mit Anwendung der Gleichung (3) erhält man aus

$$D^2y + y = f(x):$$

$$y = \frac{f(x)}{D^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot f(x)}{D - \sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot f(x)}{D + \sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \int e^{-x\sqrt{-1}} f(x)\, dx - \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \int e^{x\sqrt{-1}} f(x)\, dx$$

$$+ Ce^{x\sqrt{-1}} + C_1 e^{-x\sqrt{-1}}.$$

4) Die Gleichung

$$(D - a)\, y = 0$$

gibt

$$y = \frac{0}{D - a} = \frac{0}{D}\left(1 + \frac{a}{D} + \frac{a^2}{D^2} + \cdots\right)$$

$$= C + aCx + a^2 \frac{Cx^2}{2} + a^3 \frac{Cx^3}{2 \cdot 3} + \cdots = Ce^{ax},$$

insofern man y eigentlich unter die Form

$$\frac{0}{D}\left(1 + \frac{a}{D} + \frac{a^2}{D^2} \cdots + \frac{\left(\frac{a}{D}\right)^n}{1 - \frac{a}{D}}\right)$$

setzen kann, in welcher Reihe das Restglied unendlich klein ausfällt und durch Multiplication mit D — a alles identisch wird.

4. Integration nicht linearer Differentialgleichungen.

§. 237. **Homogene Differentialgleichungen.** Wenn eine Differentialgleichung höherer Ordnung weder linear ist, noch eine von den oben betrachteten einfachen Formen hat, so besitzt man nur wenig Mittel um das Integral derselben zu finden. Die folgenden Paragraphen enthalten einiges dahin Gehörige. — Eine Differentialglei-

chung wird **homogen** genannt, wenn alle ihre Glieder von demselben Grade sind, wobei nicht allein der Veränderlichen x und y, sondern auch ihren Differentialen dx, dy, d^2y ... nur eine Dimension beigelegt wird, wie dies bei der Gleichung

$$x^2d^2y + xdx^2 + ydy^2 = 0$$

der Fall ist, wo alle Glieder vom dritten Grade sind. Setzt man nun

$$\frac{dy}{dx} = y' \text{ und } \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'',$$

so ist y' vom 0ten Grade und y'' vom — 1ten Grade.

Eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung wird daher homogen sein, wenn sie auf die Form gebracht, worin sie nur x, y, y' und y'' enthält, in ihren einzelnen Gliedern dieselbe Anzahl von Dimensionen besitzt, wobei den Veränderlichen x und y eine Dimension, der Größe y' aber keine, und der Größe y'' eine negative Dimension beigelegt wird. Macht man daher in einer solchen zwischen x, y, y', und y'' gegebenen homogenen Gleichung $y = zx$ und $y'' = \frac{u}{x}$, so werden alle Glieder derselben die nämliche Potenz von x zum Factor bekommen, dergestalt, daß, wenn diese Potenz durch Division weggeschafft wird, man eine Gleichung zwischen den drei Größen z, u und y' erhält, aus welchen sich ein Ausdruck für die eine dieser drei Größen vermittelst der beiden andern herleiten läßt.

Es ist aber

$$dy = y'dx \text{ und } zdx + xdz = dy,$$

woraus

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{y' - z}.$$

Ferner ist

$$dy' = y''dx = \frac{u}{x}\,dx \text{ oder } \frac{dx}{x} = \frac{dy'}{u},$$

mithin

$$\frac{dz}{y' - z} = \frac{dy'}{u} \text{ oder } udz = y'dy' - zdy',$$

wonach die Integration einer homogenen Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der Integration einer Differentialgleichung der ersten Ordnung abhängig gemacht ist. Denkt man sich nämlich statt u seinen Werth aus der oben gedachten zwischen z, u und y' bestehenden Relation in die Gleichung

$$udz = y'dy' - zdy'$$

substituirt; so hat man eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen y′ und z. Läßt sich dieselbe integriren und daraus $y' = \varphi(z)$, herleiten, so schreitet man zur Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z},$$

in welcher die veränderlichen x und z abgesondert erscheinen. Setzt man endlich in das letzte Integral $\frac{y}{x}$ statt z, so hat man die gesuchte Gleichung zwischen x und y, in welcher zwei willkührliche Constanten vorkommen.

Es ist von Vortheil, die Fälle in Erwägung zu ziehen, in denen die Integration der Gleichung

$$udz = y'dy' - zdy'$$

vermittelst einfacher Quadraturen bewerkstelligt werden kann. Es sind folgende:

1) Wenn u eine homogene Function des ersten Grades von y′ und z ist, weil dann die Gleichung selbst homogen wird.

2) Wenn u eine beliebige Function von y′ ist, wo man die lineäre Gleichung

$$dz + z\frac{dy'}{u} = \frac{y'dy'}{u}$$

hat.

3) Wenn u irgend eine Function der Differenz $y' - z$ ist, weil, wenn $y' - z = t$ gesetzt wird, unsere Gleichung in

$$udz = tdt + tdz$$

übergeht; folglich

$$z = \int \frac{tdt}{u - t} = \int \frac{tdt}{\psi(t) - t}$$

4) Wenn, indem $y' - z = t$ bleibt und P, Q, R beliebige Function von t bezeichnen,

$$u = t + \frac{Pt}{Qz + Rz^n}$$

ist; denn alsdann verwandelt sich die Gleichung in:

$$Pdz = Qzdt + Rz^n dt,$$

welche nach §. 210 integrirt werden kann.

§. 238. **Beispiele.**

1) Es sei

$$xd^2y = dydx \text{ oder } xy'' = y'$$

die gegebene Differentialgleichung. Setzt man

$$y = zx \text{ und } y'' = \frac{u}{x},$$

so kommt

$$u = y'.$$

Man hat weiter

$$y'dz = y'dy' - zdy';$$

woraus

$$\frac{y'^2}{2} = \int(y'dz + zdy') = y'z + \frac{c}{2}.$$

Aus $\frac{dx}{x} = \frac{dy'}{y'}$ entspringt $x = ky'$, so daß, wenn y' aus den beiden gefundenen Integralen eliminirt wird, entsteht:

$$x^2 - 2kzx = C \text{ oder } x^2 - 2ky = C$$

als gesuchtes Integral.

2) Für

$$x^2d^2y = xdxdy + 3ydx^2$$

oder

$$x^2y'' = xy' + 3y$$

erhält man, wenn $y = zx$, $y'' = \frac{u}{x}$ gesetzt wird:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy'}{u} = \frac{dy'}{y' + 3z} = \frac{dz}{y' - z}$$

oder

$$(y' + 3z)\, dz = y'dy' - zdy',$$

woraus

$$y' = z + \sqrt{4z^2 + c}.$$

Weiter ist

$$lx = \int\frac{dz}{\sqrt{4z^2 + c}} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{2z + \sqrt{4z^2 + c}}{k}$$

$$= \frac{1}{2}\, l\, \frac{z + \sqrt{z^2 + c_1}}{k};$$

oder

$$x^2 = \frac{z + \sqrt{z^2 + c_1}}{k} = \frac{y + \sqrt{y^2 + c_1 x^2}}{kx}.$$

3) Es sei

$$ax^3 d^2 y = (ydx - xdy)^2.$$

Die Transformationen liefern

$$ady' = (y' - z)\, dz.$$

Setzt man

$$y' - z = t,$$

so kommt

$$dz - \frac{adt}{t - a} = 0;$$

woraus

$$z = al\left(\frac{t - a}{k}\right);$$

ferner ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t};$$

woraus

$$x = \frac{t - a}{ct}.$$

Folglich

$$y = axl\left(\frac{t - a}{k}\right) = axl \cdot \frac{acx}{k\,(1 - cx)}.$$

4) Es sei

$$\frac{x^2 d^2 y}{dx} = \sqrt{mx^2 dy^2 + ny^2 dx^2}$$

oder

$$y'' x^2 = \sqrt{my'^2 x^2 + ny^2}.$$

Dieselben Substitutionen liefern:

$$dz \sqrt{my'^2 + ny^2} = (y' - z)\, dy',$$

und wenn man $y' = zs$ setzt:

$$\frac{dz}{z} = \frac{(s - 1)\, ds}{\sqrt{ms^2 + n} - s^2 + s};$$

demnach

$$\frac{dx}{x} = \frac{ds}{\sqrt{ms^2 + n} - s^2 + s};$$

so daß sowohl $z = \frac{y}{x}$ als auch x durch die nämliche Veränderliche s bestimmt werden.

§. 239. **Differentialgleichung, welche dadurch homogen wird, daß man darin die Veränderliche y als eine Größe vom nten Grade betrachtet.** Wir setzen

$$y = x^n z,\ y' = x^{n-1} t,\ y'' = x^{n-2} u;$$

woraus, wegen

$$dy = y'dx \text{ und } dy' = y''dx,$$

entspringt:

$$xdz + nzdx = tdx \text{ und } xdt + (n-1)\,tdx = udx;$$

und hieraus wieder:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t - nz} = \frac{dt}{u - (n-1)\,t};$$

mithin

$$dz\,(u - (n-1)\,t) = (t - nz)\,dt.$$

Werden aber in der zwischen x, y, y' und y'' vorgelegten Gleichung die obigen Substitutionen gemacht, so verschwindet der Voraussetzung zufolge x aus der resultirenden Gleichung, in welcher nur die drei Veränderlichen z, t, u vorkommen. Aus der letzteren leite man den Werth von u ab und substituire denselben in

$$dz\,(u - (n-1)\,t) = (t - nz)\,dt,$$

welche so in eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen den Variabeln z und t übergeht. Wird diese Gleichung integrirt und daraus t als Function von z bestimmt, so läßt sich mit Hülfe der Gleichung $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t - nz}$ die Größe x durch z ausdrücken und dann, weil $zx^n = y$ ist, die primitive Gleichung zwischen x und y erhalten, welche wegen der doppelten Integration eine vollständige sein wird.

Die Gleichungen zwischen den vier Größen x, y, y' und y'', welche auf die angegebene Weise behandelt werden können, lassen sich daran erkennen, daß, wenn $y = x^n z$, $y' = x^{n-1}\,t$ und $y'' = x^{n-2}\,u$ gesetzt wird, der Exponent n eine solche Bestimmung gestattet, daß die Veränderliche x aus der Rechnung durch Division zum Verschwinden kommt.

Erstes Beispiel. Es sei

$$x^2 d^2 y = aydx^2 + bxdxdy$$

oder

$$y'' x^2 = ay + by' x.$$

Hier ist $n = 0$; setzt man nun

$$y' = \frac{t}{x} \text{ und } y'' = \frac{u}{x^2},$$

so entsteht

$$u = ay + bt.$$

Mittelst dieser Relation verwandelt sich die Differentialgleichung:

$$dz\,(u - (n-1)\,t) = (t - nz)\,dt$$

in folgende homogene:

$$aydy + (b+1)\,tdy = tdt.$$

Macht man $t = yz$, so kommt

$$ady + (b+1)\,zdy = yzdz + z^2 dy,$$

oder

$$\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{a + (b+1)\,z - z^2}.$$

Setzt man

$$a + (b+1)\,z - z^2 = (\alpha + z)\,(\beta - z),$$

so hat man

$$\alpha\beta = a,\ \beta - \alpha = b + 1;$$

und

$$\frac{dy}{y} = \frac{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}{\alpha + z}\,dz + \frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}{\beta - z}\,dz;$$

woraus durch Integration:

$$ly = C - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,l\,(\alpha + z) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,l\,(\beta - z),$$

oder

$$y\,(\alpha + z)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,(\beta - z)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = C.$$

Ferner ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{(\alpha + z)\,(\beta - z)},$$

oder

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha + \beta} \cdot \frac{dz}{\alpha + z} + \frac{1}{\alpha + \beta} \cdot \frac{dz}{\beta - z};$$

hieraus

$$x = k \left(\frac{\alpha + z}{\beta - z}\right)^{\frac{1}{\alpha + \beta}} \text{ oder } \frac{\alpha + z}{\beta - z} = \left(\frac{x}{k}\right)^{\alpha + \beta}.$$

Weil

$$z = \frac{\beta x^{\alpha + \beta} - \alpha k^{\alpha + \beta}}{k^{\alpha + \beta} + x^{\alpha + \beta}}$$

ist, so erhält man durch Substitution dieses Werthes:

$$y = c' \left(\frac{k^\alpha}{x^\alpha} + \frac{x^\beta}{k^\beta}\right),$$

wo $\frac{c}{\alpha + \beta} = c'$ gesetzt worden.

Zweites Beispiel. Es sei

$$x^4 d^2y = x^3 dx dy + 2xy dx dy - 4y^2 dx^2,$$

oder

$$x^4 y'' = x^3 y' + 2xyy' - 4y^2.$$

Hier ist $n = 2$; setzen wir

$$y = x^2 z,\ y' = xt,\ y'' = u,$$

so kommt

$$u = t + 2zt - 4z^2,$$

und unsere Differentialgleichung

$$dz\,(u - (n-1)\,t) = (t - nz)\,dt$$

geht über in

$$2z dz\,(t - 2z) = dt\,(t - 2z);$$

folglich

$$t = 2z \text{ oder } t = z^2 + c.$$

Wenn $t = 2z$ ist, so muß wegen $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t - 2z}$ sein

$$dz = 0,\ z = c',\ y = c'x^2.$$

Wenn t = $z^2 + c$ ist, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2 - 2z + c},$$

und je nachdem die Constante $c = 1$ oder $= 1 + k$ ist, ergibt sich:

$$lx = \frac{1}{1-z} + c'' = \frac{x^2}{x^2 - y} + c'';$$

oder

$$lx = \int \frac{dz}{(y-1)^2 + k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ arc } \left(\text{tang} = \frac{z-1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ arc } \left(\text{tang} = \frac{y - x^2}{x^2 \sqrt{k}}\right).$$

§. 240. **Die Veränderliche y und ihre Differentiale dy, d^2y ... haben in der vorgelegten Differentialgleichung überall dieselbe Anzahl von Dimensionen.** Eine derartige Differentialgleichung der zweiten Ordnung läßt sich wieder auf eine der ersten Ordnung zurückführen; denn setzt man

$$dy = y'dx, \; dy' = y''dx,$$

so haben die drei Veränderlichen y, y', y'' überall einerlei Dimensionen. Setzt man demnach

$$y' = uy, \; y'' = vy,$$

so wird in allen Gliedern die nämliche Potenz von y erscheinen und diese durch Division weggeschafft werden können, dergestalt, daß die resultirende Gleichung nur noch die Größen x, u, v enthält, aus welcher sich die eine v derselben durch die beiden andern x und u wird bestimmen lassen. Aus den Relationen

$$y' = uy, \; dy' = y''dx$$

entspringt ferner:

$$dy = uydx, \; udy + ydu = vydx;$$

woraus

$$\frac{dy}{y} = udx \text{ und } \frac{dy}{y} = \frac{vdx - du}{u};$$

mithin

$$du + u^2dx = vdx,$$

in welche Differentialgleichung der ersten Ordnung nur der Werth von v durch x und u ausgedrückt substituirt zu werden braucht. Kann

man nun diese Gleichung integriren und den Werth von u als Function von x erhalten, so wird ly = ∫udx, wonach die gesuchte Integralgleichung zwischen x und y als gefunden zu betrachten ist.

Macht man

$$v = u^2 + V,$$

wo V irgend eine Function von u und x ist; so geht die Differentialgleichung

$$du + u^2 dx = vdx$$

in folgende:

$$du = Vdx$$

über. Diese wird integrabel:

1) wenn $V = \frac{X}{U}$ ist, wo X eine Function von x und U eine Function von u bezeichnet;

2) wenn V eine homogene Function von x und u ist und keine Dimension hat;

3) wenn $V = X_1 u + X_2 u^n$ ist, wo X_1 und X_2 beliebige Functionen von x bezeichnen;

4) wenn $V = \frac{1}{U_1 x + U_2 x^n}$, wo U_1 und U_2 Functionen von u bedeuten.

Erstes Beispiel. Es sei die Gleichung:

$$\alpha y d^2 y + \beta dy^2 = \frac{ydxdy}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

oder

$$\alpha y y'' + \beta y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Wird $y' = uy$ und $y'' = vy$ gesetzt, so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$v = \frac{u}{\alpha \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{\beta u^2}{\alpha},$$

oder wenn $u = \frac{1}{s}$ gesetzt wird, in:

$$ds + \frac{sdx}{\alpha \sqrt{a^2 + x^2}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) dx.$$

Multiplicirt man mit $(x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}}$ und integrirt, so bekommt man:

$$s\,(x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \int dx\,(x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Setzt man ferner $x + \sqrt{a^2 + x^2} = t^\alpha$, so ist

$$x = \frac{t^{2\alpha} - a^2}{2t^\alpha} = \frac{1}{2}t^\alpha - \frac{1}{2}a^2t^{-\alpha},$$

und

$$dx = \frac{\alpha}{2}\,dt\,(t^{\alpha - 1} + a^2t^{-\alpha - 1});$$

mithin

$$st = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \int \frac{\alpha}{2}\,dt\,(t^\alpha + a^2t^{-\alpha}),$$

oder

$$st = C + \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right)\left(\frac{t^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + \frac{a^2t^{1 - \alpha}}{1 - \alpha}\right).$$

Ferner ist

$$\frac{dy}{y} = u dx = \frac{dx}{s};$$

man hat aber

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{dx}{s} = \frac{ds}{s} + \frac{dx}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}};$$

folglich

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) ly = ls + \frac{1}{\alpha}\,l\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) = lst + c';$$

also

$$y = C_1\,(st)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}.$$

Wird $C = \frac{\alpha + \beta}{2}\,C_2$ gesetzt, so bekommt man:

$$y = C_1\left(C_2 + \frac{t^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + \frac{a^2t^{1 - \alpha}}{1 - \alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}$$

und endlich,

$$\text{weil } t = (x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}},$$

ist:

$$By^{\frac{\alpha + \beta}{\alpha}} = C + \frac{1}{\alpha + 1} (x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{\alpha + 1}{\alpha}}$$

$$+ \frac{a^2}{1 - \alpha} (x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}.$$

Zweites Beispiel. Es sei

$$xyd^2y = ydxdy + xdy^2 + \frac{bxdy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

oder

$$xyy'' = yy' + xy'^2 + \frac{bxy'^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wird $y' = uy$ und $y'' = vy$ gesetzt, so kommt

$$xv = u + u^2x + \frac{bu^2x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

woraus sich folgende Differentialgleichung ergibt:

$$du + u^2dx = \frac{udx}{x} + u^2dx + \frac{bu^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

oder

$$\frac{xdu - udx}{u^2} = \frac{bxdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Das Integral davon ist:

$$C - \frac{x}{u} = - b \sqrt{a^2 - x^2}$$

oder

$$u = \frac{x}{c + b \sqrt{a^2 - x^2}};$$

also

$$\frac{dy}{y} = udx = \frac{xdx}{c + b \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzt man

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t,$$

also

$$xdx = - tdt;$$

so wird

$$\frac{dy}{y} = \frac{-tdt}{c + bt} = -\frac{dt}{b} + \frac{cdt}{b(c + bt)};$$

woraus

$$ly = -\frac{t}{b} + \frac{c}{b^2} l(c + bt) + lc';$$

endlich, wenn $C = c''b^2$ gesetzt wird:

$$l\frac{y}{c'} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b} + c''l\frac{c''b + \sqrt{a^2 - x^2}}{b}.$$

§. 241. **Integration mittelst schicklicher Factoren.** Der einfachste Gedanke, um das erste Integral einer gegebenen Differentialgleichung von einer beliebigen Ordnung aufzufinden, ist unstreitig der, zufolge dessen das erste Glied der Differentialgleichung dergestalt umgeformt wird, daß es sich unter der Gestalt eines genauen Differentials darbietet. Durch wiederholte Integration des gefundenen ersten Integrals würde man das zweite Integral, und, indem man successive weiter geht, das letzte Integral der gegebenen Differentialgleichung erhalten. Bei jeder dieser Integrationen kommt eine unbestimmte Constante in die Rechnung, wonach die Urgleichung zwischen den beiden Veränderlichen so viele willkührliche Constanten umfassen wird, als es die Ordnung der Differentialgleichung erheischt.

Es wäre mithin zunächst nachzuweisen, daß die auf die Form

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = 0$$

gebrachte Differentialgleichung mittelst eines Factors auf die Form:

$$\frac{dF(x, y, y' \cdots y^{(n-1)})}{dx} = F'(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = 0$$

zurückgeführt werden könne, wonach

$$F(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = c,$$

das erste Integral wäre. Die Derivirte

$$F'(x, y', y'' \cdots y^{(n-1)}) = 0,$$

wofern man den Theil absondert, welcher sich auf die Aenderung von $y^{(n-1)}$ bezieht, läßt sich unter folgender Form darstellen:

$$F'(x, y, y' \cdots y^{(n-2)}) + y^{(n)} F'(y^{(n-1)}) = 0,$$

woraus

$$y^{(n)} + \frac{F'(x, y, y' \cdots y^{(n-2)})}{F'(y^{(n-1)})} = 0.$$

Da diese Gleichung mit der vorgelegten Differentialgleichung identisch sein muß, so ist die Function

$$f(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}$$

mit der Function

$$\frac{F'(x, y, y' \cdots y^{(n-2)})}{F'(y^{(n-1)})}$$

gleichlautend, oder die Function

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \cdots y^{(n-1)})$$

übereinstimmend mit der Function

$$\frac{y^{(n)} F'(y^{(n-1)}) + F'(x, y, y' \cdots y^{(n-2)})}{F'(y^{(n-1)})},$$

d. h. mit der Function

$$\frac{F'(x, y, y' \cdots y^{(n-1)})}{F'(y^{(n-1)})}.$$

Durch Multiplication der Gleichung

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = 0$$

mit der Function $F'(y^{(n-1)})$ geht sie in

$$F'(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = 0$$

über, d. h. sie wird in eine genaue Differentialgleichung umgestaltet.

Die integrirenden Factoren der Differentialgleichungen lassen sich zwar immer finden, wenn man deren Integrale kennt; doch ist die Ausmittelung dergleichen Factoren auf alleinige Grundlage der gegebenen Differentialgleichungen meist schwieriger als die Integration der letzteren. Ein Paar Beispiele mögen zeigen, wie Euler hier verfuhr. Es sei die Gleichung:

$$d^2y + \frac{Aydx^2}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} = 0.$$

Wir wollen den ersten Theil derselben durch Multiplication mit:

$$2Pdy + 2Qydx,$$

wo P und Q Functionen von x sind, integrabel zu machen versuchen und durch

$$Pdy^2 + 2Qydxdy + Vdx^2 = \text{Const. } dx^2,$$

wo V eine Function von x und y ist, das Integral des Ausdruckes:

$$2d^2y\,(Pdy + Qydx) + \frac{2Aydx^2\,(Pdy + Qydx)}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} = 0$$

darstellen. Durch Gleichsetzung dieser Werthe erhalten wir:

$$dy^2\,(dP + 2Qdx) + 2ydxdQdy + dx^2dV$$
$$- \frac{2Aydx^2\,(Pdy + Qydx)}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} = 0.$$

Diese Gleichung kann durch Integration den Werth von V nur dann liefern, wenn $dP + 2Qdx = 0$ ist; man hat alsdann:

$$dV = \frac{Ay\,(Pdy + Qydx)}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} - 2ydy \cdot \frac{dQ}{dx};$$

deren zweiter Theil das Differential von:

$$- \frac{AP}{B\,(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)} - y^2 \cdot \frac{dQ}{dx}$$

in Bezug auf y ist. Man hat also:

$$V = \frac{-AP}{B\,(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)} - y^2\,\frac{dQ}{dx};$$

wofern das Differential des zweiten Theiles, indem y als constant betrachtet wird, gleich Null ist, oder:

$$\frac{-AdP\,(By^2 + C + 2Dx + Ex^2) + 2APdx\,(D + Ex)}{B\,(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} - y^2\,\frac{d^2Q}{dx}$$
$$= \frac{-Ay^2dP}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2}.$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \text{ und } -dP\,(C + 2Dx + Ex^2) + 2Pdx\,(D + Ex) = 0$$

gesetzt wird. Es wäre daher zu untersuchen, ob diese beiden Bedingungen mit der bereits gefundenen $dP + 2Qdx = 0$ zugleich bestehen können. Die zweite gibt aber:

$$P = C + 2Dx + Ex^2;$$

also

$$Q = - \frac{dP}{2dx} = -D - Ex \text{ und } \frac{d^2Q}{dx^2} = 0,$$

so daß die beiden Bedingungen übereinstimmen. Der gesuchte Factor ist demnach:

$$2dy\,(C + 2Dx + Ex^2) - 2ydx\,(D + Ex)$$

und führt auf das Integral:

$$\frac{dy^2}{dx^2}(C + 2Dx + Ex^2) - 2y\frac{dy}{dx}(D + Ex)$$
$$- \frac{A\,(C + 2Dx + Ex^2)}{B\,(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)} + Ey^2 = C_1.$$

Es diene als zweites Beispiel die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^2y}{(y^2 + x^2)^2} = 0.$$

Dieselbe wird integrabel, wenn man sie mit dem Factor $2x^2dy - 2xydx$ multiplicirt; ihr Integral ist:

$$x^2\frac{dy^2}{dx^2} - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + \frac{a^2y^2}{y^2 + x^2} = C.$$

§. 242. **Einige Beispiele, bei denen bemerkenswerthe Integrationsverfahren zur Anwendung kommen**, sind folgende:

1) Wir betrachten zunächst die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}f(x) = 0;$$

deren Integral ist:

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-\int f(x)\,dx}.$$

Gehen wir nun zu der von Liouville aufgestellten Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}f(x) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot F(y) = 0$$

über und untersuchen wir, ob durch Verwandelung der Constante C in eine Function von y sich nicht bewerkstelligen läßt, daß die erste Derivirte die nämliche Form

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-\int f(x)\,dx}$$

behält. Durch Differentiation dieses Ausdruckes entspringt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-\int f(x)\,dx}\left(\frac{dC}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} - Cf(x)\right),$$

oder wenn statt $e^{-\int f(x)\,dx}$ sein aus der Relation:

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-\int f(x)\,dx}$$

entnommener Werth substituirt wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} f(x) + \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dy} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Durch Einführen dieses Werthes in die gegebene Gleichung bekommt man:

$$\frac{1}{C} \frac{dC}{dy} + F(y) = 0;$$

woraus durch Integration entsteht:

$$C = C'e^{-\int F(y)\,dy}.$$

Man hat folglich die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = C'e^{-\int F(y)\,dy} e^{-\int f(x)\,dx},$$

welche das Integral:

$$\int e^{\int F(y)\,dy} = C' \int e^{-\int f(x)\,dx} + C''$$

liefert.

2) Es sei

$$y = \varphi(x, c_1, c_2 \cdots c_n)$$

das Integral einer Differentialgleichung der nten Ordnung:

$$f(x, y, y' \cdots y^{(n)}) = 0.$$

Da y und dessen n Ableitungen $y', y'' \cdots y^{(n)}$ auch von den n Constanten $c_1, c_2, c_3 \cdots c_n$ abhängen, so erhält man, wenn die Function f in Bezug auf eine dieser Constanten, z. B. auf c_1 differentiirt wird:

$$\frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dc_1} + \frac{df(y')}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dc_1} \cdots + \frac{df}{dy^{(n)}} \cdot \frac{dy^{(n)}}{dc_1} = 0.$$

Setzt man $\frac{dy}{dc_1} = z$, wo z eine neue Veränderliche ist, so hat man:

$$\frac{dy'}{dc_1} = \frac{dz}{dx}, \frac{dy''}{dc_1} = \frac{d^2z}{dx^2}, \cdots \frac{dy^{(n)}}{dc_1} = \frac{d^nz}{dx^n}.$$

Substituirt man für $\frac{dy}{dc_1}$, $\frac{dy'}{dc_1} \cdots$ ihre Werthe, so hat man

$$z \cdot \frac{df(y)}{dy} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{df(y')}{dy'} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{df(y'')}{dy''} \cdots$$
$$+ \frac{d^nz}{dx^n} \cdot \frac{df(y^{(n)})}{dy^{(n)}} = 0,$$

wo $\frac{df(y)}{dy}$, $\frac{df(y')}{dy'} \cdots \frac{df(y^{(n)})}{dy^{(n)}}$ als bekannte Functionen von x, c_1, $c_2 \cdots c_n$ betrachtet werden. Nun ist aber jene Gleichung eine lineare und homogene Differentialgleichung mit y und dessen n Ableitungen, welcher durch den Werth $y = \frac{dy}{dc_1}$ Genüge geschieht, weil diese Gleichung dadurch entstanden ist, daß $\frac{dy}{dc_1} = z$ gesetzt wurde; das von c_1 Gesagte gilt ebenfalls von c_2, $c_3 \cdots c_n$. Folglich wird der Differentialgleichung:

$$z \cdot \frac{df(y)}{dy} + \frac{dz}{dx}\,\frac{df(y')}{dy'} + \frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{df(y'')}{dy''} \cdots$$
$$+ \frac{d^nz}{dx^n}\,\frac{df(y^{(n)})}{dy^{(n)}} = 0$$

durch die n besonderen Werthe:

$$z = \frac{dy}{dc_1},\ z = \frac{dy}{dc_2},\ \cdots z = \frac{dy}{dc_n}$$

Genüge gethan; und ihr allgemeines Integral ist:

$$z = c'\,\frac{dy}{dc_1} + c''\,\frac{dy}{dc_2} \cdots c^{(n)}\,\frac{dy}{dc_n}.$$

3) Die Differentialgleichung

$$x^{n-1}(a_n + b_nx)\,y^{(n)} + x^{n-2}(a_{n-1} + b_{n-1}x)\,y^{(n-1)} + \cdots$$
$$+ (a_1 + b_1x)\,y' + b_0y = 0$$

läßt sich durch einen von Malmsten in Crelle's Journal angegebenen Kunstgriff in manchen Fällen integriren. Man differentiire μ mal die gegebene Gleichung, wodurch ein Resultat von ähnlicher Form entsteht:

$$0 = x^{n-1}(a_n + b_nx)\,y^{(\mu+n)} + x^{n-2}(A_{n-1} + B_{n-1}x)\,y^{(\mu+n-1)} + \cdots$$
$$+ x^{n-r-1}(A_{n-r} + B_{n-r}x)\,y^{(\mu+n-r)} + \cdots$$
$$+ (A_1 + B_1x)\,y^{(\mu+1)} + B_0y^{(\mu)}, \qquad \text{(A)}$$

wo im Allgemeinen, wenn zur Abkürzung

$$\mu_p = \mu\,(\mu - 1) \cdots (\mu - p + 1),\ \overline{\mu_p} = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p}$$

gesetzt wird,

$$A_{n-r} = \overline{\mu_r}\,(n-1)_r\, a_n + \overline{\mu_{r-1}}\,(n-2)_{r-1}\, a_{n-1} + \cdots$$
$$+ \overline{\mu_1}\,(n-r)_1\, a_{n-r+1} + a_{n-r}, \qquad (1)$$

$$B_{n-r} = \overline{\mu_r} n_r b_n + \overline{\mu_{r-1}}\,(n-1)_{r-1}\, b_{n-1} + \cdots$$
$$+ \mu_1\,(n-r)_1\, b_{n-r+1} + b_{n-r}, \qquad (2)$$

wovon man sich am leichtesten überzeugt, wenn man die Glieder der ursprünglichen Gleichung auf die Form

$$(a_{n-r}x^{n-r-1} + b_{n-r}x^{n-r})\, y^{(n-r+1)}$$

bringt, und dann die Formel für d^μ (uv) anwendet. Da nun die differentiirte Gleichung, weil der Coefficient des letzten Gliedes constant ist, immer dieselbe Anzahl von Gliedern, wie die ursprüngliche hat, so würde der Grad derselben um 1 erniedrigt sein, wenn $B_0 = 0$ wäre. Dieß kann aber, da μ eine willkürliche jedoch ganze Zahl vorstellt, in vielen Fällen erreicht werden, man hat nur zu sehen, ob sich unter den Wurzeln der Gleichung

$$B_0 = \mu_n b_n + \mu_{n-1} b_{n-1} + \cdots \mu b_1 + b_0 = 0 \qquad (3)$$

eine ganze Zahl vorfindet. Dann heißt also die Differentialgleichung:

$$x^{n-1}\,(a_n + b_n x)\, y^{(\mu+n)} + \cdots$$
$$+ x\,(A_2 + B_2 x)\, y^{(\mu+2)} + (A_1 + B_1 x)\, y^{(\mu+1)} = 0, \qquad (4)$$

und würde von derselben Form wie die ursprüngliche (A) sein, wenn $A_1 = 0$ wäre, in welchem Falle sich überall durch x würde dividiren lassen. Wir setzen also noch

$$y^{(\mu+1)} = x^s \cdot z. \qquad (5)$$

Die vorige Gleichung geht dadurch über in die ähnliche

$$(6)\quad x^{n-1}\,(a_n + b_n x)\, z^{(n-1)} + x^{n-2}\,(A'_{n-1} + B'_{n-1}x)\, z^{(n-2)} + \cdots$$
$$+ x^{r-1}(A'_r + B'_r x)\, z^{(r-1)} + \cdots + x(C_2 + D_2 x)z' + (C_1 + D_1 x)z = 0,$$

wo

$$A'_{n-p} = \overline{(n-1)}_p\, s_p a_n + \overline{(n-2)}_{p-1}\, s_{p-1} A_{n-1} + \cdots (n-p) s A_{n-p+1} + A_{n-p},$$
$$B'_{n-p} = \overline{(n-1)}_p s_p b_n + \overline{(n-2)}_{p-1} s_{p-1} B_{n-1} + \cdots \overline{(n-p)}_1 s_1 B_{n-p+1} + B_{n-p}. \qquad (7)$$

Setzen wir also $A'_1 = 0$, d. h. setzen wir

$$s_{n-1}a_n + s_{n-2}A_{n-1} + s_{n-3}A_{n-2} + \cdots sA_2 + A_1 = 0, \quad (8)$$

woraus sich s bestimmen läßt, und dividiren dann durch x, so wird

$$x^{n-2}(a_n + b_n x) z^{(n-1)} + x^{n-3} A'_{n-1} + B'_{n-1}x) + \cdots$$
$$+ x(A'_3 + B'_3 x) z'' + (A'_2 + B'_2 x) z' + C'_1 z = 0,$$

wodurch also die ursprüngliche Gleichung auf eine solche von derselben Form, aber um eine Ordnung niedriger, zurückgebracht ist. Indem man auf diese dasselbe Verfahren anwendet u. s. w., gelangt man zuletzt zu einer Gleichung erster Ordnung.

Für die Gleichung

$$x^3y''' + x(7x + 1) y'' + (10x + 1) y' + 2y = 0$$

gibt die Gleichung (3) $\mu = -2$ und $\mu = -1$. Mit Anwendung des letzteren Werthes erhält man aus (1) und (2) die Werthe A_1, B_1 2c., wodurch die Gleichung entsteht:

$$x^2y' + (4x + 1) y' + 2y = 0.$$

Da diese bereits von der Form (A) ist, so wenden wir gleich wieder die Gleichung (3) an, woraus wieder $\mu = -1$ erwächst. Durch abermalige Integration geht aber die letzte Gleichung in

$$x^2y' + (2x + 1) y = C$$

über.

4) Die Gleichung

$$(a + be^{rx}) y^{(n)} + (c + de^{rx}) y^{(n-1)} + \cdots (l + me^{rx}) y = 0$$

geht für $rx = t$ in

$$r^n (a + be^t) \frac{d^n y}{dt^n} + r^{n-1} (c + de^t) \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots (l + me^t) y = 0$$

über, wo wir noch $e^t = v$ setzen, mithin

$$\frac{dy}{dt} = v\frac{dy}{dv}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = v^2\frac{d^2y}{dv^2} + v\frac{dy}{dv};$$
$$\frac{d^3y}{dt^3} = v^3\frac{d^3y}{dv^3} + 3v^2\frac{d^2y}{dv^2} + v\frac{dy}{dv} \text{ etc.}$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man eine Gleichung, welche der Form nach genau mit der Gleichung (6) übereinstimmt.

III. Von der Integration der Differentialgleichungen durch Reihen und bestimmte Integrale und von den singulären Integralen.

1. Integration der Differentialgleichungen durch Reihen.

§. 243. **Gebrauch der Maclaurin'schen Formel.** Wenn eine gegebene Differentialgleichung durch die bekannten Mittel nicht integrirt werden kann, so muß man das Integral in der Form einer unendlichen Reihe darzustellen suchen. Wie die Maclaurin'sche Reihe hier sich anwenden läßt, ist schon früher angedeutet worden. Es gibt nämlich diese Formel:

$$y = y_0 + y'_0 \cdot \frac{x}{1} + y''_0 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$+ y_0^{(n-1)} \cdot \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} + y_0^{(n)} \cdot \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \cdots,$$

wo $y_0, y'_0 \cdots$ die Werthe bezeichnen, welche den Größen $y, y' \cdots$ für den individuellen Werth $x = 0$ entsprechen, und von denen die n Größen $y_0, y'_0 \cdots y_0^{(n-1)}$ willkührlich bleiben, wenn die gegebene Differentialgleichung von der Form:

$$f(x, y, y' \cdots y^{(n)}) = 0$$

ist. Gedachte Reihe kann zur Ermittelung der Werthe von y für sämmtliche Werthe von x dienen, für welche die Reihe convergent bleibt.

Beispiele. 1) Es sei die Differentialgleichung

$$y' = -(y + x^3).$$

Die angezeigte Rechnung liefert

$$y = y_0 - y_0 \frac{x}{1} + y_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} - y_0 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$+ (y_0 - 6) \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - (y_0 - 6) \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}$$

Die vorgelegte Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche zum Integral den Ausdruck hat:

$$y = Ce^{-x} + 6(1 - x) + 3x^2 - x^3.$$

Und in der That läßt sich die obige Reihe auf die Form:

$$y=(y_0-6)\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{etc.}\right)$$

$$+6\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}\right)=$$

$$(y_0-6)\,e^{-x}+6\,(1-x)+3x^2-x^3$$

bringen; welcher Werth mit dem oben gefundenen Integral gleichlautend ist, wenn $y_0 - 6$ statt der willkührlichen Constante gesetzt wird.

2) Für die Differentialgleichung:

$$y'' = -xy$$

bekommen wir die Reihe:

$$y = y_0 + y'_0\cdot\frac{x}{1} - y_0\cdot\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} - 2y'_0\cdot\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

$$+ 4y_0\cdot\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + 10y'_0\,\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \text{etc.};$$

oder die ihr gleichgeltende:

$$y = y_0\left(1-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6}-\frac{x^9}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9}+\text{etc.}\right)$$

$$+y'_0\left(x-\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^7}{3\cdot4\cdot6\cdot7}-\frac{x^{10}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10}+\text{etc.}\right),$$

wo y_0 und y'_0 die beiden willkührlichen Constanten sind.

3) Für die Differentialgleichung:

$$y' = x^2 + y^2$$

finden wir die Reihe:

$$y=y_0+y_0{}^2x+y_0{}^3\cdot x^2+(3y_0{}^4+1)x^3+\left(\frac{1}{6}y_0+y_0{}^5\right)x^4+\text{etc.},$$

wo y_0 die Stelle der willkührlichen Constante vertritt.

§. 244. **Gebrauch der Taylor'schen Formel.** In den speciellen Fällen, in denen die Derivirten von einer beliebigen Ordnung an für den Werth $x = 0$ unendlich groß würden, müßte man von einem andern Werthe $x = a$ ausgehen, welcher die Differentialcoefficienten nicht unendlich macht. Man wird dann von der Taylor'schen Reihe:

$$y = y_a + y'_a \left(\frac{x-a}{1}\right) + y''_a \left(\frac{x-a}{1 \cdot 2}\right)^2 + \text{ꝛc.}$$

Gebrauch machen, wo y'_a, y''_a, $y'''_a \cdots$ die besonderen Werthe bezeichnen, welche y, y', $y'' \cdots$ annehmen, wenn darin a statt x gesetzt wird.

Beispiele. 1) Es sei die Gleichung:

$$xy' + y + x^2 = 0,$$

für welche die Derivirte y'_0 unendlich wird, wenn $x = 0$. Die Maclaurin'sche Reihe läßt sich also hier nicht anwenden, weßhalb man zu der Gleichung:

$$y = y_a + y'_a \left(\frac{x - a}{1}\right) + y''_a \cdot \left(\frac{x - a}{1 \cdot 2}\right)^2 + \text{ꝛc.}$$

seine Zuflucht nimmt, die hier wird:

$$y = y_a - \frac{y_a + a^2}{a} \cdot \frac{x - a}{1} + \frac{2y_a}{a^2} \left(\frac{x - a}{1 \cdot 2}\right)^2$$

$$- 2 \frac{(3y_a + a^2)}{a^3} \frac{(x - a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

Die gegebene Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung, deren Integral sich bestimmen läßt und ist:

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{3} x^2.$$

Wird dieser Werth von y nach den Potenzen von $x - a$ entwickelt, so erhält man in der That die obige Reihe, wofern

$$C = ay_a + \frac{1}{3} a^3$$

gesetzt wird.

2) Die Differentialgleichung

$$y' = 1 + m(y - x)$$

liefert das Integral:

$$y = y_a + 1 + m \frac{(y_a - a)}{1} (x - a)$$

$$+ m^2 \frac{(y_a - a)}{1 \cdot 2} (x - a)^2 + m^3 \frac{(y_a - a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x - a^3) + \cdots$$

oder

$$y = x + (y_a - a)\, e^{m(x-a)} = x + Ce^{mx},$$

wenn der constante Factor $(y_a - a)\, e^{-ma}$ mit C bezeichnet wird; ein Resultat, welches auf directem Wege ebenfalls leicht gefunden werden konnte.

3) Für die Differentialgleichung $y'' = ay$ entspringt:

$$y = y_a + \frac{(x-a)}{1} y'_a + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} a y_a + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a y'_a + \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^2 y_a + \cdots$$

oder

$$y = y_a \left\{ 1 + a \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + a^2 \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdots \right\}$$

$$+ y'_a \left\{ \frac{x-a}{1} + a \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + a^2 \frac{(x-a)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdots \right\}$$

oder

$$y = y_a \left\{ \frac{e^{a^{\frac{1}{2}}(x-a)} + e^{-a^{\frac{1}{2}}(x-a)}}{2} \right\} + \frac{y'_a}{a^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{e^{a^{\frac{1}{2}}(x-a)} - e^{-a^{\frac{1}{2}}(x-a)}}{2} \right\};$$

welcher Ausdruck auf die Form

$$y = Ce^{a^{\frac{1}{2}}x} + C'e^{-a^{\frac{1}{2}}x}.$$

gebracht werden kann.

§. 245. **Methode der unbestimmten Coefficienten.** Statt der Maclaurin'schen und Taylor'schen Reihe wendet man öfters andere Reihenentwickelungen an; namentlich ist dies der Fall, wenn die das gesuchte Integral stellvertretende Reihe negative oder gebrochene Potenzen der unabhängigen Veränderlichen enthält. Man bedient sich, wenn derartige Entwickelungen möglich sind, der Methode der unbestimmten Coefficienten, deren Anwendung häufig vor der directen Anwendung der Maclaurin'schen Reihe auch in denjenigen Fällen den Vorzug erhält, in welchen die Entwickelung nach den ganzen und positiven Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreiten kann.

Beispiele.

1) Für die Differentialgleichung:

$$y' = 2 - \frac{y}{x}$$

setzen wir die Reihe an:

$$y = Ax^{\alpha} + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} \cdots,$$

wo die Coefficienten A, A_1, $A_2 \cdots$ und der Exponent α unbestimmt sind. Diese Reihe liefert uns folgende Gleichung:

$$\alpha A x^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 x^{\alpha} + (\alpha+2) A_2 x^{\alpha+1} + \cdots$$
$$= 2 - Ax^{\alpha-1} - A_1 x^{\alpha} - A_2 x^{\alpha+1} - \cdots,$$

welcher Genüge geschieht durch $\alpha = -1$; sie verwandelt sich dann in

$$-\frac{A}{x^2} + A_2 + 2A_3 x + 3A_4 x^2 + \cdots$$
$$= 2 - \frac{A}{x^2} - \frac{A_1}{x} - A_2 - A_3 x - A_4 x^2 \cdots;$$

woraus folgt:

$$A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = A_4 \cdots = 0,$$

während A unbestimmt bleibt. Das gesuchte Integral ist hiernach:

$$y = \frac{A}{x} + x.$$

2) Wir wollen die Differentialgleichung

$$y'' = kx^n y$$

betrachten. Die Substitution des Werthes

$$y = Ax^{\alpha} + A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + A_3 x^{\alpha_3} + \cdots$$

in die gegebene Differentialgleichung liefert:

$$A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + A_1\alpha_1(\alpha_1-1)x^{\alpha_1-2} + A_2\alpha_2(\alpha_2-1)x^{\alpha_2-2} + \cdots$$
$$= kAx^{\alpha+n} + kA_1 x^{\alpha_1+n} + kA_2 x^{\alpha_2+n} + \cdots,$$

welche nur dann identisch wird, wenn die Relationen bestehen:

$$\alpha(\alpha-1) = 0;$$
$$\alpha_i = \alpha + i(n+2);$$
$$A_i\alpha_i(\alpha_i - 1) = kA_i - 1,$$

in welchen A_i und α_i beziehungsweise einen beliebigen Coefficienten und Exponenten der Reihe darstellen und vermöge derer sämmtliche Coefficienten und Exponenten der Reihe vollständig bestimmt sind. Der ersten Gleichung kann auf zwiefache Weise Genüge geschehen, indem man $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ setzt. Diese zwei Werthe liefern

zwei verschiedene Reihen, deren jede eine willkührliche Constante enthält. Da sie beide der vorgelegten Differentialgleichung, wovon sie particuläre Integrale sind, Genüge thun; so wird die Summe dieser beiden Reihen das allgemeine Integral sein. Für dasselbe findet man, wenn die für $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ entsprechenden Werthe des unbestimmt gebliebenen Coefficienten A bezüglich durch C_0, C_1 dargestellt werden, demnach folgenden Ausdruck:

$$y = C_0 \left\{ 1 + \frac{kx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{k^2 x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \cdots \right\}$$

$$+ C_1 x \left\{ 1 + \frac{kx^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{k^2 x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)} + \cdots \right\}$$

So oft der Exponent n eine ganze positive Zahl ist, schreitet die Reihe nach den ganzen und positiven Potenzen von x fort und stimmt mit derjenigen überein, welche sich aus der Maclaurin'schen Formel ergeben würde.

Wenn $k = -1$ und $n = 1$ ist, kommt man auf die oben gefundene Reihe:

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} - y_0 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2y'_0 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ 4y_0 \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{ꝛc.}$$

wieder zurück, wo die Constanten C_0 und C_1 durch y_0 und y'_0 ersetzt sind.

§. 246. **Particuläre Integrale.** Wenn in der aufgestellten Reihe weniger willkührliche Constanten vorkommen, als die Ordnung der Differentialgleichung erheischt; so drückt die Reihe nur ein particuläres Integral aus. Die fragliche Function läßt sich dann blos in eine bestimmte Reihe entwickeln, insofern die willkührlichen Constanten gewisse Bedingungen erfüllen, durch welche deren Anzahl vermindert wird.

Beispiele.

1) Die Gleichung

$$y'' + \frac{y}{x} = 0$$

führt durch Substitution des Ausdruckes:

$$y = ax^{\alpha} + a_1 x^{\alpha+1} + a_2 x^{\alpha+2} + a_3 x^{\alpha+3} + \cdots$$

auf folgende Bedingungsgleichung:

$$0 = a\alpha(\alpha - 1)\,x^{\alpha - 2} + \left.\begin{array}{r} a_1(\alpha + 1)\alpha \\ + a \end{array}\right| x^{\alpha - 1}$$

$$+ \left.\begin{array}{r} a_2(\alpha + 2)(\alpha + 1) \\ + a_1 \end{array}\right| x^{\alpha} + \left.\begin{array}{r} a_3(\alpha + 3)(\alpha + 2) \\ + a_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} x^{\alpha + 1} \\ + \ldots \end{array}$$

Die Annahme von $\alpha = 0$ bringt Alles zum Verschwinden; dagegen liefert die Annahme von $\alpha = 1$ folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot 2 \cdot 1 = -a \\ a_2 \cdot 3 \cdot 2 = -a_1 \\ a_3 \cdot 4 \cdot 3 = -a_2 \\ a_4 \cdot 5 \cdot 4 = -a_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \text{woraus} \quad \begin{array}{l} a_1 = -\dfrac{a}{1 \cdot 2} \\ a_2 = \dfrac{a}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \\ a_3 = -\dfrac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ a_4 = \dfrac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Mithin geschieht der vorgelegten Differentialgleichung Genüge durch den Ausdruck:

$$y = a\left(x - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{rc.}\right)$$

Da derselbe nur eine einzige willkührliche Constante a enthält, so liefert er nur ein particuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung.

2) Die Gleichung

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + y = 0$$

gibt, wenn man setzt:

$$0 = \left.\begin{array}{r} a\alpha(\alpha - 1) \\ + a\alpha \end{array}\right| x^{\alpha - 2} + \left.\begin{array}{r} a_1(\alpha + 1)\alpha \\ + a_1(\alpha + 1) \end{array}\right| x^{\alpha - 1} + \left.\begin{array}{r} a_2(\alpha + 2)(\alpha + 1) \\ + a_2(\alpha + 2) \\ + a \end{array}\right| x^{\alpha}$$

$$+ \left.\begin{array}{r} a_3(\alpha + 3)(\alpha + 2) \\ + a_3(\alpha + 3) \\ + a_1 \end{array}\right| x^{\alpha + 1} + \left.\begin{array}{r} a_4(\alpha + 4)(\alpha + 3) \\ + a_4(\alpha + 4) \\ + a_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} x^{\alpha + 2} \\ + \text{rc.} \end{array}$$

Aus der Annahme von $\alpha = 0$ ergeben sich nachstehende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0; \\ a_2 \cdot 2\,(1+1) = -a; \\ a_3 \cdot 3 \cdot (2+1) = -a_1; \\ a_4 \cdot 4 \cdot (3+1) = -a_2; \\ a_5 \cdot 5 \cdot (4+1) = -a_3; \\ a_6 \cdot 6 \cdot (5+1) = -a_4 \\ \quad \text{u. s. w.}; \end{array}\right\} \text{woraus} \quad \begin{array}{l} a_2 = -\dfrac{a}{2^2}; \\ a_3 = 0; \\ a_4 = \dfrac{a}{2^2 \cdot 4^2}; \\ a_5 = 0; \\ a_6 = -\dfrac{a}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \\ \quad \text{u. s. w.}, \end{array}$$

wo a unbestimmt bleibt. Der gegebenen Gleichung leistet also Genüge der Ausdruck:

$$y = a\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots\right),$$

welcher nur ein besonderes Integral derselben ist. Die Annahme von $\alpha = -1$ würde zu der nämlichen Reihe geführt haben.

Die hier behandelten zwei Beispiele gehören zu der Klasse der linearen Differentialgleichungen. Es lassen sich darum nach dem im §. 231 angeführten Satze die allgemeinen Integrale derselben ermitteln. Bezeichnen wir in dem ersten Beispiele den besonderen Werth

$$x - 1 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{rc.}$$

mit y_1, so können wir das allgemeine Integral von

$$xy'' + y = 0$$

durch

$$y = C_1 y_1$$

darstellen, wofern C_1 nicht mehr als eine Constante, sondern als eine Function von x betrachtet wird, welche nach dem im §. 232 angegebenen Verfahren zu bestimmen ist. Man erhält

$$y_1 C''_1 + 2C'_1 y'_1 = 0;$$

woraus durch zwei successive Integrationen entsteht:

$$C'_1 = \frac{a_1}{y_1^2},\quad C_1 = a_1 \int \frac{dx}{y_1^2} + a_2,$$

wo a_1 und a_2 zwei willkührliche Constanten sind. Das allgemeine Integral von

$$xy'' + y = 0$$

ist also durch

$$y = y_1 \left(a_1 \int \frac{dx}{{y_1}^2} + a_2\right)$$

ausgedrückt. Für das zweite Beispiel

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0,$$

wenn der besondere Werth

$$1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}$$

mit y_1 bezeichnet wird, haben wir das allgemeine Integral

$$y = C_1 y_1;$$

wo zur Bestimmung von C_1 die Relation

$$y_1 C''_1 + \left(2y'_1 + \frac{y_1}{x}\right) C'_1 = 0,$$

oder wenn man $C'_1 = t$ setzt:

$$\frac{dt}{t} + 2 \frac{dy_1}{y_1} + \frac{dx}{x} = 0,$$

woraus

$$t = \frac{a_1}{x{y_1}^2};$$

mithin

$$C_1 = a_2 + a_1 \int \frac{dx}{x{y_1}^2},$$

wo a_1 und a_2 zwei willkührliche Constanten darstellen. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

ist also:

$$y = y_1 \left(a_2 + a_1 \int \frac{dx}{x{y_1}^2}\right);$$

oder, weil

$$\int \frac{dx}{xy_1^2} = \int \frac{dx}{x}(1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \cdots) =$$

$$lx + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4} + \cdots \text{ ist,}$$

wo α, $\beta \cdots$ leicht zu bestimmende numerische Coefficienten sind:

$$y = \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots\right) \left\{ a_2 + a_1 \left(lx + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4} \cdots\right) \right\}$$

2. Integration der Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale.

§. 247. **Verwandtschaftliche Beziehungen der Gleichung: $y'' = kx^n y$.** Setzt man

$$y = e^{\int z dx}$$

in der Gleichung

$$y'' = kx^n y,$$

so kommt die transformirte Gleichung:

$$z' + z^2 = kx^n,$$

welches genau die Riccatische Gleichung ist. Läßt sich dieselbe integriren, mithin der Werth von z daraus ableiten; so kann y mittelst der Relation

$$y = e^{\int z dx}$$

bestimmt werden.

Ist umgekehrt die Riccatische Gleichung:

$$y' + ay^2 = bx^n$$

gegeben, so erhält man, wenn

$$y = \frac{1}{au} \cdot \frac{du}{dx}$$

gesetzt wird, die transformirte Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = abux^n,$$

welche mit der Gleichung

$$y'' = kx^n y$$

identisch ist, wenn man y statt u und k für ab setzt. Vermittelst der für u gefundenen Reihe ließe sich demnach die Riccati'sche Differentialgleichung integriren, indem y durch eine bloße Differentiation aus u abgeleitet werden kann.

Setzt man in der Gleichung

$$y'' = kx^n y$$

$x^{\frac{n}{2}+1} = t$, so findet man mit Hinzuziehung der allgemeinen Formel:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

folgende Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{ky}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2},$$

welche, wenn t mit x vertauscht und

$$2m = \frac{n}{n+2} \text{ und } b = \frac{k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}$$

genommen wird, in nachstehende übergeht:

$$y'' + \frac{2m}{x} y' = by.$$

Diese Gleichung kann demnach als durch Reihen integrirt betrachtet werden.

Aehnliches gilt von der Differentialgleichung

$$y'' - m\frac{(m-1)}{x^2} = by,$$

welche sich in folgende verwandelt:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{x} \cdot \frac{du}{dx^2} = bu,$$

wenn man $y = x^m u$ setzt.

§. 248. **Reihen ausgedrückt durch bestimmte Integrale.** Suchen wir die Gleichung:

$$y'' - m\frac{(m-1)}{x^2} = by$$

durch Reihen zu integriren. Wir erhalten die Gleichung:

$$a\left\{\alpha(\alpha-1)-m(m-1)\right\}x^{\alpha-2}+a_1\left\{\alpha_1(\alpha_1-1)-m(m-1)\right\}x^{\alpha_1-2}$$

$$+a_2\left\{\alpha_2(\alpha_2-1)-m(m-1)\right\}x^{\alpha_2-2}+\cdots=bax^{\alpha}+ba_1x^{\alpha_1}+ba_2x^{\alpha_2}\cdots,$$

welche folgende Bedingungsgleichungen liefert:

$$\alpha(\alpha-1)-m(m-1)=0;$$

$$\alpha_i=\alpha+2i;$$

$$a_i\left\{\alpha_i(\alpha_i-1)-m(m-1)\right\}=ba_i-1.$$

Die erste derselben gibt für α zwei Werthe:

$$\alpha=m \text{ und } \alpha=1-m;$$

die dritte verwandelt sich, wenn man für α_i seinen aus der zweiten entnommenen Werth setzt, in:

$$\alpha_i\left\{\alpha(\alpha-1)+2i(2i+2\alpha-1)-m(m-1)\right\}=ba_i-1,$$

oder wegen

$$\alpha(\alpha-1)-m(m-1)=0,$$

einfacher in:

$$2i(2i+2\alpha-1)a_i=ba_i-1.$$

Hieraus erwächst für das vollständige Integral folgender Reihenausdruck:

$$y=Cx^m\left\{1+\frac{bx^2}{2(2m+1)}+\frac{b^2x^4}{2\cdot4(2m+1)(2m+3)}\cdots\right\}$$

$$+C_1x^{1-m}\left\{1+\frac{bx^2}{2(3-2m)}+\frac{b^2x^4}{2\cdot4(3-2m)(5-2m)}\cdots\right\}$$

Die letzteren Reihen haben die Eigenthümlichkeit, daß sie summirt und durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden können. Denn setzt man in folgender dem §. 95 entnommener Formel:

$$\int\sin^m x\cos^n x dx=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\sin^m x\cos^{n-2}x dx$$

$$x=\vartheta,\ m=2\alpha-1,\ n=2i:$$

so kommt:

$$\int\sin^{2\alpha-1}\vartheta\cos^{2i}\vartheta d\vartheta=\sin^{2\alpha}\vartheta\cos^{2i-1}\vartheta$$

$$+\frac{2i-1}{2i+2\alpha-1}\int\cos^{2i-2}\vartheta\sin^{2\alpha-1}\vartheta d\vartheta.$$

Wenn man 0 und π zu den Integrationsgrenzen nimmt, verschwindet der integrirte Theil jedesmal, wenn α eine positive reelle Größe oder eine imaginäre Größe mit einem reellen positiven Bestandtheile ist, so daß wird:

$$\int_0^\pi \cos^{2i}\vartheta\sin^{2\alpha-1}d\vartheta = \frac{2i-1}{2i+2\alpha-1}\int_0^\pi \cos^{2i-2}\vartheta\sin^{2\alpha-1}\vartheta d\vartheta.$$

Vermöge dieser letzten Relation wird der Gleichung:

$$2i\,(2i+2\alpha-1)\,a_i = ba_i - 1$$

Genüge gethan, wenn man setzt:

$$a_i = \frac{ab_i}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2i-1)\,2i}\int_0^\pi \cos^{2i}\vartheta\sin^{2\alpha-1}\vartheta d\vartheta.$$

Folglich kann man, wenn der Größe α successive die Werthe m und $1-m$ beigelegt werden, das erhaltene auf nachstehende Form bringen:

$$y = Cx^m\int_0^\pi\left(1+\frac{bx^2}{1\cdot 2}\cos^2\vartheta+\frac{b^2x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cos^4\vartheta\cdots\right)\sin^{2m-1}\vartheta d\vartheta$$

$$+\,C_1x^{1-m}\int_0^\pi\left(1+\frac{bx^2}{1\cdot 2}\cos^2\vartheta+\frac{b^2x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cos^4\vartheta\cdots\right)\sin^{1-2m}\vartheta d\vartheta.$$

Nun ist aber:

$$1+\frac{bx^2}{1\cdot 2}\cos^2\vartheta+\frac{b^2x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cos^4\vartheta+\frac{b^3x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cos^6\vartheta\cdots$$

$$=\cos\sqrt{-1}\cdot x\sqrt{b}\cos\vartheta = \frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}+\frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\vartheta};$$

also:

$$y = Cx^m\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}+\frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\vartheta}\right)\sin^{2m-1}\vartheta d\vartheta$$

$$+\,C_1x^{1-m}\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}+\frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\vartheta}\right)\sin^{1-2m}\vartheta d\vartheta.$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch vereinfachen; denn wegen Wahl der Integrationsgrenzen und der Natur der Functionen sin ϑ, cos ϑ hat man:

$$\int_0^\pi e^{-\mu\cos\vartheta}\sin^\nu\vartheta d\vartheta = \int_0^\pi e^{\mu\cos\vartheta}\sin^\nu\vartheta d\vartheta;$$

folglich:

$$y = Cx^m \int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta} \sin^{2m-1}\vartheta d\vartheta$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta} \sin^{1-2m}\vartheta d\vartheta.$$

§. 249. **Fortsetzung.** Vorstehende Transformationen setzen voraus, daß α eine reelle positive Größe oder eine imaginäre Größe mit einem reellen positiven Bestandtheile ist. Folglich wird, um nur den Fall reeller Werthe zu betrachten, das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$y'' - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by$$

durch bestimmte Integrale ausgedrückt, wenn die Größe m zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt.

Wenn m = 0 oder m = 1, reducirt sich die vorhergehende Differentialgleichung auf:

$$y'' = by,$$

deren vollständiges Integral ist:

$$y = ce^{x\sqrt{b}} + C_1 e^{-x\sqrt{b}}.$$

Wenn $m = \frac{1}{2}$ ist, so hat man

$$y = (C + C_1)\sqrt{x} \int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta} d\vartheta.$$

Da die beiden Constanten in eine einzige zusammenfallen, so hat man nur noch ein besonderes Integral der Differentialgleichung:

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = by.$$

Um im vorkommenden Falle das vollständige Integral zu erhalten, schlagen wir folgenden Weg ein. Wir setzen in dem Gliede, welches mit C multiplicirt ist, $m = \frac{1}{2}$, und in dem Gliede, das mit C_1 multiplicirt ist, $m = \frac{1}{2} + \varepsilon$; es entsteht dadurch:

$$y = C\sqrt{x}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

$$+ C_1\sqrt{x}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}(x\sin^2\vartheta)^{-\varepsilon}\,d\vartheta.$$

Nun ist aber:

$$u^{-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1}\,lu + \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}(lu)^2 - \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}(lu)^3 + \text{ꝛc.};$$

mithin, wenn man $(x\sin^2\vartheta)^{-\varepsilon}$ nach dieser Formel entwickelt, und $C + C_1 = A$, ferner $C_1\varepsilon = -B$ setzt:

$$y = A\sqrt{x}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

$$+ B\sqrt{x}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\,l(x\sin^2\vartheta)\,d\vartheta + \varepsilon BX,$$

wo X eine Größe bedeutet, welche einen endlichen Werth behält, wenn ε verschwindet. Macht man nun $\varepsilon = 0$, so kommt:

$$y = A\sqrt{x}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

$$+ B\sqrt{x}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\,l(x\sin^2\vartheta)\,d\vartheta$$

als vollständiges Integral der Gleichung

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = by.$$

Wenn m einen größeren Werth als 1 hat, so muß das Glied mit dem Coefficienten C_1 in der letzten Gleichung des vorigen Paragraphen weggelassen, dagegen nur dieses Glied beibehalten werden, wenn m einen negativen Werth bekommt. In dem einen wie in dem andern Falle erhält man demnach unmittelbar nur ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$y'' - \frac{m(m-1)}{x^2}\,y = by$$

unter endlicher Form. Es sei y_1 dieses particuläre Integral. Das zweite Integral findet man, wenn man setzt $y = uy_1$ und ausdrückt, daß dieser Werth, wo u eine Function von x ist, der vorgelegten Differentialgleichung Genüge thut. Auf diese Weise ergibt sich, daß das allgemeine Integral folgende Form hat:

$$y = cy_1\left(\int \frac{dx}{y_1^2} + c_1\right).$$

Wenn man in der Gleichung

$$y = Cx^m \int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta} \sin^{2m-1}\vartheta d\vartheta$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta} \sin^{1-2m}\vartheta d\vartheta$$

setzt $\cos\vartheta = t$; so verwandelt sie sich in:

$$y = Cx^m \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{b}\,.\,t} (1 - t^2)^{m-1}\, dt$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{b}\,.\,t} (1 - t^2)^{-m}\, dt;$$

und das particuläre Integral der Differentialgleichung wird ausgedrückt durch:

$$y_1 = Cx^m \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{b}\,.\,t} (1 - t^2)^{m-1}\, dt,$$

oder

$$y_1 = C_1 x^{1-m} \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{b}\,.\,t} (1 - t^2)^{-m}\, dt,$$

je nachdem $m > 1$ oder $m < 1$ ist. Die erste dieser Integrationen läßt sich bewerkstelligen, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet; dasselbe gilt von der zweiten, wenn m eine ganze negative Zahl bezeichnet. Man hat also jedesmal, wenn m eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet, ein particuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung unter endlicher Form; und die Bestimmung des allgemeinen Integrales derselben Gleichung wird nach der Formel:

$$y = cy_1\left(\int \frac{dx}{y_1^2} + c_1\right)$$

auf die Quadraturen zurückgeführt.

§. 250. **Schluß.** (Noch einige hierher gehörige Beispiele.) Die Gleichung

$$(a_n + b_n x)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \cdots (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

kann stets durch bestimmte Integrale aufgelöst werden. Man setze

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du,$$

wo V eine bloße Function von u und u', u'' schicklich zu bestimmende Grenzen sind. Man hat alsdann

$$y' = \int_{u'}^{u''} u e^{ux} V du, \quad y'' = \int_{u'}^{u''} u^2 e^{ux} V du,$$

$$y''' = \int_{u'}^{u''} u^3 e^{ux} V du \cdots,$$

wodurch die vorgesetzte Differentialgleichung, wenn

$$a_n u^n + \cdots + a_1 u + a_0 = U_0, \quad b_n u^n + \cdots + b_1 u + b_0 = U_1$$

gesetzt wird, in

$$\int_{u'}^{u''} [U_0 + U_1 x] \, e^{ux} V du = 0$$

übergeht. Aus dieser Gleichung läßt sich nun noch nichts folgern. Verwandelt man sie jedoch durch theilweise Integration in folgende

$$\Big\{ e^{ux} U_1 V \Big\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{ux} \left[U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{du} \right] du = 0,$$

so zerfällt dieselbe wegen der Willkührlichkeit von x offenbar in nachstehende zwei:

$$U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{du} = 0, \quad \Big\{ e^{ux} U_1 V \Big\}_{u'}^{u''} = 0,$$

wobei das letztere Symbol die Differenz der beiden Werthe bezeichnet, welche aus $e^{ux} U_1 V$ für $u = u''$ und $u = u'$ hervorgehen. Die erste der beiden letzteren Gleichungen bestimmt nun die Größe V durch eine Differentialgleichung der ersten Ordnung und liefert:

$$V = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}.$$

Da jetzt V bekannt ist, so bleiben nur noch für u' und u'' solche Werthe zu bestimmen übrig, daß

$$\Big\{ e^{ux} U_1 V \Big\}_{u'}^{u''}$$

für jeden Werth von x verschwindet. Heißen dieselben u', u'', u''', $u^{IV} \cdots$, so sind

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux} V du, \quad \int_{u''}^{u'''} e^{ux} V du, \quad \int_{u'''}^{u^{IV}} e^{ux} V du \cdots$$

particuläre Integrale der gegebenen Gleichung, also die ganze Auflösung

$$y = C_1 \int_{u'}^{u''} e^{ux} V du + C_2 \int_{u''}^{u'''} e^{ux} V du$$

$$+ C_3 \int_{u'''}^{u^{IV}} e^{ux} V du + \cdots$$

Die Bestimmung von u', u'', u''' etc. kann demnach auch von der Erfüllung der Gleichung

$$C_1 \left\{ e^{ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} + C_2 \left\{ e^{ux} U_1 V \right\}_{u''}^{u'''}$$

$$+ C_3 \left\{ e^{ux} U_1 V \right\}_{u'''}^{u^{IV}} + \cdots = 0$$

abhängig gemacht werden; würde es z. B. gelingen, für u', u'' etc. Werthe zu finden, so daß alle einzelnen Ausdrücke vielfache derselben Function von x würden, $A_1 f(x)$, $A_2 f(x)$ etc., so würden nur die Constanten noch die Bedingung $A_1 C_1 + A_2 C_2 + \cdots = 0$ zu erfüllen haben.

Beispiel 1). Für die oft behandelte Gleichung

$$xy'' + 2ay' - b^2 xy = 0$$

hat man

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = \int \frac{2au}{u^2 - b^2} du = l\,(u^2 - b^2)^a,$$

also

$$V = (u^2 - b^2)^{a-1},$$

mithin

$$y = \int e^{ux} (u^2 - b^2)^{a-1} du.$$

Die Grenzen bestimmen sich aus

$$\left\{ (u^2 - b^2)^a \; e^{ux} \right\}_{u'}^{u''} = 0,$$

woraus sich die Grenzwerthe ergeben

$$u' = b,\; u'' = -b,\; u''' = \mp \infty,$$

je nachdem $x \gtrless 0$. Mithin ist

$$y = C_1 \int_{-b}^{b} (u^2 - b^2)^{a-1} e^{ux} du$$

$$+ C_2 \int_{-b}^{-\infty} (u^2 - b^2)^{a-1} e^{ux} du \cdots x > 0,$$

$$y = C_1 \int_{-b}^{b} (u^2 - b^2)^{a-1} e^{ux} du$$

$$+ C_2 \int_{b}^{\infty} (u^2 - b^2)^{a-1} e^{ux} du \cdots x < 0.$$

So oft a eine ganze Zahl ist, lassen sich die Integrationen ausführen. Z. B. für $a = 2$ ist die Auflösung der Gleichung

$$xy'' + 4y' - b^2xy = 0$$

$$y = C_1 e^{bx}\left(x^2 - \frac{x}{b}\right) + C_2 e^{-bx}\left(x^2 + \frac{x}{b}\right).$$

Beispiel 2). Es sei die Gleichung

$$x^2y'' + 6xy' + (4 - x^2)\, y = 0$$

zu integriren. Für

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{xu}\, V du,\; y' = \int e^{xu}\, uV du,\; y'' = \int e^{xu}\, u^2 V du$$

erhält man, nach theilweiser Integration

$$\left\{\left[x\,(u^2 - 1)\, V - \frac{d\,(V\,(u^2 - 1))}{du} + 6uV\right] e^{xu}\right\}_{u'}^{u''}$$

$$+ \int_{u'}^{u''} \left((u^2 - 1)\, V'' - 2uV'\right) e^{xu}\, du = 0.$$

Aus

$$(u^2 - 1)\, V'' - 2uV' = 0$$

folgt nun

$$V = u^3 - 3u + C.$$

Setzt man diesen Werth in die Grenzengleichung ein, so findet man

$$\left\{\begin{matrix} x\,(u^2 - 1)\,(u^3 - 3u + C)\, e^{xu} - 3\,(u^2 - 1)\, e^{xu} \\ + 6u\,(u^3 - 3u + C)\, e^{xu} - 2u\,(u^3 - 3u + C)\, e^{xu} \end{matrix}\right\}_{u'}^{u''} = 0.$$

Eine Auflösung dieser Gleichung ist $x = \pm \infty$, je nachdem x negativ oder positiv ist. Um eine zweite zu finden, legen wir der Constanten C solche Werthe bei, daß $u^2 - 1$ und $u^3 - 3u + C$ einen gemeinschaftlichen Factor bekommen, mit dessen Verschwinden ebenfalls die Gleichung befriedigt wird. Man kann also $C = 2$ und $C = -2$ setzen, was als Werth der oberen und unteren Grenzen $\pm \infty$ und 1, und für ein anderes particuläres Integral $\pm \infty$ und -1 liefert.

Wir haben also

$$y = A\int_{1}^{\pm\infty} (u^3 - 3u + 2)\, e^{ux} du + B\int_{-1}^{\pm\infty} (u^3 - 3u - 2)\, e^{ux} du,$$

je nachdem x negativ oder positiv ist. Da sich alle in diesem Ausdrucke vorkommenden Integrationen ausführen lassen, so kann die Auflösung in endlicher Form angegeben werden. Man findet

$$y = C_1 e^x \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) + C_2 e^{-x} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right).$$

3. Singuläre Integrale der Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 251. **Herleitung der singulären Integrale aus den allgemeinen Integralen.** Im §. 219 wie im §. 224 haben wir schon bemerkt, daß für eine gegebene Differentialgleichung neben der allgemeinen mit den unbestimmten Constanten versehenen Integralgleichung zuweilen noch eine andere ursprüngliche Gleichung sich ausmitteln läßt, welche weder die unbestimmten Constanten mit sich führt, noch den Zusatz derselben verträgt, mithin auch nicht in der allgemeinen Integralgleichung enthalten ist. Eine derartige unter dem allgemeinen Integral nicht begriffene Relation zwischen x und y, welche deren Differentialgleichung Genüge thut, heißt eine *besondere Auflösung* oder ein *singuläres Integral* derselben.

Um über die Natur der singulären Integrale nähere Auskunft zu erhalten, denke man sich

$$F(x, y, a) = 0$$

als das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Diese Letztere wäre mithin das Resultat der Elimination der Constante a aus der primitiven Gleichung und deren unmittelbarem Differential

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Nun wird aber der Hergang der Elimination einer Größe aus zwei Gleichungen nicht durch Beschaffenheit dieser Größe, sondern nur durch die Art ihrer Verbindung mit den übrigen bedingt. So lange die beiden Gleichungen

$$F(x, y, a) = 0 \text{ und } \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

dieselben bleiben, wird auch das Ergebniß dieser Elimination dasselbe sein, oder die Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

zum Vorschein kommen, mag man dabei a als eine constante oder als eine variabele Größe ansehen. Unter der letzteren Voraussetzung erhält man aus der Gleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

durch unmittelbare Differentiation die Gleichung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{da}\cdot\frac{da}{dx} = 0.$$

Soll also auch in dem Falle, wo a veränderlich ist, dasselbe Resultat erzielt werden; so ist es hinreichend diese Function mittelst der Bedingungsgleichung

$$\frac{dF}{da} = 0$$

zu bestimmen. Da das Resultat der Elimination dasselbe bleibt, wenn nur in der obigen Gleichung

$$\frac{dF}{da}\cdot\frac{da}{dx} \text{ gegen } \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

verschwindet, so ist es auch hinreichend,

$$\frac{dF}{dx} = \infty \text{ oder } \frac{dF}{dy} = \infty$$

zu setzen, und demgemäß die Constante zu bestimmen, wenn nicht zugleich dabei

$$\frac{dF}{da}\cdot\frac{da}{dx}$$

unendlich ausfällt.

Aus dem Gesagten ergibt sich sofort folgende Regel, um das singuläre Integral einer gegebenen Differentialgleichung zu erhalten, wenn man deren allgemeines Integral kennt. Man differentiirt dieses Integral blos auf die darin vorkommende willkührliche Constante und eliminirt dann gedachte Constante aus dem erhaltenen Differentialquotienten und dem vorliegenden allgemeinen Integral oder man eliminirt die Constante zwischen der primitiven Gleichung und derjenigen,

welche durch Unendlichsetzen ihres partiellen Differentialquotienten in Bezug auf x oder y entsteht. Das Resultat ist ein singuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wenn es nicht durch einen besonderen dem a beigelegten Werth aus dem allgemeinen Integral abgeleitet werden kann.

Eine andere Gattung von besonderen Auflösungen einer gegebenen Differentialgleichung

$$Mdy + Ndx = 0$$

geben die Factoren derselben, welche, die Differentiale dx und dy nicht mehr enthaltend, der Null gleich gesetzt, Relationen zwischen x und y aufstellen, die der vorgelegten Differentialgleichung genügen. Man bekommt diese Art von Auflösungen dadurch, daß man den gemeinschaftlichen Theiler zwischen M und N sucht.

§. 252. **Beispiele.**

1) Eliminirt man die Constante a zwischen der ursprünglichen Gleichung

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2$$

und ihrer Derivirten; so bekommt man

$$(x^2 - 2y^2)\, y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0.$$

Die primitive Gleichung nach a differentiirt gibt

$$a = -y.$$

Durch Substitution dieses Werthes in das allgemeine Integral erhält man

$$x^2 + 2y^2 = 0,$$

ein Resultat, welches unserer Differentialgleichung Genüge thut, obschon es in deren Integral nicht begriffen ist.

2) Ebenso gibt die Elimination von a zwischen der Gleichung

$$x^2 - 2ay - b - a^2 = 0$$

und ihrer Derivirten das Resultat:

$$y'^2\,(x^2 - b) - 2xyy' = x^2.$$

Die Differentiation in Bezug auf a allein liefert

$$a = -y,$$

wodurch sich die ursprüngliche Gleichung in

$$x^2 + y^2 = b$$

verwandelt, was eine besondere Auflösung unserer Differentialgleichung ist

3) Die Gleichung

$$y = x + (a - 1)^2 \sqrt{x}$$

gibt, wenn blos auf a differentiirt wird,

$$2 (a - 1) \sqrt{x} = 0,$$

woraus $a = 1$. Die diesem Werthe entsprechende Gleichung $y = x$ bildet kein singuläres, sondern blos ein particuläres Integral.

4) Die Gleichung

$$y^2 + x^2 = 2ax$$

gibt, wenn blos auf a differentiirt wird, $2x = 0$, was ein dem $a = \infty$ entsprechendes besonderes Integral anzeigt.

5) Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y' = 2y - 2x - 1 + b \sqrt{y - x - 1}$$

ist

$$2 \sqrt{y - x - 1} + b = Ce^x.$$

Der partielle Differentialquotient dieser Gleichung in Bezug auf x oder y unendlich gesetzt, gibt $y = x + 1$ als singuläre Lösung.

6) Für

$$(x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2ay) + (x^2 - b) a^2 = 0$$

erhält man, wenn blos auf a differentiirt wird:

$$- y (x^2 + y^2 - b) + (x^2 - b) a = 0;$$

woraus

$$a = \frac{y (x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b}.$$

Dieser Werth für a in die erste Gleichung substituirt, gibt:

$$y^4 (y^2 + x^2 - b) = 0,$$

welches Resultat man auch unmittelbar aus der gegebenen Gleichung ableitet, wenn man darin $a = 0$ setzt; dasselbe bildet daher keine besondere Auflösung, sondern blos ein besonderes Integral der durch die Elimination von a zum Vorschein kommenden Differentialgleichung.

7) Für

$$y = x + (a - 1)^2 (a - x^2)$$

findet man

$$(a - x)(a - 1)(2a - x - 1) = 0.$$

Dem $a = 1$ entspricht das besondere Integral $y = x$; Aehnliches liefert $a = x$. Endlich gibt

$$a = \frac{1}{2}(x + 1)$$

die besondere Auflösung.

8) Das allgemeine Integral der Gleichung

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} + y' (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}) = 0,$$

welches leicht mittelst des integrirenden Factors

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

bestimmt wird, ist

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} + C = 0.$$

Die partiellen Differentialquotienten dieser Gleichung in Bezug auf x und y werden unendlich durch die Annahmen $y = x$ und $y = -x$. Dieselben drücken mithin singuläre Integrale aus.

§. 253. **Anderweitige Methode zur Bestimmung der singulären Integrale.** Die oben aufgestellte Regel zur Ermittelung des singulären Integrals einer Differentialgleichung aus ihrem allgemeinen Integral ist unbrauchbar, wenn das Letztere von der Form

$$\varphi(x, y) = a$$

ist, mithin a auf der linken Seite der Gleichung nicht erscheint. In solchem Falle läßt sich die Aufgabe auf anderem Wege zur Lösung bringen. Differentiirt man nemlich die Gleichung

$$F(x, y, a) = 0,$$

indem man die Größe a successive als eine Constante und dann als eine Function von x, y ansieht; so hat man:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot y' = 0$$

und

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + y' \frac{da}{dy}\right) = 0;$$

folglich

$$y' = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}$$

und

$$y' = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} - \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + y'\frac{da}{dy}\right) : \frac{dF}{dy};$$

diese beiden Werthe von y' stimmen überein, wenn man a dergestalt als Function von x, y bestimmt, daß der einen oder der andern der beiden Relationen:

$$\frac{dF}{da} = 0, \ \frac{dF}{dy} = \infty$$

Genüge geschieht. Uebrigens muß, wenn die Derivirte $\frac{dF}{dy}$ unendlich wird, im Allgemeinen auch die Derivirte $\frac{dF}{dx}$ unendlich werden, weil sonst die Derivirte y' beständig Null wäre. Um die in Frage stehende besondere Auflösung von

$$f\left(x, \ y, \ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

auch aus deren allgemeinen Integral von der Form

$$\varphi\ (x, y) = a$$

ausfindig zu machen, brauchen wir blos die Nenner der beiden Derivirten $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ oder vielmehr den gemeinschaftlichen Factor dieser Nenner gleich Null zu setzen. Ehe man jedoch die dergestalt gewonnene Relation zwischen x und y für ein singuläres Integral der Differentialgleichung

$$f\left(x, \ y, \ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

erklärt, wird man erst nachsehen, ob dieselbe nicht von solcher Beschaffenheit ist, daß durch ihre Combination mit

$$\varphi\ (x, y) = a$$

eine constante Größe zum Vorschein kommt, in welchem Falle man bloß ein besonderes Integral von der gegebenen Differentialgleichung gefunden hätte. — Wenn die Function F eine von Wurzelgrößen und Nennern befreite algebraische Function ist, so können die Gleichungen

$$\frac{dF}{dy} = \infty, \ \frac{dF}{dx} = \infty$$

keine Auflösungen haben.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

oder

$$\frac{xdx - 2dy}{\sqrt{x^2 - 4y}} + dx = 0$$

liefert sofort das allgemeine Integral

$$\sqrt{x^2 - 4y} + x + a = 0$$

oder

$$4y + 2ax + a^2 = 0,$$

woraus

$$a = - x + \sqrt{x^2 - 4y}.$$

Die Derivirte dieses Ausdruckes in Bezug auf y ist

$$- \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4y}}$$

und wird unendlich durch

$$x^2 - 4y = 0;$$

welche Relation in der That sich als ein singuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung herausstellt.

Bringt man die Differentialgleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

auf die Form

$$Mdx + Ndy = 0,$$

und kennt man den integrirenden Factor μ der letzteren, so wird derselbe für die besondere Auflösung, welche der Differentialgleichung Genüge leistet, einen unendlichen Werth erhalten. Denn es muß offenbar sein:

$$\mu Mdx + \mu Ndy = d\varphi(x, y) = \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy;$$

mithin

$$M\mu = \frac{d\varphi}{dx}, \quad N\mu = \frac{d\varphi}{dy};$$

oder

$$\mu = \frac{1}{M} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{N} \cdot \frac{d\varphi}{dy},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung nach dem oben Gesagten erhellet.

Die Differentialgleichung

$$xdx + ydy = dy \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$$

z. B. wird, wenn man sie mit dem Factor

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}$$

multiplicirt, zu einem genauen Differential

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}} - dy = 0;$$

und in der That wird für das singuläre Integral

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

jener integrirende Factor unendlich.

§. 254. **Herleitung der singulären Integrale aus der Differentialgleichung.** Die oben auseinandergesetzten Verfahren zur Ermittelung des singulären Integrals der Differentialgleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

erheischen die Kenntniß des allgemeinen Integrals

$$F(x, y, a) = 0 \text{ oder } \varphi(x, y) = a$$

oder doch des integrirenden Factors μ. Das singuläre Integral kann aber auch aus der Differentialgleichung, wenn sie ein solches gestattet, selbst hergeleitet werden, wie uns Lagrange auf folgende Weise nachgewiesen hat.

Die Differentialgleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ist das Resultat der Elimination der Constante a aus ihrer allgemeinen Integralgleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

und deren unmittelbarer Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0,$$

wobei M und N Functionen von x, y und a sind. Denken wir uns nun aus der letzteren Gleichung den Werth von a gesucht, welcher durch

$$a = \psi \left(x, \ y, \ \frac{dy}{dx}\right)$$

dargestellt werden mag, und denselben in die ursprüngliche Gleichung

$$F\ (x, y, a) = 0$$

eingeführt; so haben wir die Gleichung:

$$F \left(x, \ y, \ \psi \left[x, \ y, \ \frac{dy}{dx}\right]\right) = 0,$$

oder kürzer

$$F\ (x, \ y, \ \psi) = 0,$$

welche, wenn sie mit der Differentialgleichung

$$f \left(x, \ y, \ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

nicht ganz übereinstimmt, sich davon nur durch einen Factor P unterscheidet, der x, y und $\frac{dy}{dx}$ enthalten kann. Es sei also:

$$f \left(x, \ y, \ \frac{dy}{dx}\right) = P \cdot F\ (x, \ y, \ \psi);$$

woraus durch Differentiation entspringt:

$$df \left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = P \cdot dF\ (x, \ y, \ \psi) + F\ (x, \ y, \ \psi) \cdot dP.$$

Nun ist

$$dF\ (x, \ y, \ \psi) = \frac{dF\ (x, \ y, \ \psi)}{dx} dx + \frac{dF\ (x, \ y, \ \psi)}{dy} dy$$
$$+ \frac{dF\ (x, \ y, \ \psi)}{d\psi} d\psi,$$

wo die Derivirten

$$\frac{dF\ (x, \ y, \ \psi)}{dx}, \ \frac{dF\ (x, \ y, \ \psi)}{dy}$$

sich von den in

$$Mdx + Ndy = 0$$

vorkommenden Functionen M, N bloß darin unterscheiden, daß in denselben statt a der Ausdruck

$$\psi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)$$

eingeführt wurde, welcher aus

$$Mdx + Ndy = 0$$

entsprungen ist. Es müssen sich deßhalb die Glieder

$$\frac{dF(x,\ y,\ \psi)}{dx}\,dx + \frac{dF(x,\ y,\ \psi)}{dy}\,dy$$

ohne Rücksicht auf die zwischen x und y bestehende Relation gegenseitig tilgen, so daß die Gleichung

$$dF\ (x,\ y,\ \psi) = \frac{dF\ (x,\ y,\ \psi)}{d\psi}\,d\psi$$

stattfindet. Wir haben demnach, wenn wir

$$\frac{1}{P}\,f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) \text{ statt } F\ (x,\ y,\ \psi)$$

schreiben:

$$df\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = P \cdot \frac{dF\ (x,\ y,\ \psi)}{d\psi}\,d\psi + \frac{dP}{P}\,f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right),$$

oder

$$\frac{dF\ (x,\ y,\ \psi)}{d\psi} = 0,$$

weil

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Differentiirt man nun die identische Gleichung

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = P \cdot F\ (x,\ y,\ \psi)$$

blos in Bezug auf

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

so findet man:

$$\frac{df\ (x,\ y,\ y')}{dy'} = P \cdot \frac{dF\ (x,\ y,\ \psi)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dy'} + \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy'}\,f\,(x,y,y')$$

oder

$$\frac{df\ (x,\ y,\ y')}{dy'} = 0,$$

weil

$$\frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} = 0 \text{ und } f(x, y, y') = 0.$$

Es ist aber

$$df(x, y, y') = \frac{df(x, y, y')}{dx} dx + \frac{df(x, y, y')}{dy} dy$$
$$+ \frac{df(x, y, y')}{dy'} dy';$$

mithin auch

$$\frac{df(x, y, y')}{dx} + \frac{df(x, y, y')}{dy} y' = 0.$$

Die Gleichungen

$$\frac{df(x, y, y')}{dy'} = 0$$

und

$$\frac{df(x, y, y')}{dx} + \frac{df(x, y, y')}{dy} y' = 0$$

sind unter sich sowohl als auch mit

$$\frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} = 0$$

gleichbedeutend; die Wegschaffung der Derivirten y′ mittelst einer der beiden ersteren aus der Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

fällt also mit dieser Operation in Bezug auf die Gleichungen

$$\frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} = 0 \text{ und } F\left\{x, y, \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$$

zusammen; oder, weil hier y′ blos in ψ vorkommt, mit der Elimination von ψ aus diesen beiden letzteren. Daraus ergibt sich aber offenbar die nämliche Relation, welche aus der Elimination von a aus

$$F(x, y, a) = 0 \text{ und } \frac{dF}{da} = 0$$

entspringt. Die Elimination von y′ sowohl aus

$$\frac{df(x, y, y')}{dy'} = 0 \text{ und } f(x, y, y') = 0,$$

wie auch aus

$$\frac{df\,(x,\,y,\,y')}{dx} + \frac{df\,(x,\,y,\,y')}{dy}\,y' = 0 \text{ und } f\,(x,\,y,\,y') = 0$$

führt demnach zu dem singulären Integral der Differentialgleichung

$$f\left(x,\,y,\,\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

wenn sie ein solches gestattet. Um darüber die gewünschte Sicherheit zu erhalten, wird man beide Eliminationen zugleich verrichten und erproben, ob sie dieselbe Finalgleichung liefern.

Das Kennzeichen des singulären Integrals für die Differentialgleichung

$$f\left(x,\,y,\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

läßt sich auch so ausdrücken, wenn man sagt, daß der Werth des Differentialquotienten der zweiten Ordnung

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

welchen jene Gleichung gibt, unbestimmt bleibt; denn dieses Resultat entspringt aus der Gleichung:

$$\frac{df\,(x,\,y,\,y')}{dx}\,dx + \frac{df\,(x,\,y,\,y')}{dy}\,dy + \frac{df\,(x,\,y,\,y')}{dy'}\,dy' = 0$$

mit Rücksicht auf die oben aufgestellten Relationen

$$\frac{df\,(x,\,y,\,y')}{dy'} = 0 \text{ und } \frac{df\,(x,\,y,\,y')}{dx} + \frac{df\,(x,\,y,\,y')}{dy}\,y' = 0.$$

Um also das singuläre Integral einer gegebenen Differentialgleichung

$$f\left(x,\,y,\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

zu finden, suche man die Derivirte y'' und setze sie gleich $\frac{0}{0}$; man bekommt so zwei Gleichungen zwischen x, y und y', welche durch die Elimination von y' mit der vorgelegten zwei neue Gleichungen in x und y liefern werden. Besitzen diese nun einen gemeinsamen Factor, so ist derselbe das singuläre Integral der gegebenen Differentialgleichung.

§. 255. **Beispiele.**

1) Die Gleichung

$$y'^2\,(x^2 - b) - 2xyy' - x^2 = 0$$

hat zur Derivirten

$$2y'' \{(x^2 - b) y' - xy\} - 2 (yy' + x) = 0;$$

woraus

$$y'' = \frac{yy' + x}{y' (x^2 - b) - xy}.$$

Setzt man

$$yy' + x = 0 \text{ und } y' (x^2 - b) - xy = 0$$

und eliminirt hierauf y' mittelst dieser Gleichungen aus der vorgelegten, so bekommt bei beiden Operationen dieselbe Endgleichung

$$x^2 (y^2 + x^2 - b) = 0,$$

deren Factor

$$y^2 + x^2 - b = 0$$

wir schon als eine besondere Auflösung erkannt haben.

2) Aus

$$(x^2 - 2y^2) y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0$$

entspringt durch Differentiation:

$$\frac{df}{dy} = (x^2 - 2y^2) y' - 2xy = 0.$$

Die Elimination von y' zwischen diesen beiden Gleichungen liefert das Resultat

$$x^2 + 2y^2 = 0,$$

welches ebenfalls schon als ein singuläres Integral erkannt worden ist.

3) Aus

$$xdx + ydy = dy \sqrt{x^2 + y^2 - b^2},$$

oder, wenn man das Wurzelzeichen wegschafft, aus

$$x^2 + 2xyy' + y'^2 (b^2 - x^2) = 0$$

erfolgt durch Differentiation in Bezug auf y' die Relation:

$$xy + y' (b^2 - x^2) = 0.$$

Indem man y' zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt, ergibt sich wie früher die besondere Auflösung:

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

4) Für die im §. 219 behandelte Differentialgleichung

$$ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

oder

$$y^2 - a^2 = 2xyy' + y'^2 (a^2 - x^2)$$

findet man, wenn y' mittelst der Gleichung

$$xy = y' (x^2 - a^2)$$

eliminirt wird, die besondere Auflösung:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

5) Die Gleichung

$$(xy' - y)(xy' - 2y) + x^3 = 0$$

liefert die Derivirte

$$x (2xy' - 3y) y'' - xy'^2 + yy' + 3x^2 = 0;$$

woraus

$$y'' = \frac{xy'^2 - yy' - 3x^2}{x (2xy' - 3y)}.$$

Bringt man diesen Ausdruck auf die Form $\frac{0}{0}$, so erhält man:

$$xy'^2 - yy' - 3x^2 = 0 \text{ und } 2xy' - 3y = 0.$$

Die Elimination von y' zwischen jeder dieser Gleichungen und der vorgelegten gibt die nämliche Endgleichung

$$y^2 - 4x^3 = 0,$$

welche demnach die besondere Auflösung derselben sein wird, während

$$y - ax - \frac{x^2}{a} = 0$$

deren allgemeines Integral ist.

6) Unterwirft man die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} - b - 2x = 0,$$

deren allgemeines Integral ist

$$y - bx - x^2 + a = 0,$$

wo a die willkührliche Constante bedeutet, der angegebenen Methode; so findet man kein Resultat, woraus hervorgeht, daß hier keine besondere Auflösung stattfinden kann.

§. 256. Eine andere Methode zur Bestimmung der singulären Integrale aus der vorgelegten Differentialgleichung selbst ergibt sich auf folgende Weise. Wir haben früher gesehen, daß, wenn

$$F(x, y, c) = 0$$

die primitive Gleichung vorstellt, die singuläre Lösung aus

$$\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy}} = 0$$

gefunden wird. Suchen wir nun dieser Forderung nachzukommen, wenn uns nur die Differentialgleichung unter der Form

$$y' = \varphi(x, y)$$

gegeben ist. Wir denken uns deßhalb

$$c = \psi(x, y, y)$$

aus der Gleichung

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} = 0$$

gesucht und in F substituirt, so daß

$$F(x, y, \psi(x, y, y')) = 0.$$

Daraus leitet man endlich die für jeden beliebigen Werth von x oder y identische Gleichung

$$F(x, y, \psi(x, y, \varphi)) = 0$$

ab. Hieraus ergibt sich nun durch partielle Differentiation nach x und y:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\psi}\left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\psi}\left(\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy}\right) = 0,$$

woraus sich ergibt, daß die obige Bedingung erfüllt wird, wenn

$$\frac{d\varphi}{dx} = \infty \text{ oder } \frac{d\varphi}{dy} = \infty,$$

und daß sie sonst auf keine Weise durch φ erfüllt werden kann. Daraus zieht man die einfache Regel, daß man nur aus der gegebenen Differentialgleichung die Derivirte y' partiell in Bezug auf x oder y

zu differentiiren und das Resultat $= \infty$ zu setzen habe, um eine singuläre Lösung zu finden. — Ist die Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

in Bezug auf y' implicit, so hat man die Bedingungen

$$\frac{df}{dy'} : \frac{df}{dx} = 0 \text{ und } \frac{df}{dy'} : \frac{df}{dy} = 0$$

zu erfüllen.

Beispiel: Die Gleichung

$$xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

liefert

$$y' = \frac{x}{-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}},$$

mithin

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$$

$$- \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\,(-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2})^2},$$

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\,(-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2})}.$$

Beide Werthe werden unendlich für

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,\; x^2 - a^2 = 0,$$

welche Gleichungen schon früher als singuläre Lösungen erkannt worden sind.

4. Singuläre Integrale der Differentialgleichungen höherer Ordnung.

§. 257. **Erste Regel zur Bestimmung der singulären Integrale der Differentialgleichungen höherer Ordnungen.** Es sei

$$F(x, y, y', y'' \cdots y^{(n-1)}, a) = 0$$

ein erstes Integral der Differentialgleichung der nten Ordnung:

$$f(x, y, y', y'' \cdots y^{(n)}) = 0,$$

wo a die durch die Integration eingeführte willkührliche Constante bezeichnet. Die letztere Gleichung ist das Resultat der Elimination

von a zwischen der ersteren und deren Derivirte:

$$F'(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = 0.$$

Offenbar ist aber das Resultat dieser Elimination dasselbe, möge a constant oder veränderlich sein, insofern jene beiden Gleichungen von der nämlichen Form sind. In dem Fall, daß nun a eine Function von x ist, ergibt sich als Derivirte:

$$F'(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) + \frac{da}{dx} \cdot \frac{dF}{da} = 0.$$

Die in Frage stehenden zwei Gleichungen sind identisch, wenn man

$$\frac{dF}{da} = 0$$

setzt, was a auf eine Function von x, y, y' ⋯ reducirt. Eliminirt man a mittelst derselben und der primitiven Gleichung:

$$F(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}, a) = 0,$$

so leistet die resultirende Gleichung der Gleichung

$$f(x, y, y' \cdots y^{(n)}) = 0$$

ebenfalls Genüge und ist ein singuläres Integral derselben, ausgenommen, wenn der aus $\frac{dF}{da} = a$ entlehnte Werth von a sich unmittelbar oder mittelst der Elimination als eine Constante herausstellt.

Die Gleichung

$$f(x, y, y' \cdots y^{(n)}) = 0$$

hat n erste Integrale der (n—1)ten Ordnung, welche durch:

$$F_1(x, y, y', y'' \cdots y^{(n-1)}, a_1) = 0,$$
$$F_2(x, y, y', y'' \cdots y^{(n-1)}, a_2) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F_n(x, y, y', y'' \cdots y^{(n-1)}, a_n) = 0$$

dargestellt werden mögen. Es wirft sich zunächst hier die Frage auf, welche Bewandtniß es mit den verschiedenen singulären Integralen habe, welche vermittelst der Relationen

$$\frac{dF_1}{da_1} = 0, \quad \frac{dF_2}{da_2} = 0, \cdots \frac{dF_n}{da_n} = 0$$

sich ergeben würden. Lagrange hat zuerst gezeigt, daß man immer zu demselben singulären Integral gelangt, von welcher ursprünglichen Gleichung man auch ausgehen mag.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, betrachten wir mit Lagrange die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

deren vollständiges Integral sei:

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0,$$

wo a_1, a_2 die durch die beiden Integrationen eingeführten Constanten sind. Die beiden Integrale der ersten Ordnung erhält man, wenn abwechselnd a_1 und a_2 zwischen der Gleichung

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0$$

und ihrer Derivirten

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot y' = 0,$$

welche wir mit Lagrange der Bequemlichkeit wegen durch

$$\varphi(x, y, y', a_1, a_2) = 0$$

bezeichnen wollen, eliminirt wird. Gedachte Elimination liefert:

$$F_1(x, y, y', a_1) = 0, \; F_2(x, y, y', a_2) = 0,$$

woraus die singulären Integrale der ersten Ordnung erwachsen, wenn die Constanten a_1 und a_2 aus diesen Gleichungen vermittelst der Relationen:

$$\frac{dF_1}{da_1} = 0, \; \frac{dF_2}{da_2} = 0$$

eliminirt werden. Um das durch F_1 gegebene singuläre Integral zu erhalten, hätten wir also die Constanten a_1, a_2 zwischen

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0,$$

$$\varphi(x, y, y', a_1, a_2) = 0,$$

und der Derivirten der letzteren, nämlich:

$$\frac{d\varphi}{da_1} + \frac{d\varphi}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0$$

zu eliminiren, wobei a_2 als eine durch die Gleichung

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0$$

implicite bestimmte Function angesehen wird. Dies gibt uns die Relation:

$$\frac{da_2}{da_1} \cdot \frac{dF}{da_2} + \frac{dF}{da_1} = 0,$$

oder, wenn $\frac{da_2}{da_1}$ aus derselben und

$$\frac{d\varphi}{da_1} + \frac{d\varphi}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0$$

eliminirt wird, folgende Relation:

$$\frac{dF}{da_2} \cdot \frac{d\varphi}{da_1} - \frac{dF}{da_1} \cdot \frac{d\varphi}{da_2} = 0.$$

Das gesuchte singuläre Integral entspringt mithin aus der Elimination von a_1 und a_2 zwischen dieser Relation und den zwei Gleichungen

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0 \text{ und } \varphi(x, y, y', a_1, a_2) = 0.$$

Dieß läßt sich auch kurz auf folgende Weise begründen. Die beiden Gleichungen

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0 \text{ und } F'(x, y, a_1, a_2) = 0$$

geben durch Elimination von a_1 eine Gleichung, welche partiell nach a_2 differentiirt werden muß. Die Gleichungen

$$F(x, y, a_1 + da_1, a_2 + da_2) \text{ und } F'(x, y, a_1 + da_1, a_2 + da_2)$$

geben aber durch Elimination von $a_1 + da_1$ dasselbe Resultat, nur steht $a_2 + da_2$ an der Stelle von a_2. Die Subtraction der ersten und dritten, sowie der 2ten und 4ten Gleichung gibt nun wie oben

$$\frac{dF}{da_1} + \frac{dF}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0; \quad \frac{dF'}{da_1} + \frac{dF'}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0.$$

Da man, ohne die Richtigkeit der Gleichung zu ändern, nicht a_2 allein vermehren darf, so erklärt sich die gleichzeitige Zunahme von a_1. Betrachten wir ebenso a_1 als eine Function von a_2, so bekommen wir:

$$\frac{d\varphi}{da_2} + \frac{d\varphi}{da_1} \cdot \frac{da_1}{da_2} = 0$$

und

$$\frac{dF}{da_2} + \frac{dF}{da_1} \cdot \frac{da_1}{da_2} = 0,$$

woraus durch die Elimination von $\frac{da_1}{da_2}$ wieder die oben gefundene Relation:

$$\frac{dF}{da_2} \cdot \frac{d\varphi}{da_1} - \frac{dF}{da_1} \cdot \frac{d\varphi}{da_2} = 0$$

entspringt. Das durch F_2 gegebene singuläre Integral ist demnach das Ergebniß der Elimination zwischen der letzteren Relation und den zwei Gleichungen

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0 \text{ und } \varphi(x, y, y', a_1, a_2) = 0.$$

Dieses Resultat wird also in beiden Fällen das nämliche sein, da die Gleichungen dieselben sind.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß das primitive singuläre Integral einer Differentialgleichung von der zweiten Ordnung mittelst des primitiven allgemeinen Integrals direct angegeben werden kann, ohne daß man die zwei Integrale von der ersten Ordnung zu kennen braucht. Denn ist

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0$$

jenes ursprüngliche allgemeine Integral, wo a_1 und a_2 die zwei willkührlichen Constanten bezeichnen; so ist weiter nichts nöthig, als a_1, a_2 und $\frac{da_2}{da_1}$ zu eliminiren mit Hülfe der vier Gleichungen:

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0, \quad \varphi(x, y, y', a_1, a_2) = 0,$$
$$\frac{dF}{da_1} + \frac{dF}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{da_1} + \frac{d\varphi}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0,$$

wo

$$\varphi(x, y, y', a_1, a_2) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot y'$$

Man kann den nämlichen Beweis leicht auf Gleichungen von einer beliebigen Ordnung ausdehnen und so zu ähnlichen Resultaten für dieselben gelangen. Ist so z. B.

$$F(x, y, a_1, a_2, a_3) = 0$$

die ursprüngliche Gleichung zwischen x, y und drei willkührlichen Constanten a_1, a_2, a_3 einer derivirten Gleichung von der dritten Ordnung, so werden die drei ersten Integrale von der zweiten Ordnung auf ein und dasselbe ursprüngliche singuläre Integral führen, welches das Ergebniß der Elimination von a_1, a_2, a_3, und von $\frac{da_2}{da_1}$, $\frac{da_3}{da_1}$ mittelst folgender sechs Gleichungen ist:

$$F(x, y, a_1, a_2, a_3) = 0,$$
$$\varphi(x, y, y', a_1, a_2, a_3) = 0,$$
$$\psi(x, y, y', y'', a_1, a_2, a_3) = 0,$$

$$\frac{dF}{da_1} + \frac{dF}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} + \frac{dF}{da_3} \cdot \frac{da_3}{da_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1} + \frac{d\varphi}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} + \frac{d\varphi}{da_3} \cdot \frac{da_3}{da_1} = 0,$$

$$\frac{d\psi}{da_1} + \frac{d\psi}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} + \frac{d\psi}{da_3} \cdot \frac{da_3}{da_1} = 0;$$

wo

$$\varphi\,(x, y, y', a_1, a_2, a_3) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot y'$$

und

$$\psi(x, y, y', a_1, a_2, a_3) = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{2d^2F}{dxdy} + \frac{d^2F}{dy^2} \cdot y'^2 + \frac{dF}{dy} \cdot y''$$

gesetzt ist.

§. 258. **Beispiele.** I. Die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0$$

liefert als Integral der ersten Ordnung

$$F_1 = x^2 - 2a_1y' + a_1{}^2 = 0,$$

wo a_1 die willkührliche Constante bezeichnet. Differentiirt man dieses Integral in Bezug auf a_1, so kommt

$$-y' + a_1 = 0 \text{ oder } a_1 = y'.$$

Wird dieser Werth in die vorhergehende Gleichung substituirt, so bekommt man

$$x^2 - y'^2 = 0 \text{ oder } y' = \pm x,$$

welcher Werth der vorgelegten Differentialgleichung Genüge thut, aber ein singuläres Integral derselben abgibt, indem er aus dem gefundenen Integral nicht hergeleitet werden kann. Das Integral von

$$x^2 - 2a_1y' + a_1{}^2 = 0$$

ist:

$$\frac{x^3}{3} - 2a_1y + a_1{}^2x + a_2 = 0,$$

wo a_2 die neue willkührliche Constante bezeichnet. Durch die Elimination von a_1 aus diesen beiden letztern Gleichungen entspringt als

zweites Integral der ersten Ordnung der gegebenen Differentialgleichung folgende Gleichung:

$$F_2 = 4x^2 (y - xy')^2 - 4 \left(a_2 - \frac{2x^3}{3}\right) (y - xy')\, y'$$

$$+ \left(a_2 - \frac{2}{3}x^3\right)^2 = 0.$$

Um das singuläre Integral mittelst derselben zu erhalten, differentiire man sie in Bezug auf a_2, wodurch man bekommt:

$$- 4 (y - xy')\, y' + 2 \left(a_2 - \frac{2}{3}x^3\right) = 0,$$

oder

$$a_2 = \frac{2x^3}{3} + 2 (y - xy')\, y'.$$

Indem man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung substituirt, ergibt sich die Gleichung:

$$4 (y - xy')^2 (x^2 - y'^2) = 0,$$

welche in folgende zwei zerfällt:

$$x^2 - y'^2 = 0 \quad \text{und} \quad y - xy' = 0.$$

Die Erstere stimmt mit der früher gefundenen überein, während die Zweite der gegebenen Differentialgleichung der zweiten Ordnung nicht genügt, indem sie gibt $\quad y'' = 0.$

Die ursprüngliche Gleichung:

$$\frac{x^3}{3} - 2a_1y + a^2{}_1x + a_2 = 0,$$

oder die ihr gleichgeltende:

$$x^2 + 3a_1{}^2 + \frac{3a_2 - 6a_1y}{x} = 0$$

hat zur Derivirten:

$$2x - \frac{6a_1y'}{x} - \frac{3a_2 - 6a_1y}{x^2} = 0.$$

Differentiirt man nun die beiden letzteren Gleichungen in Bezug auf a_1, so hat man:

$$6a_1 - \frac{6y}{x} + \frac{3a'_2}{x} = 0,$$

$$\frac{6y}{x^2} - \frac{6y'}{x} - \frac{3a'_2}{x^2} = 0,$$

wo a_2 als eine Function von a_1 betrachtet wird. Eliminirt man zuvörderst a'_2, so kommt

$$\frac{6\,(a_1 - y')}{x} = 0, \text{ woraus } a_1 = y'.$$

Die zwei ersteren Gleichungen liefern bei der Elimination von a_2 die Gleichung:

$$3x + \frac{3a_1^2 - 6a_1y'}{x} = 0,$$

woraus durch die Substitution des Werthes von a_1 das oben gefundene Resultat

$$3x - \frac{3y'^2}{x} = 0 \text{ oder } y'^2 - x^2 = 0$$

wieder zum Vorschein kommt.

II. Die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y - xy' + \frac{x^2}{2}\,y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0$$

hat zur primitiven Gleichung:

$$y - \frac{a_1}{2}\,x^2 - a_2x - a_1^2 - a_2^2 = 0.$$

Eliminirt man nach und nach a_1 und a_2 daraus mittelst der Derivirten

$$y' - a_1x - a_2 = 0,$$

so erhält man folgende zwei Integrale der ersten Ordnung:

$$F_1 = y + \left(\frac{a_1}{2} - a_1^2\right) x^2 - (1 - 2a_1)\, xy' - a_1^2 - y'^2 = 0,$$

$$F_2 = y - \frac{(a_2 + y')\,x}{2} - \frac{(a_2 - y')^2}{x^2} - a_2^2 = 0.$$

Die Derivirte der Ersteren in Bezug auf a_1 ist:

$$\left(\frac{1}{2} - 2a_1\right) x^2 + 2xy' - 2a_1 = 0,$$

woraus

$$a_1 = \frac{x^2 + 4xy'}{4\,(1 + x^2)}.$$

Durch die Substitution dieses Werthes verwandelt sich dieselbe in:

$$y - xy' - y'^2 + \frac{(4xy' + x^2)^2}{16\,(1 + x^2)} = 0.$$

Die Derivirte der Zweiten in Bezug auf a_2 ist:

$$\frac{x}{2} + \frac{2\,(a_2 - y')}{x^2} + 2a_2 = 0,$$

woraus

$$a_2 = \frac{4y' - x^3}{4\,(1 + x^2)}.$$

Durch Einführung dieses Werthes ergibt sich die Gleichung:

$$y - \frac{xy'}{2} - \frac{y'^2}{x^2} + \frac{(4y' - x^3)^2}{16x^2\,(1 + x^2)} = 0,$$

welche mit der vorhin gefundenen übereinstimmt, da die eine wie die andere sich auf folgende:

$$(1 + x^2)\,y - \left(x + \frac{x^3}{2}\right) y' - y'^2 + \frac{x^4}{16} = 0$$

reducirt, mithin ein singuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung der zweiten Ordnung abgibt.

Man gelangt zu demselben Resultat, wenn man a_1, a_2 und a'_2 eliminirt mittelst der ursprünglichen Gleichung

$$y - \frac{a_1}{2}\,x^2 - a_2 x - a_1{}^2 - a_2{}^2 = 0$$

und ihrer Derivirten

$$y' - a_1 x - a_2 = 0,$$

und der Derivirten dieser beiden in Bezug auf a_1, welche sind:

$$\frac{x^2}{2} - 2a_1 + (x - 2a_2)\,a'_2 = 0,$$

$$x + a'_2 = 0.$$

Die beiden Letzteren geben durch die Elimination von a'_2 die Gleichung

$$\frac{x^2}{2} - 2a_1 - (x - 2a_2)\,x = 0,$$

durch deren Zusammenstellung mit der Zweiten entspringt:

$$a_1 = \frac{x^2 + 4xy'}{4\,(1 + x^2)},\quad a_2 = \frac{4y' - x^3}{4\,(1 + x^2)}.$$

Werden diese Werthe in die Erstere eingeführt, so erhält man das vorhin gefundene Resultat:

$$y\,(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(\frac{x^3}{2} + x\right) y' - y'^2 = 0$$

wieder.

§. 259. **Anderweitige Verfahren zur Auffindung der singulären Integrale.** Es sei

$$F\,(x,\ y,\ y' \cdots y^{(n-1)},\ a) = 0$$

ein Integral der ersten Ordnung von

$$f\,(x,\ y,\ y' \cdots y^{(n)}) = 0.$$

Bestimmt man daraus den Werth von a in Function von x, y, $y' \cdots y^{(n-1)}$ und bezeichnet denselben mit

$$\varphi\,(x,\ y,\ y' \cdots y^{(n-1)}),$$

so ist es klar, daß durch Einführung dieses Werthes statt a in jene Gleichung, dieselbe identisch wird, mithin ihre Derivirten in Bezug auf x, y, $y' \cdots y^{(n-1)}$ ebenfalls zum Verschwinden kommen. Es ist also

$$F'\,(x) + F'\,(a) \cdot \varphi'\,(x) = 0,$$
$$F'\,(y) + F'\,(a) \cdot \varphi'\,(y) = 0,$$
$$F'\,(y') + F'\,(a) \cdot \varphi'\,(y') = 0;$$
u. s. w.,

wo unter dem Zeichen F' der Buchstabe a statt seines Werthes

$$\varphi\,(x,\ y,\ y' \cdots y^{(n-1)})$$

beibehalten worden ist. Daraus entspringt:

$$\varphi'\,(x) = -\frac{F'\,(x)}{F'\,(a)};$$

$$\varphi'\,(y) = -\frac{F'\,(y)}{F'\,(a)};$$

$$\varphi'\,(y') = -\frac{F'\,(y')}{F'\,(a)}$$

u. s. w.

Da nun für das singuläre Integral die Größe F' (a) Null wird, so müssen auch in demselben Falle die Größen

$$\varphi'\,(x),\ \ \varphi'\,(y),\ \ \varphi'\,(y') \cdots$$

unendlich werden. Obschon die dem singulären Integral zukommende Gleichung die Functionen

$$\varphi'(x),\ \varphi'(y),\ \varphi'(y') \cdots$$

unendlich macht, so darf man daraus noch nicht unmittelbar schließen, daß jede Gleichung, welche diese Bedingung erfüllt, einem singulären Integral angehöre. Um einem derartigen Integral zu entsprechen, muß die fragliche Gleichung außerdem die Function

$$\varphi(x, y, y', y'' \cdots)$$

auf keine Constante zurückführen, weil man in einem solchen Falle nur ein besonderes Integral hätte.

Die dem singulären Integral zugehörige Gleichung macht den integrirenden Factor einer Derivirten einer beliebigen Ordnung von der Form:

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = 0$$

unendlich. Ist nämlich μ ein solcher Factor, so hat man

$$\mu (y^{(n)} + f(x, y, y' \cdots y^{(n-1)})) = \varphi'(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}),$$

wo

$$\varphi'(x, y, y' \cdots y^{(n-1)})$$

eine genaue Derivirte bedeutet, deren Integral ist

$$\varphi(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = a.$$

Nun muß das singuläre Integral der vorgelegten Gleichung:

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = 0$$

Genüge thun, ohne in dem allgemeinen Integral:

$$\varphi(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}) = a$$

enthalten zu sein. Es darf daher der aus der Gleichung des singulären Integrals entnommene Werth von $y^{(n-1)}$ bei seiner Substitution in den Ausdruck

$$\varphi(x, y, y' \cdots y^{(n-1)})$$

denselben nicht auf eine Constante zurückführen, oder mit anderen Worten die Derivirte

$$\varphi'(x, y, y' \cdots y^{(n-1)})$$

nicht Null machen. Gedachter Werth muß also den Ausdruck

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \cdots y^{(n-1)}),$$

aber nicht den Ausdruck

$$\mu\,(y^{(n)} + f\,(x, y, y' \cdots y^{(n-1)})$$

Null machen, was nur dadurch geschehen kann, daß er die Größe μ unendlich macht. Umgekehrt ist

$$F\,(x, y, dx, dy, d^2y \cdots) = 0$$

eine Differentialgleichung, welche durch den Factor μ ein genaues Differential du wird, so kann dieselbe auch geschrieben werden

$$\frac{1}{\mu} \cdot du = 0.$$

Man genügt ihr also sowohl durch $u = C$, als auch durch $\mu = \infty$.

Beispiel 1). Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$dy \cdot \sqrt{x} - \sqrt{y} \cdot dx = 0$$

ist

$$y = (C + \sqrt{x})^2.$$

Man erhält dasselbe durch Anwendung des integrirenden Factors $\frac{1}{\sqrt{xy}}$. Macht man denselben unendlich, so erhält man die nicht in dem allgemeinen Integral enthaltenen Auflösungen

$$y = 0 \text{ und } x = 0.$$

2) Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

ist

$$x^2 + 2Cy = a^2 + C^2,$$

und wird mittelst des integrirenden Factors $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$ gefunden. Indem man diesen $= \infty$ setzt, erhält man die singuläre Lösung $x^2 + y^2 = a^2$.

§. 260. **Vielfache singuläre Integrale.** Es sei

$$F\,(x, y, a_1, a_2) = 0$$

die ursprüngliche allgemeine Gleichung mit den zwei willkührlichen Constanten a_1 und a_2 von der Derivirten der zweiten Ordnung:

$$f\,(x, y, y', y'') = 0,$$

welche demnach das Resultat der Elimination jener zwei Constanten mittelst der drei Gleichungen ist:

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{2d^2F}{dxdy} y' + \frac{d^2F}{dy^2} y'^2 + \frac{dF}{dy} y'' = 0,$$

von denen die zwei letzteren der Bequemlichkeit halber durch

$$F'(x, y) = 0, \; F''(x, y) = 0$$

dargestellt werden mögen. Betrachtet man nun a_1 und a_2 als Functionen von x und y, so ist die Derivirte von

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0$$

nicht mehr einfach

$$F'(x, y) = 0,$$

sondern

$$F'(x, y) + a'F'(a) + b'F'(b) = 0,$$

welche wieder mit

$$F'(x, y) = 0$$

zusammenfällt, wenn

$$F'(a) = 0 \text{ und } F'(b) = 0,$$

welche Gleichungen dem sogenannten doppelten singulären Integral angehören.

Bezeichnen wir die Derivirte $F'(x, y)$, welche die Veränderlichen x, y, y' und die Constanten a_1, a_2 enthält, mit

$$\varphi(x, y, y', a_1, a_2);$$

so ist klar, daß die Gleichung

$$F''(x, y) = 0,$$

wo a_1 und a_2 als constant angesehen werden, durch

$$\varphi'(x, y, y') = 0$$

dargestellt sein wird, während sie, wenn diese Größen veränderlich sind, die Form

$$\varphi'(x, y, y') + a'_1\varphi'(a_1) + a'_2\varphi'(a_2) = 0$$

annimmt, und sich nicht mehr auf

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

reducirt, weil die Functionen $\varphi'(a_1)$ und $\varphi'(a_2)$ nicht Null sind. Die Gleichung

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0,$$

in welcher a_1 und a_2 mittelst der Relationen

$$F'(a_1) = 0 \text{ und } F'(a_2) = 0$$

bestimmte Functionen von x und y sind, wird also im Allgemeinen der Derivirten von der zweiten Ordnung nicht genügen, welche das Ergebniß der Elimination der als constant angesehenen Größen a_1 und a_2 zwischen gedachter Gleichung und deren zwei ersten Derivirten.

Nehmen wir als Beispiel die oben schon betrachtete Gleichung

$$y - \frac{a_1}{2} x^2 - a_2 x - a_1{}^2 - a_2{}^2 = 0.$$

Die Derivation in Bezug auf a_1 und a_2 liefert:

$$\frac{1}{2} x^2 + 2a_1 = 0, \quad x + 2a_2 = 0,$$

woraus

$$a_1 = \frac{x^2}{4}, \quad a_2 = -\frac{x}{2}.$$

Werden diese Werthe in die vorhergehende Gleichung substituirt, so ergibt sich für das doppelte singuläre Integral die Gleichung:

$$y + \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4} = 0,$$

welche der ersten Derivirten der gegebenen Gleichung, aber nicht mehr deren zweiten Derivirten Genüge thut.

Diese Theorie läßt sich leicht auf die primitiven Gleichungen der Derivirten höherer Ordnungen ausdehnen. Bestimmt man z. B. für die primitive Gleichung

$$F(x, y, a_1, a_2, a_3) = 0$$

die drei willkührlichen Constanten a_1, a_2, a_3 mit Hülfe der drei Relationen

$$F'(a_1) = 0, \; F'(a_2) = 0, \; F'(a_3) = 0,$$

so hat man ein sogenanntes dreifaches singuläres Integral, welches das singuläre Integral einer Derivirten der ersten Ordnung, die ihrerseits das singuläre Integral einer Derivirten der zweiten Ordnung,

welche letztere wieder das singuläre Integral einer Derivirten der dritten Ordnung abgibt, deren vollständige ursprüngliche Gleichung mit drei willkührlichen Constanten ist:

$$F\,(x,\,y,\,a_1,\,a_2,\,a_3) = 0.$$

Im Uebrigen wird aber das sogenannte dreifache singuläre Integral weder der Derivirten der dritten Ordnung, noch selbst der Gleichung, welche dem singulären Integral der zweiten Ordnung angehört, Genüge thun.

§. 261. **Herleitung des singulären Integrals aus der vorgelegten Derivirten selbst.** Es sei

$$F\,(x,\,y,\,y',\,a) = 0$$

das erste Integral einer Derivirten der zweiten Ordnung. Durch die Elimination von a mittelst der Derivirten

$$F'\,(x,\,y,\,y',\,a) = 0$$

ergibt sich die gegebene Derivirte der zweiten Ordnnng und durch die Elimination mittelst der Relation

$$F'\,(a) = 0$$

die Gleichung des singulären Integrals. Es sei $\varphi\,(x,\,y,\,y'.\,y'')$ oder einfach φ der aus der Gleichung

$$F'\,(x,\,y,\,y',\,a) = 0$$

entnommene Werth von a. Durch Substitution dieses Werthes in die ursprüngliche Gleichung erhält man eine Gleichung von der Form

$$F\,(x,\,y,\,y',\,\varphi) = 0,$$

durch deren Derivation die Gleichung

$$\varphi'\,F'\,(\varphi) = 0$$

erwächst, da der Derivationsantheil von $F'\,(x,\,y,\,y')$ in Bezug auf $x,\,y,\,y'$ offenbar Null sein wird, indem die dabei als constant angesehene Größe φ durch die Gleichung

$$F'\,(x,\,y,\,y') = 0$$

als bestimmt angenommen ist. Die Gleichung

$$\varphi'\,F'\,(\varphi) = 0$$

zerfällt in zwei Theile, nämlich

$$\varphi' = 0 \text{ und } F'\,(\varphi) = 0.$$

Die Erstere ist von der dritten Ordnung und liefert das Integral $\varphi = a$. Eliminirt man y'', welches in φ enthalten ist, mittelst der derivirten Gleichung

$$F(x, y, y', \varphi) = 0;$$

so erhält man das nämliche Resultat als durch die Elimination von φ, d. h. die ursprüngliche Gleichung

$$F(x, y, y', a) = 0.$$

Die andere Gleichung liefert ebenfalls durch die Elimination von y'' das nämliche Resultat als durch die Elimination von φ, mithin dasselbe Resultat, welches aus der Elimination von a mittelst der Gleichungen

$$F'(a) = 0 \text{ und } F(x, y, y', a) = 0$$

zum Vorschein kommt. Dieses Resultat wird folglich dem singulären Integral der zweiten Ordnung angehören, deren allgemeines erstes Integral

$$F(x, y, y', a) = 0$$

ist.

Die oben betrachtete Gleichung der zweiten Ordnung:

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0$$

hat zur Derivirten:

$$2\left(y'' - \frac{y'}{x}\right) y''' - \frac{2y''^2}{x} + \frac{2y'y''}{x^2} = 0,$$

welche unter folgende Form gebracht werden kann:

$$2\left(y'' - \frac{y'}{x}\right)\left(y''' - \frac{y''}{x}\right) = 0.$$

Der Factor $y'' - \frac{y'}{x}$ von der nämlichen Ordnung als die vorgelegte Gleichung liefert durch die Elimination von y'' das singuläre Integral derselben. Denn setzt man

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0 \text{ oder } y'' = \frac{y'}{x},$$

so erhält man durch Substitution dieses Werthes in die gegebene Derivirte die früher gefundene Relation

$$x^2 - y'^2 = 0$$

wieder. Der andere Factor

$$y''' - \frac{y''}{x} = 0$$

von der dritten Ordnung liefert das Integral von der zweiten Ordnung

$$\frac{y''}{x} = \frac{1}{a},$$

wo a eine willkührliche Constante ist. Substituirt man den daraus entnommenen Werth von

$$y'' = \frac{x}{a}$$

in die vorgelegte Gleichung, so erhält man das schon früher gefundene vollständige allgemeine Integral:

$$x^2 - 2ay' + a^2 = 0$$

wieder.

Das nämliche Verfahren erstreckt sich auf die derivirten Gleichungen einer beliebigen Ordnung, so daß man zu der Aussage berechtigt ist, jede derivirte Gleichung läßt sich im Allgemeinen in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine dem allgemeinen Integral entspricht, und der andere unmittelbar das singuläre Integral gibt, wenn ein solches vorhanden ist.

Dieser zweite Factor, welcher von der nämlichen Ordnung als die vorgelegte derivirte Gleichung ist, wird den successiven Ableitungen der gegebenen Derivirten nicht genügen, weil er der von dem anderen Factor herrührenden Gleichung nicht Genüge thut, welche die derivirten Functionen der höheren Ordnungen allein enthält.

§. 262. **Fortsetzung.** Es sei

$$F(x, y, y', a) = 0$$

das erste Integral einer Derivirten der zweiten Ordnung, welche nach dem vorhin Gesagten sich auf

$$F(x, y, y', \varphi) = 0$$

reduciren läßt, so daß deren Derivirte alsdann ist:

$$\varphi' F'(\varphi) = 0.$$

Da die vorgelegte Derivirte der zweiten Ordnung, welche durch

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

dargestellt werden mag, jederzeit mit dem Resultat der Elimination, welches die Gleichungen

$$F(x, y, y', \varphi) = 0, \quad \varphi' F'(\varphi) = 0$$

liefern, übereinstimmen muß; so können die zwei Gleichungen

$$f(x, y, y', y'') = 0 \text{ und } F(x, y, y', \varphi) = 0,$$

wenn sie nicht identisch sind, nur durch einen Factor, welcher von der nämlichen Ordnung oder von einer niedrigen ist, von einander unterschieden sein. Man hat hiernach

$$f(x, y, y', y'') = P \cdot F(x, y, y', \varphi),$$

wo P jenen in Frage stehenden Factor bezeichnet. Durch Derivation erwächst daraus

$$f'(x, y, y', y'') = P \cdot F'(\varphi) \cdot \varphi' + \frac{P'}{P} + f(x, y, y', y''),$$

weil F′ (x, y, y′) zum Verschwinden kommt. Der Derivirten

$$f'(x, y, y', y'') = 0$$

läßt sich also unabhängig von dem Werthe der Function y''' mittelst der zwei Gleichungen der zweiten Ordnung

$$F'(\varphi) = 0 \text{ und } f(x, y, y', y'') = 0$$

Genüge thun. Das singuläre Integral der letzteren oder vorgelegten Derivirten ergibt sich mithin durch die Elimination des y'' jener zwei Gleichungen.

Nun ist die Derivirte der gegebenen Gleichung von der Form

$$y''' f'(y'') + f'(x, y, y') = 0,$$

welcher unabhängig von dem Werthe von y''' nur mittelst der zwei besonderen Gleichungen

$$f'(y'') = 0 \text{ und } f'(x, y, y') = 0$$

Genüge geschehen kann. Man hat demnach y'' mittelst jeder dieser beiden Gleichungen und der vorgelegten

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

zu eliminiren und zu prüfen, ob die beiden Resultate die nämliche Gleichung liefern; in diesem Falle wird solche dem singulären Integrale der vorgelegten Differentialgleichung angehören.

Weil man im Allgemeinen

$$y''' = -\frac{f'(x, y, y')}{f'(y'')}$$

hat, so werden die beiden fraglichen Gleichungen den Werth von y''' auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, so daß die Bedingung von $y''' = \frac{0}{0}$ als diejenige angesehen werden kann, welche die Gleichung des singulären Integrals der vorgelegten Derivirten von der zweiten Ordnung zu erfüllen hat.

Diese Principien lassen sich auf Gleichungen von einer beliebigen Ordnung ausdehnen, so daß zur Ermittelung des singulären Integrals einer Gleichung von der nten Ordnung man den Werth der Function $y^{(n-1)}$ aus der darauf folgenden Derivirten herzuleiten und denselben $= \frac{0}{0}$ zu setzen hat. Indem man so den Zähler und den Nenner besonders gleich Null setzt und hierauf $y^{(n)}$ mittelst dieser beiden Gleichungen und der vorgelegten Derivirtengleichung eliminirt, wird man die dem singulären Integrale zukommende Gleichung erhalten, insofern beide Eliminationen dasselbe Resultat liefern.

§. 263. **Beispiele.** I. Die Gleichung

$$xy''^2 - 2y'y'' + x = 0$$

hat zur Derivirten

$$2(xy'' - y')\,y''' - y''^2 + 1 = 0.$$

Diese gibt

$$y''' = \frac{y''^2 - 1}{2(xy'' - y')}.$$

Indem man den Zähler und den Nenner für sich gleich Null setzt, erhält man

$$y''^2 - 1 = 0 \text{ und } xy'' - y' = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen mit der gegebenen Derivirten verbunden gibt

$$y'^2 - x^2 = 0.$$

Die zweite in ihrer Zusammenstellung mit derselben liefert ebenfalls

$$y'^2 - x^2 = 0;$$

so daß diese Gleichung ein singuläres Integral der vorgelegten Derivirten ist, wie wir schon auf anderem Wege gefunden haben.

II. Die Gleichung

$$y - xy' + \frac{x^2}{2}\,y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0$$

hat zur Derivirten

$$\left(\frac{x^2}{2} + 2(y' - xy'')\,x - 2y''\right) y''' = 0.$$

Hier erhält man demnach nur die eine Bedingungsgleichung

$$\frac{x^2}{2} + 2(y' - xy'')\,x - 2y'' = 0,$$

woraus

$$y'' = \frac{4xy' + x^2}{4(1 + x^2)}.$$

Dieser Werth in die vorgelegte Gleichung substituirt, liefert

$$y - \frac{2x + x^3}{2(1 + x^2)}\,y' + \frac{x^4 - 16y'^2}{16(1 + x^2)} = 0,$$

welches die schon früher gefundene Gleichung des singulären Integrals ist.

Die Derivirte der dritten Ordnung

$$\left(\frac{x^2}{2} + 2(y' - xy'')\,x - 2y''\right) y''' = 0$$

liefert

$$y''' = 0,$$

woraus successive die Gleichungen

$$y'' = a_1, \quad y' = a_1 x + a_2$$

und

$$y = \frac{a_1}{2}\,x^2 + a_2 x + a_3$$

entspringen. Da die vorgelegte Derivirte von der zweiten Ordnung ist, mithin nur zwei willkührliche Constanten zuläßt; so substituiren wir darin die vorhergehenden Werthe von y, y′, y″. Jene Gleichung verwandelt sich dadurch in:

$$a_3 - a_2^2 - a_1^2 = 0,$$

was

$$a_3 = a_2^2 + a_1^2$$

gibt. Die ursprüngliche Gleichung zwischen x und y wird hiernach:

$$y = \frac{a_2}{2}\,x^2 + a_2 x + a_1^2 + a_2^2,$$

ein Resultat, welches mit dem früher gefundenen identisch ist.

IV. Geometrische Anwendungen der Integration der Differentialgleichungen mit zwei veränderlichen Größen.

1. Von den ebenen Umhüllungslinien.

§. 264. **Entstehen dieser Linien.** Unter der Einhüllungslinie eines Systems gleichartiger Linien versteht man eine Linie, welche alle jene Curven zugleich berührt. Es sei

$$F(x, y, a) = 0$$

die Gleichung der eingehüllten Curven, wo der Uebergang einer derselben in die andere durch Aenderung des Werthes der Constante a erfolgt. Für den Punkt, in welchem die Einhüllungslinie eine der gedachten Curven berührt, müssen die Werthe von x und y wie jener der Derivirten y′ für die einhüllende und eingehüllte Linie übereinstimmen, d. h. es muß die Gleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

nebst ihrem Differential

$$\frac{dF}{dy} \cdot y' + \frac{dF}{dx} = 0,$$

sobald man der Größe a in beiden Gleichungen den gehörigen Werth beilegt, auf die Einhüllungslinie übertragen werden können. Eliminirt man demnach aus jenen beiden Gleichungen die Constante a, so wird die dadurch zum Vorschein kommende Gleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

für alle Punkte der Einhüllungslinie gelten, mithin die Differentialgleichung dieser Linie sein. Integrirt man aber letztere Gleichung, so wird das allgemeine Integral

$$F(x, y, a) = 0$$

sein, wo a die Integrationsconstante bedeutet, während die primitive Gleichung der Einhüllungslinie das singuläre Integral von

$$f(x, y, y') = 0$$

ist. — Sucht man aus der letzteren Gleichung den Werth des Differentialquotienten y″, so gehören demselben für die Einhüllungslinie wie für die eingehüllte Curve verschiedene Werthe; gedachter Quotient nimmt deshalb in Bezug auf die Einhüllungslinie die Form $\frac{0}{0}$ an, wie wir dies bei der Lehre von den besonderen Auflösungen der Differentialgleichungen auch gefunden haben.

Um über diesen Gegenstand noch mehr Licht zu verbreiten, wollen wir denselben noch von einem andern Gesichtspunkte aus betrachten. Für den Punkt, in welchem die Einhüllungslinie die eingehüllte Curve berührt, stimmen die Werthe von x und y überein. Indem man die Gleichungen beider Linien mit einander verbindet, lassen sich die Coordinaten des Berührungspunktes (x, y) durch die Gleichungen

$$x = \varphi\,(a) \text{ und } y = \psi\,(a)$$

ausgedrückt denken, wo φ und ψ zwei unbekannte Functionen darstellen, da die Gleichung der Einhüllungslinie nicht bekannt ist. Gedachte Werthe von x und y müssen aber der Gleichung

$$F\,(x, y, a) = 0$$

Genüge thun; dieselbe wird identisch Null, wenn darin statt x und y obige Werthe eingeführt werden. Die in Bezug auf a genommenen Derivirten dieser Gleichung werden mithin zum Verschwinden kommen, d. h. es ist:

$$\left(\frac{dF}{dy}\,y' + \frac{dF}{dx}\right)\frac{dx}{da} + \frac{dF}{da} = 0;$$

oder

$$\frac{dF}{da} = 0,$$

weil die Differentialgleichung der eingehüllten Curve ist:

$$\frac{dF}{dy}\,y' + \frac{dF}{dx} = 0.$$

Eliminirt man mithin aus den Gleichungen

$$F\,(x, y, a) = 0 \text{ und } \frac{dF}{da} = 0$$

die Größe a, so bekommt man die Gleichung der Einhüllungslinie. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich im Allgemeinen x und y durch a ausdrücken, d. h. die Functionen $\varphi\,(a)$ und $\psi\,(a)$ bestimmen.

Mit Hülfe der beiden Gleichungen

$$F\,(x, y, a) = 0 \text{ und } \frac{dF}{da} = 0$$

läßt sich a sowohl durch x als durch y ausdrücken. In denjenigen Fällen, in denen a keine Function dieser Größen ist, wird auch umgekehrt weder y noch x eine Function von a sein, was der Voraussetzung einer Einhüllungslinie widerstreitet. In solchen Fällen ist daher

die durch Elimination von a entspringende Gleichung nicht die einer Einhüllungslinie. Hat man z. B.

$$(y^2 + x^2 - b^2)(y^2 - 2ay) + a^2(x^2 - b^2) = 0$$

als gegebene Gleichung der Curven, wo a die willkührliche Constante ist; so bekommt man durch Differentiation nach a die Relation:

$$-(y^2 + x^2 - b^2)y + a(x^2 - b^2) = 0.$$

Durch die Elimination von a zwischen diesen beiden Gleichungen entsteht:

$$y^2(y^2 + x^2 - b^2) = 0,$$

eine Gleichung, welche der Abscissenachse und einem Kreis angehört, aber nicht diejenige einer Einhüllungslinie ist, obschon sie nach der aufgestellten Regel gewonnen wurde. Denn eliminirt man x zwischen jenen beiden Gleichungen, so fällt y von selbst weg und man findet $a = 0$. — Wenn sich a als keine Function von x oder y herausstellt, so drückt die durch Elimination von a gewonnene Gleichung keine Einhüllungslinie mehr, sondern nur eine bestimmte Curve unter den gegebenen Curven dar, deren Gleichung dadurch zum Vorschein kommt, daß man der Größe a denjenigen constanten Werth beilegt, welcher sich für dieselbe auf jene Weise ergeben haben würde. In unserem Beispiele entspringt die Gleichung

$$y^2(y^2 + x^2 - b^2) = 0$$

aus der vorgelegten

$$(y^2 + x^2 - b^2)(y^2 - 2ay) + a^2(x^2 - b^2) = 0,$$

wenn man darin $a = 0$ setzt. Hat man also durch Elimination von a zwischen

$$F(x, y, a) = 0 \text{ und } \frac{dF}{da} = 0$$

die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

erhalten, so prüfe man, ob in Folge dieser Gleichungen a eine Function von x oder y sei oder nicht, und verwerfe in dem letzteren Falle die gewonnene Gleichung als keiner Einhüllungslinie angehörig.

In der Gleichung

$$\left(\frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dx}\right)\frac{dx}{da} + \frac{dF}{da} = 0$$

sei der Ausdruck

$$\frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dx}$$

von der Form:

$$\frac{Py' + Q}{R},$$

wo P, Q und R im Allgemeinen Functionen von x und y sind. Jene Gleichung verwandelt sich nach Fortschaffung des Nenners in folgende:

$$(Py' + Q) \frac{dx}{da} + R \frac{dF}{da} = 0,$$

welcher wegen

$$Py' + Q = 0$$

nicht blos durch

$$\frac{dF}{da} = 0,$$

sondern auch durch

$$R = 0$$

Genüge geschieht. Kommt also in der unmittelbaren Differentialgleichung der gegebenen Gleichung ein Nenner vor, so kann derselbe, wenn darin kein a enthalten ist, die Gleichung einer Einhüllungslinie geben. Ob sie es ist, muß untersucht werden, indem man zunächst x oder y zwischen ihr und der gegebenen Gleichung eliminirt und sieht, ob a als eine Function von y oder x sich herausstellt; und indem man dann prüft, ob die gefundene Curve von der gegebenen wirklich berührt wird. — Es sei z. B.

$$ay = e^{\sqrt{x - b}}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Die Differentiation liefert

$$a \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x - b}}}{2\sqrt{x - b}};$$

setzen wir den Nenner gleich Null, so kommt

$$x - b = 0.$$

Eliminiren wir zuerst x, so entsteht

$$ay - 1 = 0,$$

mithin a eine Function von y. Eliminiren wir ferner a zwischen der gegebenen Gleichung und ihrer Differentialgleichung, so kommt

$$\frac{dx}{dy} = 2 \frac{\sqrt{x-b}}{y},$$

eine Gleichung, welche für

$$x - b = 0$$

gibt

$$\frac{dx}{dy} = 0;$$

Dieser Werth stimmt mit demjenigen überein, welchen die Gleichung $x - b = 0$ durch Differentiation für $\frac{dx}{dy}$ liefert: es ist mithin

$$x - b = 0$$

die Gleichung einer Einhüllungslinie.

§. 265. **Anwendungen**. I. Es sei die Gleichung:

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2 g}{2v^2 \cos^2 \alpha},$$

welche die Bahn AMN (Fig. 63) eines vom Anfangspunkt der Coordinaten A aus mit der Geschwindigkeit v unter einem Winkel α aufwärts geworfenen Körpers im leeren Raume ausdrückt. Wenn man den Winkel TAX $= \alpha$ oder die Elevation des Wurfes sich ändern läßt, erhält man verschiedene Curven, deren Einhüllungslinie sich ergibt, wenn man die vorstehende Gleichung in Bezug auf α differentiirt, was liefert:

$$0 = 1 - \frac{gx}{v^2} \operatorname{tang} \alpha$$

und alsdann zwischen beiden Gleichungen α eliminirt. Die daraus entspringende Gleichung ist

$$x^2 = \frac{v^2}{g^2}(v^2 - 2gy),$$

so daß die Einhüllungslinie aller Wurfparabeln eine Parabel RMX ist, deren Achse AR vertical und deren Scheitel R in der Höhe $\frac{v^2}{2g}$ über dem Anfangspunkt A liegt.

II. Eine grade Linie DE (Fig. 64) von gegebener Länge b bewegt sich dergestalt, daß ihre beiden Endpunkte D und E stets auf den Schenkeln des rechten Winkels A liegen; die Curve zu bestimmen, welche von jener Graden in allen Lagen berührt wird. Nimmt man die Schenkel des rechten Winkels für die Achsen der Coordinaten an und bezeichnet durch a den Winkel, unter welchem sie in einer bestimmten Lage gegen die Achse der x geneigt ist, so ist ihre Gleichung

$$y = b \sin a - x \tang a.$$

Differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf a, so bekommt man

$$b \cos a - \frac{x}{\cos^2 a} = 0;$$

folglich

$$\cos a = \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und

$$y = b\left(1 - \frac{x}{b \cos a}\right) \sin a = b\left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

also

$$\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als Gleichung der gesuchten Curve YMX.

III. Eine grade Linie bewegt sich dergestalt, daß ihre beiden Schnittpunkte C, B mit zwei als Coordinatenachsen angenommenen Graden AX, AY (Fig. 65) mit gleichförmigen Geschwindigkeiten fortschreiten; welche Curve wird von allen Geraden tangirt? Die Geschwindigkeit des Schnittpunktes mit der X-Achse sei = 1, diejenige des Schnittpunktes mit der Y-Achse sei retograd = — c, ferner sei für die anfängliche Stellung der Geraden, wo AC = 0 ist, BA = b. Wird nun AC = a gesetzt, so ist die Gleichung der beliebigen Geraden BC:

$$\frac{y}{b - ac} + \frac{x}{a} = 1$$

oder

$$y = \left(c - \frac{b}{a}\right) x + b - ac.$$

Die Differentiation in Bezug auf a liefert nun

$$\frac{bx}{a^2} - c = 0.$$

Hiermit erhält man durch Elimination von a

$$(y - cx - b)^2 = 4cbx$$

als Gleichung der gesuchten Curve, welche somit eine Parabel ist, welche die Graden AX, AY bezüglich in den Punkten $x = \frac{b}{c}$ und $y = b$ berührt, und deren Achse parallel dem Diameter $y = cx + b$ läuft.

IV. Die einhüllende Curve der logarithmischen Linien (Fig. 66) zu finden, deren Gleichung

$$y = ae^{\frac{x}{a}}$$

ist. Durch Differentiation erhält man

$$e^{\frac{x}{a}}\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0.$$

Der Factor $e^{\frac{x}{a}}$ gibt keine einhüllende Curve. Aus dem zweiten Factor a = x in die Gleichung

$$y = ae^{\frac{x}{a}}$$

substituirt, gibt

$$y = ex$$

als Gleichung der einhüllenden Curve, welche also eine durch den Anfangspunkt A der Coordinaten gehende Grade AT ist, die mit der allen eingehüllten Curven gemeinsamen Asymptote einen Winkel α bildet, für welchen

$$\operatorname{tg} \alpha = e.$$

§. 266. **Gleichung der eingehüllten Curven mit zwei willkührlichen Constanten.** Hat die Gleichung der eingehüllten Curven die Form

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0,$$

worin a_1, a_2 zwei willkührliche Constanten bedeuten; so kann man zwischen a_1 und a_2 eine Relation feststellen, daß die Einhüllungslinie eine gegebene Linie

$$\varphi(x, y) = 0$$

sei. Da die Derivirten von F und φ hier für y' denselben Werth liefern müssen, so erhält man durch die Elimination von y' zwischen jenen Derivirten die Gleichung:

$$\frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Indem man hierauf zwischen den drei vorhergehenden Gleichungen x und y eliminirt, bekommt man die in Frage stehende Relation zwischen den Constanten a_1 und a_2.

Es sei z. B. die Gleichung:

$$y^2 + 2a_1x + a_2 = 0$$

einer Parabel (Fig. 67) HMN, deren Achse mit der Abscissenachse zusammenfällt und

$$x^2 + y^2 = c^2$$

die Gleichung eines Kreises A, welcher die Einhüllungslinie aller durch die erste Gleichung dargestellten Parabeln werden soll, wenn man darin a_1 sich ändern läßt, nachdem zwischen a_1 und a_2 eine gehörige Relation aufgefunden ist. Durch Differentiation der beiden Gleichungen entsteht:

$$yy' + a_1 = 0 \text{ und } x + yy' = 0,$$

woraus $x = a$ folgt. Substituirt man diesen Werth von x in die Gleichung der Parabel und in jene des Kreises, so kommt

$$y^2 + 2a_1{}^2 + a_2 = 0 \text{ und } y^2 + a^2 - c^2 = 0,$$

woraus

$$a_2 = -(a_1{}^2 + c^2).$$

Hiernach erhält die Gleichung der umhüllten Linien folgende Form:

$$y^2 + 2a_1x - a_1{}^2 - c^2 = 0,$$

wo a_1 willkührlich bleibt.

Es läßt sich die zweite Constante dergestalt wählen, daß die Einhüllungslinie sämmtlicher Curven mit denselben eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht. Die Gleichung der Einhüllungslinie wird durch Integration der besonderen Auflösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gefunden, welche Gleichung durch Elimination der Constanten a_1 und a_2 aus der Gleichung

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0$$

und deren erstem und zweitem Differential hervorgeht. Die besondere Auflösung ergibt sich entweder dadurch, daß man den aus dem Differential der zweiten Ordnung abgeleiteten Quotienten

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{0}{0}$$

setzt, oder auch dadurch, daß man die Größen a_1, a_2 und $\frac{da_2}{da_1}$ aus den 4 Gleichungen

$$F = 0, \ \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot y' = 0, \ \frac{dF}{da_1} + \frac{dF}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx\,da_1} + \frac{d^2F}{dy\,da_1} \cdot y' + \left(\frac{d^2F}{dx\,da_2} + \frac{d^2F}{dy\,da_2}\right) \frac{da_2}{da_1} = 0$$

eliminirt. Dies sind die in §. 257 angeführten Gleichungen, durch deren Hülfe eine singuläre Lösung gefunden wird, für welche x, y, y′, y″ dieselben Werthe wie in der ursprünglichen Gleichung haben, ganz wie es die Natur unserer geometrischen Aufgabe verlangt.

Beispiel. Es sei

$$y + a_2 + x + a_1 + (x + a_1)^3 = 0$$

die Gleichung einer cubischen Parabel (Fig. 68). Daraus folgt

$$y' + 1 + 3\,(x + a_1)^2 = 0, \ a'_2 + 1 + 3\,(x + a_1)^2 = 0$$

und

$$6\,(x + a_1) = 0.$$

Die Elimination von a_1, a_2 und a'_2 gibt

$$y' + 1 = 0$$

als singuläre Lösung, welche

$$y + x = C$$

als Auflösung unserer Aufgabe gibt. Dieselbe Auflösung geht auch hervor durch Elimination von a_1 und a_2 aus der ersten Gleichung und deren beiden ersten Derivirten und Bestimmung der besonderen Auflösung der entstehenden Gleichung

$$y' + 1 + \frac{y''^2}{12} = 0.$$

Die besondere Auflösung ist nemlich

$$y'' = 0,$$

woraus durch Elimination von y'' mittelst der vorigen Gleichung wieder die singuläre Lösung

$$y' + 1 = 0$$

hervorgeht. — Was die Relation zwischen a_2 und a_1 anlangt, so erhält man dieselbe durch Elimination von x, y, y' zwischen den Gleichungen

$$y + a_2 + x + a_1 + (x + a_1)^3 = 0,$$

$$y' + 1 + 3\,(x + a_1)^2 = 0,\; y + x = C,\; y' + 1 = 0.$$

Man findet

$$a_2 = -C - a_1.$$

Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so findet sich wieder als Einhüllungslinie des Curvensystems

$$y - C + x + (x + a_1)^3 = 0,$$

durch Elimination von a_1 mittelst

$$3\,(x + a_1)^2 = 0,$$

$$y + x - C = 0,$$

wie oben. Endlich bemerkt man, daß die einhüllende Gerade mit sämmtlichen Parabeln in deren Scheitel eine Berührung zweiter Ordnung eingeht.

2. Von den Trajectorien ebener Curven.

§. 267. **Definition.** Den Namen Trajectorie führt die Linie, welche sämmtliche unter einer gemeinsamen Gleichung begriffenen Linien nach einem bestimmten Gesetze schneidet. Insbesondere wird aber unter Trajectorie diejenige Curve verstanden, welche ein System zu einer Gattung gehöriger Curven unter demselben Winkel schneidet. Ist dieser Winkel ein rechter, so heißt die schneidende Curve orthogonale Trajectorie.

Die Curve zu bestimmen, welche ein System stetig auf einander folgender Curven unter einerlei Winkel trifft. Es sei

$$F\,(X, Y, a) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curven in rechtwinkligen Coordinaten, wo a diejenige Größe ist, welche sich von einer Curve zur andern verändert. Nennen wir nun die auf dieselben Achsen bezogenen Coordinaten der Trajectorie x und y, ferner b die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels; so besteht, da der Winkel, unter welchem sich

zwei Curven begegnen, mit dem Winkel übereinstimmt, den die zu ihrem Durchschnittspunkte gezogenen Graden mit einander machen, der Bedingung der Aufgabe gemäß folgende Relation

$$b = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dY}{dX}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dY}{dX}}$$

oder

$$\left(1 + \frac{dY}{dX} \cdot \frac{dy}{dx}\right) b + \frac{dY}{dX} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

wo $\frac{dY}{dX}$ als eine bekannte Function von Y, X und a zu betrachten ist. Setzt man darin y und x statt Y und X, weil im Durchschnittspunkte die durchschneidende und durchschnittene Linie die nämlichen Coordinaten haben, und eliminirt hierauf zwischen dieser Gleichung und der Gleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

die Größe a; so erhält man die Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie.

Soll die Trajectorie eine orthogonale sein, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$1 + \frac{dY}{dX} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

auf welche das oben angedeutete Verfahren anzuwenden ist.

Ist statt der Gleichung

$$F(X, Y, a) = 0$$

die Polargleichung

$$F(R, T, a) = 0$$

gegeben, und bedeuten t, r die Polarcoordinaten der gesuchten Trajectorie; so hat man, weil $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dt}$ die trigonometrische Tangente des Winkels darstellt, welchen die Normale mit dem Leitstrahl bildet, die Relation:

$$b = \frac{\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} - \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT}}{1 + \frac{1}{rR}\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dR}{dT}}$$

oder

$$\left(b \frac{dR}{dT} - R\right) \frac{dr}{dt} + r \left(\frac{dR}{dT} + bR\right) = 0,$$

wo $\frac{dR}{dT}$ als eine bekannte Function von T, R und a anzusehen ist. Eliminirt man nun die Größe a zwischen dieser Gleichung und der Gleichung

$$F(T, R, a) = 0,$$

wo man t und r statt T und R zu setzen hat; so erhält man die Differentialgleichung der in Frage stehenden Trajectorie.

Soll die Trajectorie eine orthogonale sein, so entspringt die Relation:

$$Rr + \frac{dR}{dT} \cdot \frac{dr}{dt} = 0.$$

§. 268. **Anwendungen.** I. Die orthogonale Trajectorie aller durch die Gleichung

$$Y^2 = aX$$

dargestellten Parabeln (Fig. 69) zu finden. Wir erhalten zunächst

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a}{2Y} = \frac{y}{2x};$$

ferner die Differentialgleichung

$$2x\,dx + y\,dy = 0,$$

deren Integral ist

$$x^2 + \frac{1}{2} y^2 = C.$$

Jede Ellipse, deren Mittelpunkt in den Scheitel der Parabeln und kleinere Achse AD in die Achse derselben fällt, und deren kleinere Achse zur größeren AB sich wie die Kathete eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks zur Hypotenuse verhält, ist daher eine Trajectorie jener Parabeln.

II. Es soll die orthogonale Trajectorie aller Ellipsen gefunden werden, welche dieselben Brennpunkte F und F′ haben (Fig. 70). Die gemeinschaftliche Excentricität der Ellipsen mit e bezeichnend haben wir für die Gleichung derselben:

$$a^2Y^2 + a^2(a^2 - e^2) X^2 = a^2(a^2 - e^2);$$

daraus entspringt

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{(a^2 - e^2)X}{a^2 Y}.$$

Dieser Werth in die Relation:

$$\frac{dY}{dX} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

gesetzt, liefert

$$(a^2 - e^2) X \frac{dy}{dx} - a^2 Y = 0.$$

Eliminiren wir nun a zwischen dieser Gleichung und jener der Ellipsen, wobei x und y statt X und Y gesetzt wird; so bekommen wir folgende Differentialgleichung der Trajectorie:

$$(ydy + xdx)(xdy - ydx) = e^2 dydx.$$

Um dieselbe zu integriren, setzen wir

$$y^2 + x^2 + e^2 = 2xz,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{dz}{dx} + z - x}{y}.$$

Substituiren wir diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so kommt

$$\left(x\frac{dz}{dx} + z\right)\left(x\frac{dz}{dx} - z\right) = -e^2$$

oder

$$x^2 \frac{dz^2}{dx^2} - z^2 = -e^2;$$

mithin

$$\frac{dz}{\sqrt{-e^2 + z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Hieraus entspringt durch Integration

$$z + \sqrt{z^2 - e^2} = \frac{x}{C},$$

oder, wenn man $\frac{A^2}{e^2}$ für die willkührliche Constante setzt, die Gleichung rational macht und wieder $y^2 + x^2 + e^2$ für 2xz substituirt:

$$A^2 y^2 + (A^2 - e^2) x^2 = A^2 (A^2 - e^2).$$

Diese Gleichung drückt Ellipsen oder Hyperbeln aus, je nachdem die willkührliche Constante A^2 größer oder kleiner als e^2 ist. Es muß aber A^2 kleiner als e^2 genommen werden, was sich daraus ergibt, daß man die Coordinaten der Durchschnittspunkte aus den beiden Gleichungen entwickelt, welche unter der Voraussetzung $a^2 > e^2$ nur reell sind, wenn $A^2 < e^2$ ist. Die orthogonale Trajectorie ist demnach eine Hyperbel, welche mit den gegebenen Ellipsen beide Brennpunkte gemein hat.

III. Die Curve zu finden, welche sämmtliche durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden unter dem Winkel, dessen Tangente b ist, schneidet. Nehmen wir den gemeinsamen Durchschnittspunkt A (Fig. 71) dieser Geraden zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist ihre Gleichung

$$Y = aX;$$

woraus

$$\frac{dY}{dX} = a = \frac{y}{x}.$$

Mittelst derselben und der Relation

$$\left(1 + \frac{dY}{dX} \cdot \frac{dy}{dx}\right) b + \frac{dY}{dX} - \frac{dy}{dx} = 0$$

erhalten wir als Differentialgleichung der Trajectorie:

$$(bx + y)\, dx + (by - x)\, dy = 0.$$

Diese homogene Gleichung liefert das Integral:

$$bl \sqrt{x^2 + y^2} + arc\left(tang = \frac{x}{y}\right) + C,$$

welches mit folgendem:

$$bl \sqrt{x^2 + y^2} = arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) + C$$

einerlei ist. Verwandelt man die rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten, indem man setzt

$$x = r \cos (t - C) \text{ und } y = r \sin (t - C),$$

folglich

$$arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) + C = t \text{ und } r^2 = x^2 + y^2;$$

so bekommt man

$$t = blr,$$

welche einer logarithmischen Spirale angehört.

IV. Ein System logarithmischer Spiralen, deren Gleichung ist:

$$R = ae^{\frac{T}{m}}, \qquad \text{(Fig. 72)}$$

wo a die von einer Curve zur andern sich ändernde Größe darstellt, soll von einer Curve unter einem gegebenen Winkel, dessen trigonometrische Tangente b ist, geschnitten werden. Man hat zunächst den Ausdruck

$$\frac{dR}{dT} = \frac{a}{m}\, e^{\frac{T}{m}} = \frac{R}{m},$$

durch dessen Substitution in die Relation:

$$\left(b\,\frac{dR}{dT} - R\right)\frac{dr}{dt} + r\left(\frac{dR}{dT} + bR\right) = 0,$$

indem r statt R gesetzt wird, sich ergibt:

$$(b - m)\,\frac{dr}{dt} + r\,(1 + bm) = 0$$

oder

$$\frac{dr}{r} = \frac{1 + bm}{m - b} \cdot dt.$$

Durch Integration entsteht

$$l\,\frac{r}{C} = \frac{1 + bm}{m - b} \cdot t \text{ oder } r = Ce^{\frac{1 + bm}{m - b}\,t}$$

als Gleichung der Trajectorie, welche mithin wieder eine logarithmische Spirale ist.

3. Verschiedene Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen erster Ordnung führen.

§. 269. **Umgekehrte Methode der Tangenten.** Wir wollen nun noch andere Aufgaben folgen lassen, deren Lösung die Integration von Differentialgleichungen erfordert. Wir beginnen mit den Aufgaben, wo es sich darum handelt, eine Curve zu finden, deren Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale u. s. w. eine gegebene Function von x und y sei. Dergleichen Aufgaben führen auf die Integration der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung zurück, weßhalb

man dieses Verfahren auch die umgekehrte Methode der Tangenten genannt hat.

I. Die Curve zu bestimmen, für welche auf rechtwinklige Coordinaten bezogen folgende Tangentenconstruction gilt. Vom Endpunkte P (Fig. 73) der Abscisse AP (x) des Curvenpunktes M ziehe man PR senkrecht auf den Leitstrahl AM, sodann RT senkrecht auf AP und verbinde hierauf den Fußpunkt T mit M durch eine Gerade, welche die Berührungsgerade sein soll. Bezeichnet man mit τ den Winkel, welchen die Berührungsgerade mit der positiven Abscissenachse macht, und mit t den Winkel, welchen mit derselben Achse der Leitstrahl bildet; so hat man einerseits

$$AT = AP - TP = x - y \cot \tau,$$

ferner anderseits

$$AT = \frac{\overline{AR}^2}{AP} = x \cos^2 t;$$

woraus für Curve die Gleichung:

$$x - y \cot T = x \cos^2 t,$$

oder die Differentialgleichung:

$$x - y \frac{dx}{dy} = x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2$$

entspringt. Substituirt man in diese homogene Gleichung

$$y = xz,$$

so geht sie in:

$$zdz = \frac{dx}{x}$$

über, woraus durch Integration entsteht:

$$z^2 = \mathrm{l}\,(x^2) + C,$$

oder, wenn

$$C = -\,\mathrm{l}\,(a^2)$$

und statt z wieder $\frac{y}{x}$ gesetzt wird:

$$y = x \sqrt{\mathrm{l}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)}.$$

Für $x < a$ ist y imaginär, für $x = a$ wird $y = 0$; von wo aus die Ordinaten der Curve ins Unendliche wachsen.

II. Für eine andere Curve gilt folgende Tangentenconstruction. Man ziehe von dem Endpunkte P der Abscisse des Curvenpunktes M (Fig. 74) eine Senkrechte PT auf den Radiusvector AM bis sie die Ordinatenachse in T schneidet; die die Punkte T und M verbindende Gerade soll die Berührungsgerade sein. Man hat einerseits

$$AT = \frac{x^2}{y},$$

und anderseits

$$AT = y - \frac{x}{\cot \tau};$$

woraus entspringt:

$$y - x \operatorname{tang} \tau = \frac{x^2}{y}$$

oder als Differentialgleichung der Curve:

$$y^2 - x^2 = xy \frac{dy}{dx}.$$

Mittelst der Substitution

$$y = zx$$

erwächst hieraus

$$zdz = -\frac{dx}{x};$$

und durch Integration

$$z^2 = C - l(x^2),$$

oder wenn

$$C = l(a^2)$$

gesetzt wird:

$$y = x \sqrt{l\left(\frac{a^2}{x^2}\right)}$$

als Gleichung der Curve. Dieselbe hat eine der Lemniscate ähnliche Gestalt.

III. Die Curve zu finden, für welche (Fig. 75) das Tangentenstück MT constant = AD ist. Stellt a diese Länge dar, so hat man

$$y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = a \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y};$$

woraus durch Integration:

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy + C,$$

d. h.

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y^2} \mp \frac{1}{2} \text{ al } \frac{(a + \sqrt{a^2 - y^2})^2}{y^2}$$

als Gleichung der gesuchten Curve. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten, indem wir x statt x — C setzen; so kommt

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y^2} \mp \frac{1}{2} \text{ al } \frac{(a^2 + \sqrt{a^2 - y^2})^2}{y^2}.$$

Die Curve besteht aus vier gleichen Theilen, die beiden Coordinatenachsen sind Achsen derselben und der Anfangspunkt ist der Mittelpunkt; sie besitzt bei C und D zwei Spitzen und hat die Abscissenachse zur Asymptote; der ganze von der Curve eingeschlossene Flächenraum ist gleich $a^2\pi$, was der Leser finden mag.

IV. Die Curve zu finden (Fig. 76), bei welcher die Entfernung MT eines jeden Punktes von dem Endpunkte seiner Polarsubtangente oder die Polartangente eine constante Größe AD = a ist. Man hat

$$r \sqrt{1 + r^2 \frac{dt^2}{dr^2}} = a,$$

woraus

$$dt = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2} dr.$$

Durch Integration entspringt:

$$t = \int \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2} \cdot dr + C,$$

d. h.

$$t = \mp \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \mp \text{arc}\left(\sin = \frac{r}{a}\right) + C$$

die Gleichung der Curve. Für r = a ergibt sich

$$t = C \mp \frac{1}{2} \pi;$$

legen wir demnach die Achse durch den Punkt, für welchen r = a, so wird die Gleichung:

$$t = \mp \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \pm \text{arc}\left(\cos = \frac{r}{a}\right).$$

Die Curve besteht aus zwei gleichen Theilen und hat in D einen Rückkehrpunkt für den $r = a$; sie macht unendlich viele Windungen um den Punkt A und nähert sich demselben mehr und mehr, ohne ihn je zu erreichen. Die Curvenpunkte lassen sich auf folgende Weise finden. Man beschreibe um den Anfangspunkt der Coordinaten A einen Kreis mit dem Halbmesser a. Soll nun D den Rückkehrpunkt der Curve bilden, so nehme man auf einer beliebigen Tangente BR jenes Kreises den Punkt R dergestalt an, daß RB = Bogen DB, ziehe AR und fälle von B eine Senkrechte auf dieselbe; der Fußpunkt M gehört der Curve an. Denn bezeichnen wir den Winkel DAB mit ϑ, so ist

$$BR = a\vartheta;$$

mithin

$$AR = \sqrt{a^2 + a^2\vartheta^2}.$$

Weiter ist

$$AM = r = \frac{\overline{AB}^2}{AR} = \frac{a}{\sqrt{1 + \vartheta^2}};$$

folglich

$$\vartheta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}.$$

Nun ist

$$t = \text{Winkel } DAM = DAB - MAB,$$

und

$$\cos MAB = \frac{AM}{AB} = \frac{r}{a};$$

also

$$t = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - \text{arc}\left(\cos = \frac{r}{a}\right),$$

wie es die Natur der Curve verlangt.

§. 270. **Vier andere Aufgaben.** I. Es sei RMQ (Fig. 77) eine logarithmische Linie, mithin

$$Y = ae^{\frac{x}{a}}$$

deren Gleichung; man soll die Curve TNS von solcher Beschaffenheit finden, daß wenn von einem Punkte der logarithmischen Linie eine Senkrechte MD = a auf die zugehörige Ordinate errichtet und der Endpunkt D mit dem Durchschnitte N der gesuchten Curve und der Ordinate MP verbunden wird, die Verbindungslinie DN jene Curve in N berühre. Der Bedingung der Aufgabe zufolge hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y - y}{a} \text{ oder } \frac{dy}{dx} + \frac{y}{a} = e^{\frac{x}{a}};$$

woraus durch Integration

$$y = \frac{1}{2} ae^{\frac{x}{a}} + \frac{C}{a} e^{-\frac{x}{a}}$$

als Gleichung der gesuchten Curve. Soll dieselbe die logarithmische Linie auf der Ordinatenachse schneiden, so besteht die Relation:

$$\frac{1}{2} a + \frac{C}{a} = a, \text{ d. h. } C = \frac{1}{2} a^2.$$

Wird dieser Werth in die gefundene Gleichung substituirt, so hat man

$$y = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

welches die Gleichung einer Kettenlinie ist.

II. Die Curve AMS (Fig. 78) zu finden, für welche in jedem ihrer Punkte M die Länge des Bogens AM, vom tiefsten Punkte A ausgegangen, der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die in M gezogene Berührungsgerade TM mit der Horizontalen HS bildet, proportional ist. Es sei der tiefste Punkt A der Curve der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten und die gezogene Verticale AX die Abscissenachse. Die Bedingung der Aufgabe liefert, wenn Bogen AM = s, Winkel PMT = φ gesetzt wird, und a eine constante Größe darstellt:

$$s = a \operatorname{tang} \varphi.$$

Ferner ist

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dy \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$$

und

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{dx}{dy};$$

mithin auch

$$ds = \frac{dx}{\sin\ \varphi} \text{ und } ds = \frac{dy}{\cos\ \varphi},$$

woraus

$$dx = ds \sin\ \varphi \text{ und } dy = ds \cos\ \varphi.$$

Die Gleichung

$$s = a\ \text{tang}\ \varphi$$

differentiirt gibt

$$ds = \frac{ad\varphi}{\cos^2\ \varphi};$$

durch Substitution dieses Werthes in die beiden vorhergehenden Gleichungen erhalten wir:

$$dx = \frac{a \sin\ \varphi d\varphi}{\cos^2\ \varphi} \text{ und } dy = \frac{ad\varphi}{\cos\ \varphi};$$

woraus durch Integration entspringt:

$$x = \frac{a}{\cos\ \varphi} + C \text{ und } y = al\left(\text{tang}\ \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + C'.$$

Für $\varphi = 0$ fällt der Punkt M in A, so daß für $x = 0$ wird $y = 0$; was die Gleichungen $C = -a$ und $C' = 0$ zur Folge hat: es ist daher

$$x = \frac{a}{\cos\ \varphi} - a \text{ und } y = al\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Um eine Gleichung zwischen x und y zu erhalten, erwägen wir, daß

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + \text{tang}\ \frac{\varphi}{2}}{1 - \text{tang}\ \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + \sin\ \varphi}{\cos\ \varphi}$$

ist; mithin

$$y = al \cdot \frac{(1 + \sqrt{1 - \cos^2\ \varphi})}{\cos\ \varphi},$$

oder, weil

$$\cos\varphi = \frac{a}{a + x}$$

ist:

$$y = a l \frac{(a + x + \sqrt{2ax + x^2})}{a}$$

als Gleichung der gesuchten Curve. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

folglich auch

$$e^{-\frac{y}{a}} = \frac{a}{a + x + \sqrt{2ax + x^2}};$$

woraus

$$\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right)\frac{a}{2} = a + x.$$

Verlegt man den Ursprung von A nach A′, wo AA′ = a ist, so bekommt man die Gleichung

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right),$$

welche eine Kettenlinie vorstellt.

III. Diejenige Curve zu finden, welche alle von einem gegebenen Punkte, dem Ursprung, ausgehenden Strahlen in denselben Punkt reflectirt. Setzt man in der Gleichung des reflectirten Strahles §. 190 die Abscisse des leuchtenden Punktes = 0, so hat man, wenn die Abscisse des Brennpunktes durch X bezeichnet wird,

$$X = x - y \cot\varphi,$$

d. h., da

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2xy' - y(1 - y'^2)}{x(1 - y'^2) + 2yy'},$$

$$X = \frac{2(x + yy')(xy' - y)}{2xy' - y(1 - y'^2)}.$$

Indem man in dieser Gleichung den Nenner wegbringt, erhält man

$$y(1 - y'^2)\left(x - \frac{X}{2}\right) = y'\left[\left(x - \frac{X}{2}\right)^2 - y^2 - \frac{1}{4}X^2.\right]$$

Um dieselbe zu integriren, setze man

$$y' = \frac{x - \frac{1}{2}X}{y} \cdot z,$$

wo z eine neue Variabele vorstellt. Man erhält alsdann

$$y^2 = z\left(x - \frac{1}{2}X\right)^2 - \frac{\frac{1}{4}X^2 z}{1 + z}.$$

Durch beiderseitige Differentiation erwächst

$$2yy' = 2\left(x - \frac{1}{2}X\right)z = z'\left(x - \frac{1}{2}X\right)^2 + 2z\left(x - \frac{1}{2}X\right)$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{2}X\right)^2}{(1 + z)^2} z',$$

d. h.

$$z'\left[\left(x - \frac{1}{2}X\right)^2 - \left(\frac{\frac{1}{2}X}{1 + z}\right)^2\right] = 0.$$

Diese Gleichung kann jetzt auf zwei Arten befriedigt werden, nemlich erstlich durch den Factor

$$z' = 0 \text{ oder } z = -C = \frac{yy'}{x - \frac{1}{2}X}$$

oder

$$y^2 + C\left(x - \frac{1}{2}X\right)^2 = C,$$

was einen Kegelschnitt vorstellt; und zweitens durch den Factor

$$\left(x - \frac{1}{2}X\right)^2 - \left(\frac{\frac{1}{2}X}{1 + z}\right)^2 = 0,$$

welcher

$$\pm\frac{1}{2}X = x - \frac{X}{2} + yy',$$

d. h. durch Elimination von y' zwischen dieser und der ursprünglichen Gleichung:

$$\pm \frac{X}{2} \left[\left(x - \frac{X}{2} \right)^2 + y^2 + \frac{1}{4} X^2 \right] = 0$$

als particuläre Lösung liefert, welche aber dießmal keinen geometrischen Sinn zuläßt. Die Differentialgleichung des obigen Kegelschnittes enthält bereits eine willkührliche Constante C. Die Constante C' muß also von dieser abhängig sein. Die Art dieser Abhängigkeit kann man finden, indem man y' aus der Differentialgleichung des Kegelschnittes und der ursprünglichen Gleichung eliminirt, und das Resultat mit C' vergleicht. Man findet

$$C' = \frac{CX^2}{4(1 + C)}.$$

Daraus erhellet, daß Ausgangs- und Eintreffungspunkt der Strahlen die geometrischen Brennpunkte des Kegelschnittes vorstellen.

IV. Die Curve zu finden, bei welcher die von zwei festen Punkten aus auf ihre sämmtlichen berührenden gefällten Senkrechten ein constantes Rechteck = k bilden. Wählt man die Verbindungslinie der zwei festen Punkte als Abscissenachse und einen derselben als Ursprung, von welchem der andere um 2a absteht, so ist, den Bedingungen der Aufgabe zufolge

$$(2ay' + y - y'x)(y - y'x) = k(1 + y'^2).$$

Durch Differentiation erhält man die beiden Gleichungen:

$$y'' = 0 \text{ und } - x(2ay' + y - y'x) + (y - y'x)(2a - x) = 2ky'.$$

Die Erste gibt

$$y' = c,$$

wodurch die vorgelegte übergeht in:

$$(2ac + y - cx)(y - cx) = k(1 + c^2),$$

welche zwei geraden Linien angehört. Die Zweite in ihrer Verbindung mit der gegebenen liefert durch die Elimination von y', wenn dabei x mit x + a vertauscht wird:

$$y^2(a^2 + k) + kx^2 = k(a^2 + k).$$

Es ist dies die Gleichung einer Ellipse, welche die beiden festen Punkte zu Brennpunkten und

$$\sqrt{k + a^2} \text{ und } \sqrt{k}$$

zu halben Achsen hat. Diese Curve bildet die besondere Auflösung des Problems und geht aus dem stetigen Durchschnitte der in dem allgemeinen Integral enthaltenen Geraden hervor.

4. Verschiedene Aufgaben, bei denen man auf Differentialgleichungen höherer Ordnung gelangt.

§. 271. **Vier Aufgaben.** Zum Schluß wollen wir noch einige geometrische Aufgaben mittheilen, welche auf Differentialgleichungen höherer Ordnung führen, indem wir den Leser, der noch mehrere Probleme dieser Art, sowie auch Probleme, deren Lösung die Integration von Differentialgleichungen der ersten Ordnung erheischt, kennen zu lernen wünscht, auf die Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie von Magnus und auf die verschiedenen Beispielsammlungen von Lehmus verweisen, aus welcher ersteren wir mehrere Aufgaben hier aufgenommen haben.

I. Die Curve zu finden, bei welcher sich der Krümmungshalbmesser zur Normale wie n : 1 verhält. Man hat

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ny\sqrt{1 + y'^2},$$

oder weil

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy'}{dy} = y'\frac{dy'}{dy}$$

ist,

$$1 + y'^2 = nyy'\frac{dy'}{dy}.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$cy^{\frac{2}{n}} = 1 + y'^2 \text{ oder } dx = \frac{dy}{\sqrt{cy^{\frac{2}{n}} - 1}}$$

als erste Differentialgleichung der gesuchten Curve. Für

$$n = -1$$

entsteht

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{c - y^2}},$$

woraus durch Integration

$$y^2 + (x - c')^2 = c;$$

die gesuchte Curve ist mithin ein Kreis.

Für $$n = + 1$$
bekommen wir

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{cy^2 - 1}},$$

woraus, nachdem $c^{\frac{1}{2}}$ statt c gesetzt worden, durch Integration erwächst:

$$y = \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{x - c'}{c}} + e^{\frac{x + c'}{c}} \right),$$

d. h. die gesuchte Linie ist eine Kettenlinie.

Für $$n = + 2$$
haben wir

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{cy - 1}},$$

woraus, wenn integrirt und $\frac{1}{e}$ für c gesetzt wird, entspringt:

$$(x - e')^2 = 4c\,(y - c);$$

die gesuchte Curve ist demnach in diesem Falle eine gewöhnliche Parabel.

II. Die Curve zu finden, bei welcher der Krümmungshalbmesser dem Cubus der Normale proportional ist. Man hat

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = a\,(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \cdot y^3;$$

oder

$$y'' = \frac{1}{ay^3}.$$

Daraus entsteht nach einander

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx} = \frac{dy}{ay^3};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = - \frac{1}{2ay^2} + \frac{c}{2};$$

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{-\frac{1}{a} + cy^2}}$$

und

$$x + c' = \frac{\left(-\frac{1}{a} + cy^2\right)^{\frac{1}{2}}}{c},$$

welches die Gleichung eines Kegelschnitts ist.

III. Die Curve zu finden, in welcher der Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{x^2}{a}$, wo x die Abscisse und a eine constante Größe bezeichnet. Die Differentialgleichung lautet hier:

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{x^2}{a}$$

oder

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{a\ (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}$$

Die Integration nach Trennung der Variabeln liefert

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{Cx - a}{x}.$$

Bei wiederholter Integration entsteht

$$y = \int \frac{Cx - a}{\sqrt{x^2 - (Cx - a)^2}}\, dx + C_1.$$

Diese Integration ist leicht auszuführen und gibt verschiedene Curven, je nachdem man die Constante C der Einheit gleich oder kleiner oder größer wählt. Im ersten Falle findet man eine algebraische Curve, nämlich:

$$y = \frac{1}{3}(x - 2a)\sqrt{\frac{2x - a}{a}} + C_1,$$

welche in dem besonderen Falle, daß ebenfalls a_1 der Einheit gleich und $C_1 = 0$ ist, wie Fig. 79 gezeichnet ist. Im zweiten Falle ist die Curve logarithmischer Natur, im dritten Falle enthält sie eine cyclometrische Function.

IV. Die Curve zu finden, für welche die Flächenstücke AMPB (Fig. 80), die von den in einem gegebenen Punkt A anfangenden Bogen AM, von der senkrechten Ordinate AB des Anfangspunktes A nebst von der Ordinate MP des Endpunktes M jener Bogen und von der Abscissenachse begrenzt werden, in einem gegebenen Verhältnisse zu den Dreiecken TBMP stehen, welche die Ordinate, die Tangente und die Subtangente des Endpunktes jener Bogen bilden. Man hat

$$n\,(\int y dx + C) = \frac{y^2}{2y'},$$

wo n eine gegebene Zahl ist. Durch Differentiation ergibt sich daraus:

$$\frac{y}{2y'^2}\,\frac{dy'}{dx} = 1 - n$$

oder

$$\frac{dy'}{dy} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{2\,(1 - n)}{y}.$$

Wir erhalten nunmehr durch Integration

$$Cy' = y^{2\,(1-n)};$$

folglich

$$dx = Cy^{2\,(n-1)}\,dy;$$

woraus durch Integration entsteht, wenn C_1 für $\frac{C}{2n-1}$ gesetzt wird:

$$x + C_2 = C_1 y^{2n-1}$$

als Gleichung der gesuchten Curve. Da die Curve durch den gegebenen Punkt A, dessen Coordinaten a, b sind; so besteht die Relation:

$$a + C_2 = C_1 b^{2n-1}.$$

Da ferner der Ausdruck

$$\int y dx + C \text{ für } x = a$$

verschwinden muß, indem die von der Curve begrenzten Flächenstücke bei der Ordinate AB ihren Anfang nehmen; so wird

$$\frac{y^2}{2y'} \text{ für } x = a \text{ und } y = b$$

verschwinden müssen, d. h. es wird sein:

$$(2n - 1)\,C_1 b^{2n} = 0,$$

weil

$$y' = \frac{y^{2(1-n)}}{C}$$

ist. Wir haben daher

$$C_1 = 0 \text{ oder } b = 0:$$

im erstern Falle geht die Curve in eine der Ordinatenachse parallele Gerade über, für welche solche Flächenstücke und Dreiecke, wie sie die Aufgabe verlangt, nicht vorhanden sind. Für $b = 0$ bleibt C_1 unbestimmt, wenn nicht noch eine andere Bedingung hinzugefügt wird. Es wird alsdann

$$a + C_2 = 0 \text{ oder } a + C_2 = \infty,$$

je nachdem $(2n - 1)$ positiv oder negativ ist. In dem ersten Falle, wo also $n > \frac{1}{2}$, ist die Gleichung der Curve:

$$x = a + C_1 y^{2n-1},$$

welche einer Parabel angehört. In dem zweiten Falle, wo $n < \frac{1}{2}$, ist aber $C_2 = \infty$; mithin gibt es dann keine Curve, welche den Bedingungen der Aufgabe genügt. Legen wir jedoch der Constante C_2 einen beliebigen Werth k bei, so ist die Gleichung der Curve

$$x + k = C_1 y^{2n-1},$$

so daß sie die Abscissenachse zur Asymptote hat, sobald $n < \frac{1}{2}$ ist: nunmehr stehen die Flächenräume XMP (Fig. 81), welche zwischen der Curve, ihrer Asymptote und einer beliebigen Ordinate liegen, in dem gegebenen Verhältnisse zu den von derselben Ordinate, der zugehörigen Tangente und Subtangente eingeschlossenen Dreiecken MPT. Wenn $n = \frac{1}{2}$ ist, erhalten wir die Gleichung:

$$x + C_2 = C \log y,$$

welche eine logarithmische Linie ausdrückt.

§. 272. **Vier andere Aufgaben**. I. Die Curve zu finden, bei welcher der Krümmungshalbmesser ϱ dem Winkel v proportional ist, welchen dieser Krümmungshalbmesser mit der Ordinatenachse bildet. Man hat

$$\varrho = av.$$

Es ist aber

$$\sin v = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

und

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

woraus durch Differentiation entspringt:

$$\cos v \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dx}}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\sin v \cdot \frac{dv}{dy} = \frac{\frac{dy'}{dx}}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir erwägen, daß

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dy'}{dx}} = \varrho$$

ist:

$$\frac{dx}{dv} = \varrho \cos v$$

und

$$\frac{dy}{dv} = \varrho \sin v;$$

mithin durch Integration

$$x + C_1 = \int \varrho \cos v dv$$

und

$$y + C_2 = \int \varrho \sin v dv.$$

Substituiren wir statt ϱ seinen Werth av; so bekommen wir

$$x + C_1 = a \int v \cos v dv$$

und

$$y + C_2 = a \int v \sin v dv;$$

d. h.

$$x + C_1 = a (\cos v + \sin v)$$

und

$$y + C_2 = a (\sin v - v \cos v).$$

Das System dieser beiden Gleichungen drückt die gesuchte Curve aus. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten, indem wir x und y beziehungsweise statt $x + C_1$ und $y + C_2$ setzen, und gehen dann zu Polarcoordinaten über; so bekommen wir durch Division

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin v - v \cos v}{\cos v + v \sin v},$$

woraus

$$v \cos (v - t) = \sin (v - t);$$

oder

$$\tang (v - t) = v;$$

d. h.

$$v - t = \text{arc} (\tang = v)$$

oder

$$t = v - \text{arc} (\tang = v).$$

Nehmen wir ferner die Summe der Quadrate jener Gleichungen, so kommt

$$r^2 = a^2 + a^2 r^2,$$

woraus

$$v = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}.$$

Setzen wir diesen Werth in den für t gefundenen Ausdruck, so erhalten wir

$$t = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \text{arc} \left(\tang = \frac{r^2 - a^2}{a}\right)$$

als Gleichung der Curve, welche demnach eine Kreisevolvente ist.

II. Die Curve zu finden, für welche

$$\varrho = a \cos v,$$

wo a eine constante Größe ist und ϱ und r die frühere Bedeutung haben. Wir erhalten, wenn die Constanten C_1 und C_2 gleich Null gesetzt werden:

$$x = a \int \cos^2 v dv$$

und

$$y = a \int \sin v \cos v dv,$$

d. h.

$$x = \frac{1}{4} a (2v + \sin 2v)$$

und

$$y = \frac{1}{4} a (1 - \cos 2v),$$

welche zwei Gleichungen nach §. 157 einer Cycloide angehören.

III. Eine Curve zu finden, welche alle von einem auf der Abscissenachse in der Entfernung $x = a$ befindlichen Punkte P ausgehenden Strahlen in denselben anderen Punkt den Ursprung A bricht. Nach §. 192 ist die Gleichung des gebrochenen Strahles

$$Y - y = - \operatorname{tg} \varphi (X - x),$$

wo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z - y' (x - a) - yy'^2}{Zy' + yy' + x - a}$$

und

$$Z = \sqrt{\mu^2 (y^2 + (x - a)^2)(1 + y'^2) - (x - a + yy')^2}.$$

Soll nun der gebrochene Strahl stets durch den Ursprung gehen, so muß für alle Werthe von x, y, y' dessen Gleichung durch $X = 0$, $Y = 0$ befriedigt werden, woraus hervorgeht

$$y (Zy' + yy' + x - a) + x (Z - y' (x - a) - yy'^2) = 0$$

oder

$$(x + yy') Z = (x - a + yy')(xy' - y).$$

Wird diese Gleichung quadrirt und für Z obiger Werth gesetzt, so kommt

$$\mu^2 (y^2 + (x - a)^2)(x + yy')^2 (1 + y'^2)$$
$$= (x - a + yy')^2 (x^2 + y^2)(1 + y'^2),$$

d. h. nach Division mit $1 + y'^2$ und beiderseitiger Wurzelausziehung

$$\mu \cdot \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x - a + yy'}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}}.$$

Die Integration liefert nun

$$\mu \sqrt{x^2 + y^2} = C + \sqrt{(x - a)^2 + y^2},$$

wo C ganz beliebig ist, als Gleichung der gesuchten Curve, welche somit im Allgemeinen vom 4. Grade ist. Als besondere Auflösungen erhält man nur

$$x^2 + y^2 = 0$$

und

$$(x - a)^2 + y^2 = 0,$$

was den Ausgangs- oder Eintreffungspunkt der Strahlen vorstellt. Setzt man $C = 0$, so reducirt sich die Curve auf einen Kreis, nach einer bekannten Eigenschaft, daß der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten ein constantes Verhältniß haben, ein Kreis ist. Man bemerkt jedoch bald, daß die Strahlen nicht wirklich in den Ursprung gebrochen werden, sondern so, daß sie von demselben herzukommen scheinen. — Für $\mu = -1$, d. h. für den Fall der Reflection erhält man ebenfalls einen Kegelschnitt, von welchem A und P die Brennpunkte sind. Ist endlich P unendlich weit entfernt, so kann man wieder einen Kegelschnitt erhalten, wenn man $C = -a - \alpha\mu$ setzt. Verwandelt man nemlich in der Gleichung

$$\mu \sqrt{x^2 + y^2} = -\alpha\mu - a + \sqrt{(a - x)^2 + y^2}$$

die rechte Seite in

$$-(x + \alpha\mu) - (a - x) + \sqrt{(a - x)^2 + y^2}$$

oder in

$$-(x + \alpha\mu) + \frac{y^2}{a - x + \sqrt{(a - x)^2 + y^2}},$$

so bemerkt man, daß mit zunehmendem a die Gleichung der Curve sich immer mehr auf

$$\mu \sqrt{x^2 + y^2} = -(x + \alpha\mu)$$

oder

Druckfehler.

Seite 2 Zeile 13 von oben muß y stehen statt x.

" 12 " 10 v. unten muß heißen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'}$

" 13 " 1 v. o. muß stehen $\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ statt $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

" 15 " 10 v. u. muß es heißen „den Werth log e" statt „der Zahl e."

" 16 " 11 v. u. muß es heißen: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ rc.

" 37 " 12 v. u. " " $\frac{d^n\left\{\frac{1}{b^2x^2-a^2}\right\}}{dx^n}$ statt $\frac{d^n\left\{\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right\}}{dx^n}$

" 46 " 14 v. u. muß das letzte α in der Zeile noch innerhalb der eckigen Klammer stehen.

" 46 " 1 u. 2 v. u. muß es heißen:

$$f(a+h)-f(a) < \lim n\alpha f'(g) < h f'(g)$$

und $f(a+h)-f(a) > \lim n\alpha f'(k) > h f'(k)$.

" 50 " 7 v. o. muß es heißen: „für den Werth" statt „innerhalb des Intervalls."

" 56 " 8 v. o. in dem Ausdruck für ϱ muß der Nenner heißen:

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

" 69 " 11 v. u. muß es heißen $f(a+h)-f(a)$ st. $f(a+h)-f(x)$

" 73 " 14 von oben muß es heißen:

$$\varphi(x,y)=a^2+b^2-c^2-e^2-2ab\cos x+2ce\cos y=0$$

" 74 " 6 v. u. muß heißen $f(x+h)-f(x)=h f'(x+\vartheta h)$

" 112 " 8 von unten muß dz stehen statt dy.

" 121 " 6 von unten muß $\frac{dz}{dy}$ stehen statt $\frac{da}{dy}$

Seite 124 Zeile 3 von oben muß das zweite Glied der Gleichung heißen: $2\,\frac{d^2 f}{dx\;dz} \cdot \frac{dz}{dx}$.

„ 127 „ 3 v. o. muß das 3te Glied heißen $z^3 \frac{d^3 f}{dz^3}$.

„ 128 „ 11 v. u. muß die rechte Seite der Gleichung heißen $z - c$ statt $y - c$.

„ 130 „ 16 v. u. muß stehen „endlich" statt „kontinuirlich".

„ 133 „ 2 v. o. muß stehen $y = 1$ statt $z = 1$.

„ 133 „ 8 v. o. muß stehen $y = 0$ statt $z = 0$.

„ 134 „ 8 v. u. muß die Gleichung heißen:

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} \ldots. = 0.$$

„ 135 „ 3 v. u. muß „ferner" vor „gedachter" und „Ausdruck" nach „gedachter" eingeschoben werden.

„ 137 „ 6 v. u. muß die erste Gleichung heißen $\frac{d^2 f}{dx^2} = A$.

„ 137 „ 1 v. u. lies Cq^2 statt Cq^3.

„ 143 „ 4 v. o. muß die ganze rechte Seite der Gleichung mit negativen Zeichen versehen werden.

„ 143 „ 9 v. u. lies $y^2 - u^2$ statt $y^2\; u^2$.

„ 143 „ 5 von unten lies $\frac{dz}{du} = y - 2u$ statt $x - 2u$.

„ 157 „ 4 v. o. muß das letzte Glied heißen $\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 (\varphi\, t)^3}{dt^2}$

„ 159 „ 6 v. o. muß die Gleichung heißen $y - t - x\varphi(y) = 0$.

„ 159 „ 8 v. o. muß der Nenner heißen $y - y_,$ statt $x - y_,$.

„ 160 „ 7 v. o. muß die Reihe heißen:

$$x + \frac{2^0 x^2}{1} + \frac{3^1 x^3}{1 \cdot 2} + \frac{4^2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

„ 166 „ 4 v. o. lies $\frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2}$ statt $a \int \frac{dt}{1 + t^2}$

„ 167 „ 1 v. o. ist vor $\frac{5x^3\, dx}{3x^4 + 7}$ das Integralzeichen vergessen.

„ 170 „ 17 v. u. ist vor dem letzten Glied das Integralzeichen vergessen.

„ 192 „ 5 v. o. lies dritte statt direkte.

„ 194 „ 7 v. o. ist dx vergessen.

Seite 194 Zeile 2 v. u. ist vor dem Bruch: $\dfrac{\frac{dx}{\sqrt{-1}}}{\sqrt{\text{u. s. w.}}}$ das $\int$ vergessen

" 200 " 11 v. o. muß die rechte Seite heißen $\dfrac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}$.

" 200 " 12 u. 14 v. o. zweimal, lies x^{m-n-1} statt x^{m-n+1}.

" 200 " 17 v. o. lies $\dfrac{m-n}{(p+1)n}$ statt $\dfrac{m-n}{(p+1)nb}$

" 200 " 18 v. o. lies im Nenner $(p+1)nb$ statt $(p+1)_{nb}$

" 211 " 4 v. o. lies $\dfrac{(2la)^{n+1}}{1\cdot3\ldots(2n+1)}$ u. s. w. st. $\dfrac{(2xla)^{n+1}}{1\cdot2\ldots(2n+1)}$.

" 211 " 5 v. o. lies $\dfrac{1\cdot3\ldots(2n+3)}{(2la)^{n+2}}$ u. s. w. st. $\dfrac{1\cdot3\ldots(2n+3)}{(2xla)^{n+2}}$.

" 215 " 4 v. o. lies $\mp\dfrac{\tang^2 x}{2}$ statt $\pm\dfrac{\tang^2 x}{2}$.

" 219 " 7 v. u. lies $-\dfrac{a}{b}\int$ u. s. w. statt $-\dfrac{1}{b}\int$ u. s. w.

" 221 " 11 v. o. lies $+\sin x\,[$u. s. w. statt $-\sin x\,[$u. s. w.

" 222 " 6 v. u. muß hinter dem ersten Glied das dx wegfallen.

" 224 " 10 u. 11 v. o., sowie 15 u. 14 v. u. ist hinter den Brüchen der rechten Seite e^{ax} vergessen.

" 225 " 5 v. o. lies $\int f(z)\operatorname{cosec}^2 z\,dz$ st. $\int [(z)\operatorname{cosec}^2 z\,dz$.

" 230 " 7 von oben lies $\int_0^2$ statt $\int_2^0$.

" 232 " 13 von oben lies $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^3}{1\cdot2\cdot3}$ statt $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2}{1\cdot2\cdot3}$

" 237 " 11 v. o. lies $l\frac{1}{n}$ statt $1\frac{1}{n}$.

" 244 " 13 v. u. lies $\frac{1}{2}h^2\Sigma f'(a+mh)$ statt $\frac{1}{2}h^2\Sigma f(a+mh)$.

" 244 " 12 v. u. lies $\frac{1}{6}h^3\Sigma f''(a+mh)=\frac{1}{6}h^2$ u. s. w. statt $\frac{1}{6}\Sigma f'''(a+mh)=\frac{1}{6}h$ ꝛc.

" 257 " 5 v. u. lies dx statt dz.

" 258 " 1 v. u. lies $\displaystyle\int_{-b}^{b}\frac{\varepsilon\,dx}{\varepsilon^2+x^2}$ statt $\displaystyle\int_{-b}^{b}\frac{2\,dx}{\varepsilon^2+x^2}$.

" 262 " 7 v. o. lies $\dfrac{f(x,c)}{dc}$ statt $\dfrac{f(x,c)}{dx}$.

" 267 " 3 v. o. lies $\lim\dfrac{a}{n}\left(n-1\right)\dfrac{\pi}{2}$ statt $\dfrac{a}{n}\cdot n\dfrac{\pi}{2}$.

" 280 " 5 v. u. sind die Gränzen ∞ und 0 vergessen.

" 288 " 1 u. 2 v. u. lies $\sqrt{t^2+4ab}$ statt $\sqrt{x^2+4ab}$.

Seite 293 Zeile 5 v. o. lies $-\frac{1}{2}$ statt $-\frac{1}{6}$.

" 294 " 3 v. o. ist $f(x)$ hinter dem Integralzeichen ausgelassen.

" 294 " 7 v. o. lies zweimal $\int_a^b f(x)\,dx + \ldots$ statt $\int_a^b +$

" 296 " 5 v. u. sind auf der rechten Seite die Gränzen ∞ und 0 ausgelassen.

" 300 " 6 v. u. fehlen die Gränzen ∞ und 0.

" 304 " 11 v. o. lies e^{-xt} statt e^{xt}.

" 307 " 3 v. u. lies $l\Gamma(1)$ statt $\Gamma(1)$.

" 309 " 8 u. 5 v. u. lies $2^p, 3^p, 4^p \ldots$ statt $2p, 3p, 4p \ldots$

" 311 " 3 v. u. muß n noch unter dem Wurzelzeichen stehen.

" 312 " 8 v. u. lies $2 \sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - \ldots\right)$ statt

$$2 \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \ldots\right)$$

" 319 " 1 v. u. l. $x^{\alpha+n\beta-1}$ statt $e^{\alpha+n\beta-1}$.

" 340 " 7 v. o. lies sin ut statt cos ut.

" 342 " 9 v. o. muß die obere Gränze beim zweiten Integral $+ a$ statt $+ \infty$ heißen.

" 344 " 12 v. u. lies $\left(\frac{y}{b}\right)^2$ statt $\left(\frac{y}{b}\right)$

" 350 " 7 v. o. haben auf der linken Seite die Quadratzeichen der Klammern wegzufallen.

" 350 " 9 v. u. hat im Nenner des letzten Gliedes das Quadratzeichen der Klammer wegzufallen.

" 353 " 2 v. u. lies $\sin \varphi_{m\pm 1}$ st. $\sin \varphi_{m+1}$ u. $\Delta\varphi_m$ st. Δ_m.

" 353 " 1 v. u. lies $\mp \sin\varphi \sin\varphi_m \ldots$ statt $+ \sin\varphi \sin\varphi_m \ldots$

" 366 " 6 v. u. lies §. 143 statt §. 142.

" 367 " 7 von oben muß die Gleichung heißen:

$$G = \frac{1+c_1}{2}\left\{\int_0^\varphi (A_1 + B_1 \sin^2\varphi_1)\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} - \frac{B}{2}\cos\varphi_1\, d\varphi_1\right\}$$

Seite 371 Zeile 3 v. o. lies $\sin\varphi$ statt $\varphi \sin$.

" 373 " 7 v. o. lies $\sin\varphi \sin\psi\, \Delta\mu$ statt $\sin\varphi \sin\varphi\, \Delta\mu$.

" 374 " 10 v. u. muß der Nenner des letzten Gliedes heißen: $1 + a - a \cos\mu \cos\varphi \cos\psi$.

" 377 " 14 v. u. muß das erste Glied heißen: $-(2n-2)(1+c^2)$ u. s. w.

" 404 " 12 v. u. lies y statt Y.

" 404 " 6 v. u. muß das letzte Glied rechts heißen: $+(n-1)(n-2)\,Qx^{n-3}$.

" 406 " 3 v. u. lies tang QMM' statt tg $M'QM$.

$$y^2 = \left(\frac{x}{\mu} + a\right)^2 - x^2$$

reducirt, wodurch der in §. 192 gefundene Kegelschnitt sich wieder herausstellt.

IV. Die Curve Fig. 82 zu bestimmen, welche ein Hund M durchläuft, wenn er seinen auf einer geraden Linie AX hinschreitenden Herrn T so einzuholen sucht, daß er immer in gerader Richtung auf ihn zuläuft, vorausgesetzt, daß beider Geschwindigkeiten sich verhalten wie n : 1. Die Coordinaten des Curvenpunktes seien x, y; alsdann ist die Gleichung der Tangente

$$Y - y = y' (X - x),$$

woraus man für Y = 0 die Abscisse des Herrn erhält:

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$

Während eines unendlich kleinen Zeittheilchens durchläuft nun der Hund den Weg

$$dx \sqrt{1 + y'^2}$$

und der Herr den Weg

$$dX = \frac{yy''}{y'^2}\, dx,$$

mithin ist

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{nyy''}{y'^2}$$

oder

$$\frac{y'}{y} = n \cdot \frac{y''}{y' \sqrt{1 + y'^2}} = - n \frac{\frac{- y''}{y'^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2}}.$$

Durch beiderseitige Integration ergibt sich hieraus

$$ly = lc - nl \left(\frac{1}{y'} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2}\right).$$

Setzt man, um die Constante c zu bestimmen, $y' = \infty$, so erhält man y = c; es ist also c die Ordinate desjenigen Punktes N, an

welchem die Tangente senkrecht auf der Abscissenachse steht. Man erhält nun aus der letzten Gleichung

$$y^{-\frac{1}{n}} = c^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{y'} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2}\right),$$

mithin ist

$$y' \left(c^{\frac{2}{n}} y^{-\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}\right) = 2c^{\frac{1}{n}}$$

oder

$$\frac{c^{\frac{2}{n}} y^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} - \frac{y^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} + \frac{2c^{\frac{1}{n}}}{n} (x - C)$$

die Gleichung der verlangten Curve. — Zur Bestimmung der Constanten C setze man $y = 0$, woraus $x = C$. Diese Constante stellt demnach die Abscisse desjenigen Punktes Q vor, in welchem der Hund seinen Herrn erreicht. Nur der Fall $n = 1$ macht eine Ausnahme, indem $C = \infty$ ausfällt, so daß bei gleichen Geschwindigkeiten der Hund seinen Herrn niemals vollkommen einholen wird. Um auch für diesen Fall die Gleichung der Curve zu erhalten, kehren wir zu der letzten Differentialgleichung zurück und setzen darin $n = -1$. Wir erhalten:

$$y' \left(\frac{c^2}{y} - y\right) = 2c;$$

also ist dießmal

$$c^2 ly - \frac{1}{2} y^2 = 2cx + C$$

die verlangte Gleichung. Die Constante C kann man bestimmen, wenn man irgend einen Punkt der Curve Fig. 83 kennt, z. B. denjenigen, in welchem M seinen Lauf beginnt. Setzt man dessen Coordinaten b und a, so hat man

$$C = c^2 lb - \frac{1}{2} b^2 - 2ac.$$

Seite 407 Zeile 15 v. o. lies $\cot(\tau - t)$ statt $\cot(t - \tau)$.

„ 409 „ 4 v. o. lies $\tang(\tau - t) = m$ statt $\frac{1}{m}$.

„ 409 „ 8 v. o. lies Polarnormale statt Polartangente.

„ 417 „ 9—10 v. o. lies negativ statt positiv.

„ 431 „ 5 v. o. muß der Nenner Δx auf der rechten Seite wegfallen.

„ 434 „ 6 v. o. lies $= -\left\{ r.\frac{\sin\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}\right.$ ꝛc. statt $= -\left\{ r \cdot \sin\frac{\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}\right.$ ꝛc.

„ 445 „ 3 v. o. ist α vor dem Gleichheitszeichen vergessen.

„ 446 „ 2 v. o. muß die Klammer) hinter 2dv wegfallen.

„ 446 „ 5 v. o. lies $\sin 2dt = 2dt$ ꝛc. statt $= dt$ u. s. w.

„ 447 „ 9 v. o. m. d r gleich nach zweiten = Zeichen wegfallen.

„ 448 „ 13 v. u. lies $-\varrho\frac{dx}{ds}$ statt $\frac{dx}{ds}$.

„ 456 „ 13 v. o. lies $\gamma = -\frac{1}{m} e^{\frac{1}{m}(\delta - \pi/_2)} = -e^{\frac{1}{m}(\delta - \pi/_2 - m l m)}$

„ 465 „ 18 v. o. lies $AH = -2b$.

„ 467 „ 8 v. o. lies „parallelläuft" statt „zusammenfällt," und „im Ursprung" statt „auf der Abscissenachse."

„ 468 „ 10 v. o. lies $Y(1 - y'\surd$ statt $Y(1 - y')\surd$.

„ 468 „ 11 v. o. lies $y(1 - y'\surd$ statt $y(1 - y')\surd$.

„ 470 „ 8 v. o. lies $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$ ꝛc. statt $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.

„ 472 „ 13 v. o. lies $y = \frac{a^2 + b^2}{4} \cdot \frac{1}{x}$ statt $y = \frac{a^2 + b^2}{4} x$.

„ 475 „ 16 v. u. lies $u = 2\int$ u. s. w. statt $u = \frac{2}{3}\int$ u. s. w.

„ 478 „ 5 v. u. lies $\sin t = \frac{2x}{1 + x^2}$; $dt = \frac{2dx}{1 + x^2}$.

„ 479 „ 5 v. u. lies $r = \frac{\cos 2t}{\sin t}$ statt $r = \frac{\cos^2 t}{\sin t}$

„ 480 „ 4 v. o. lies $v = \frac{1}{2}\int \ldots = \frac{1}{2}r - \frac{t}{2}$ statt

$$2 = \frac{1}{2}\int \ldots = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2t}.$$

„ 488 „ 14 v. o. lies $\frac{1}{4}\sin t \cos t$ statt $\frac{1}{2}\sin t \cos t$.

„ 507 „ 2 v. o. lies $\frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$ statt $\frac{\sqrt{1 + t^2}}{dt}$

Seite 508	Zeile 3	von oben	lies z statt y.
„ 509	„ 16	von oben	muß die Gleichung heißen: $$\frac{du}{n} + u\,Pdx = Qdx.$$
„ 514	„ 2	v. u.	lies $v = \frac{2dyd^2y}{dz^2}$ statt $v = \frac{2dyd^2y}{dx^2}$
„ 519	„ 6	v. o.	lies $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} + NX.$
„ 520	„ 14	v. u.	lies $\alpha = \frac{nh - mk}{ak - bh}$
„ 585	„ 8	v. u.	lies Liouville statt Lionville.
„ 608	„ 10	v. u.	muß das letzte Glied heißen: $3\,(u^2-1)^2\,e^{xu}$ statt $3\,(u^2-1)\,e^{xu}$.
„ 638	„ 19	v. o.	lies $\varphi\,(x, y, y', y'')$ statt $\varphi\,(x, y, y' \cdot y'')$.
„ 641	„ 12	v. o.	lies $\frac{P'}{P} \cdot f(x, y, y', y'')$ st. $\frac{P'}{P} + f(x, y, y', y'')$.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

BIBLIOTHEK
DER K. B. MILITAER
BILDUNGS
ANSTALTEN

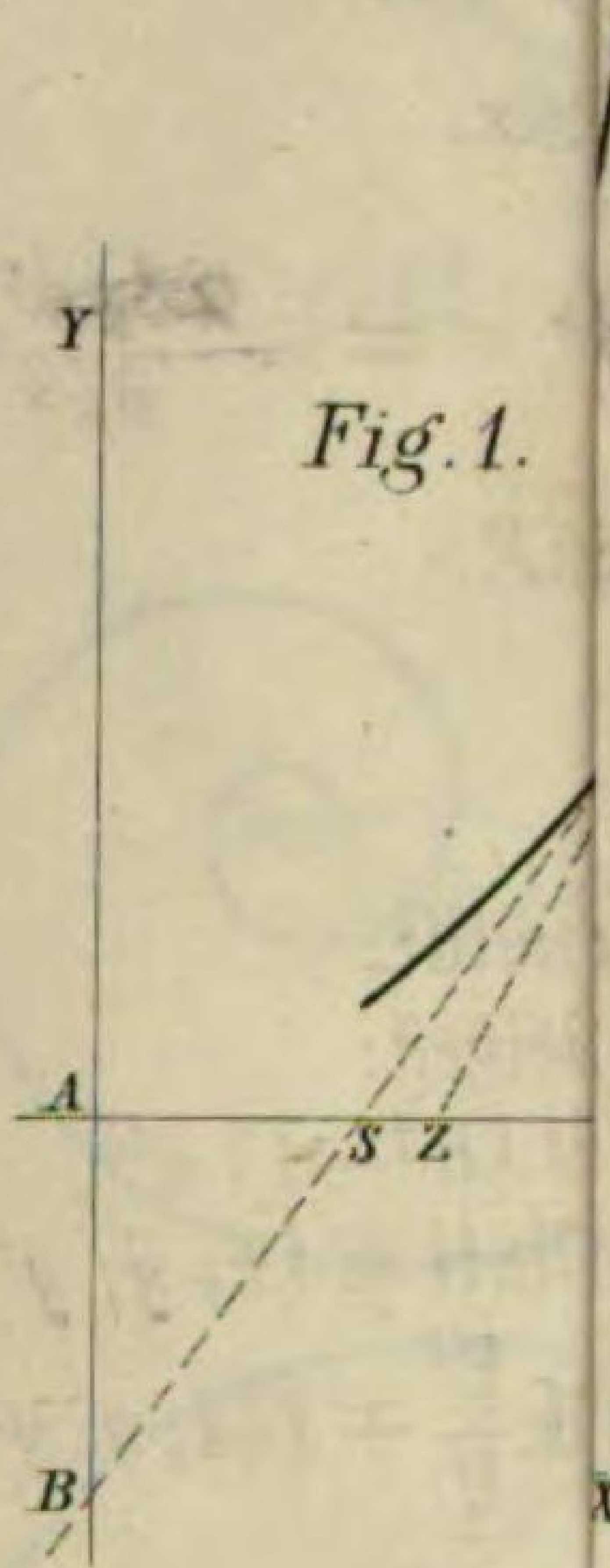


Fig. 1.

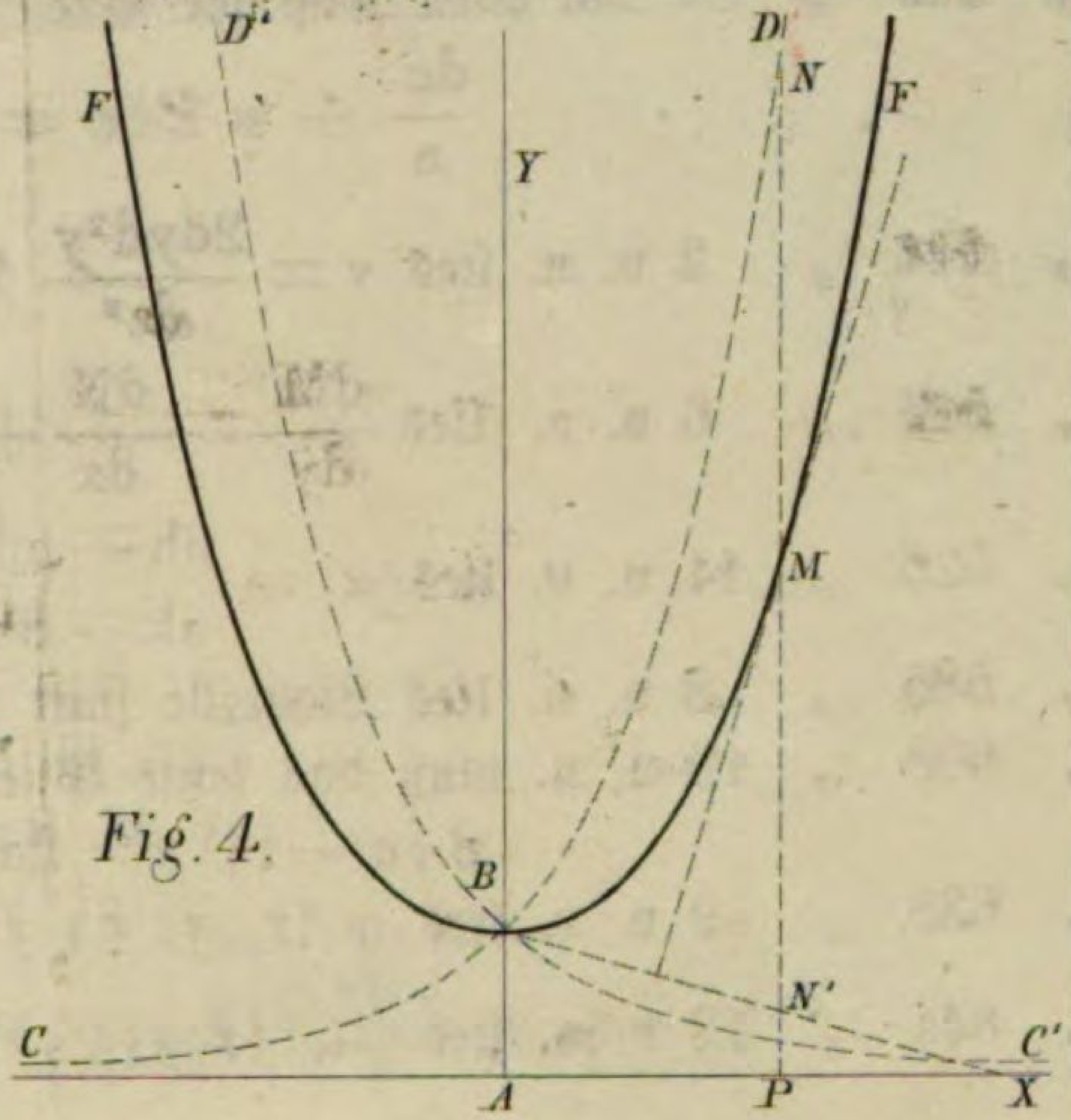
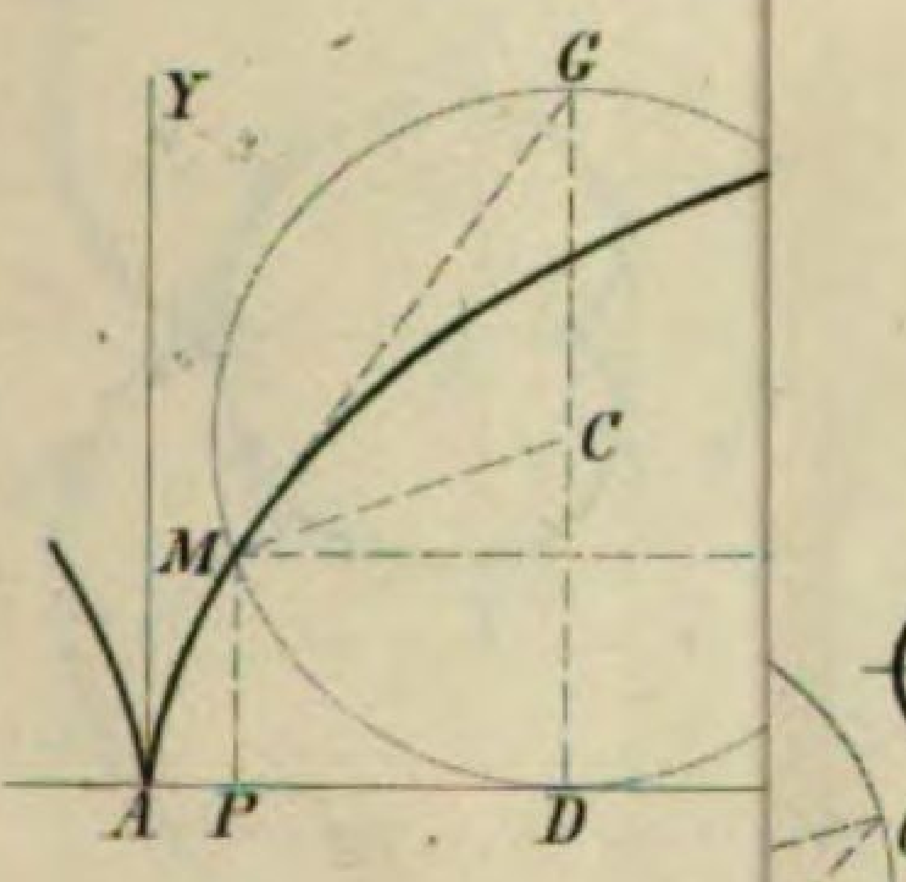


Fig. 4.



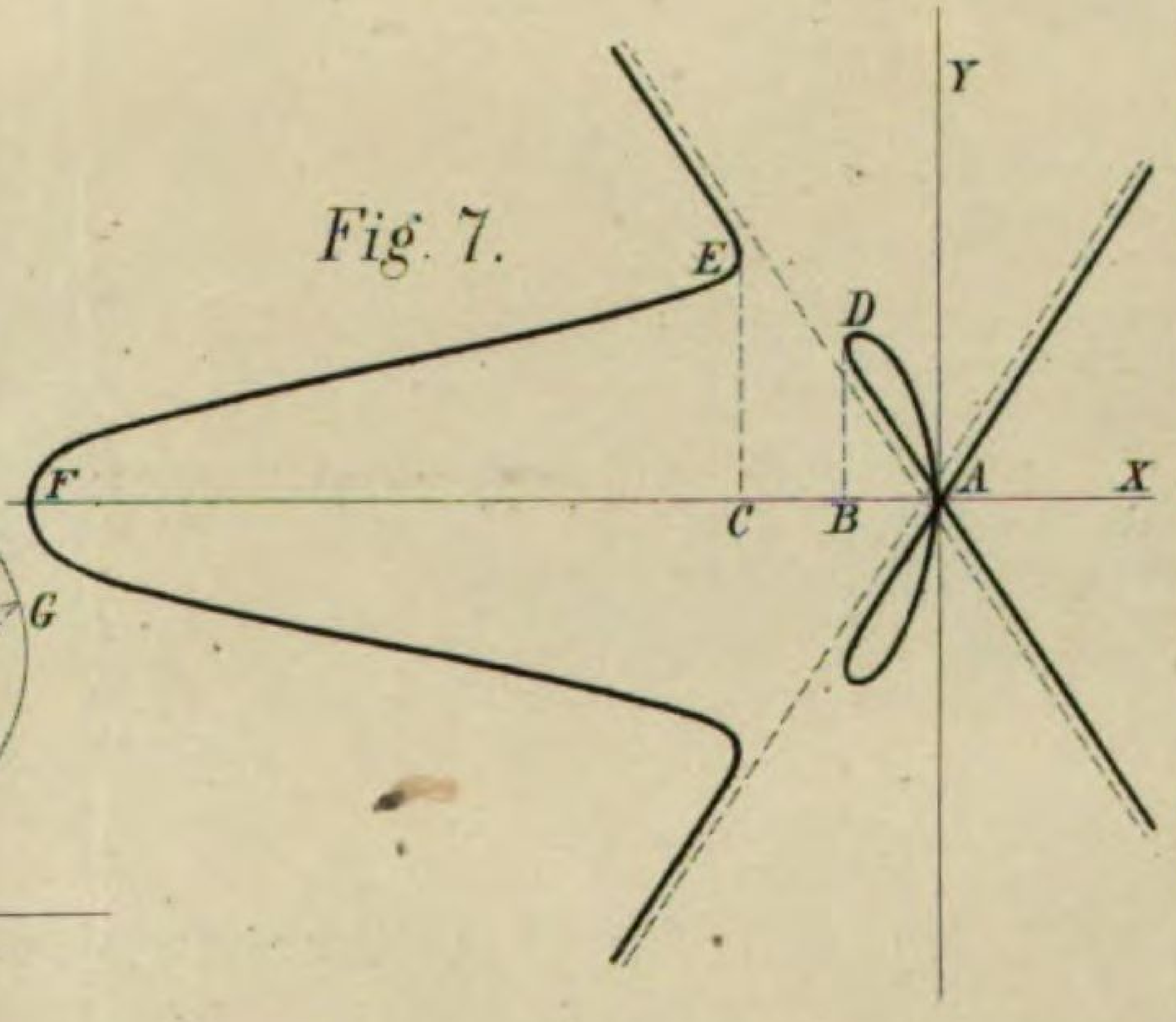


Fig. 7.

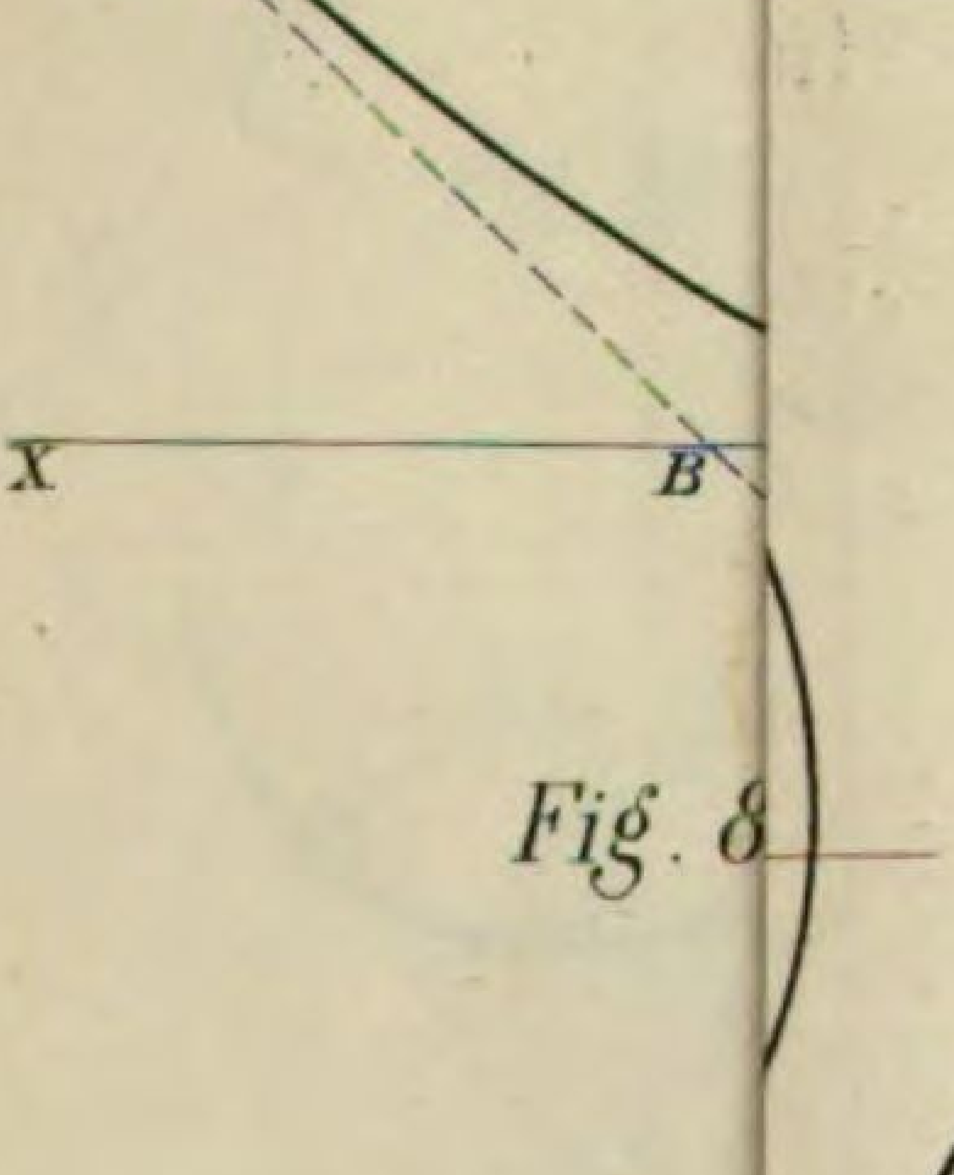


Fig. 8

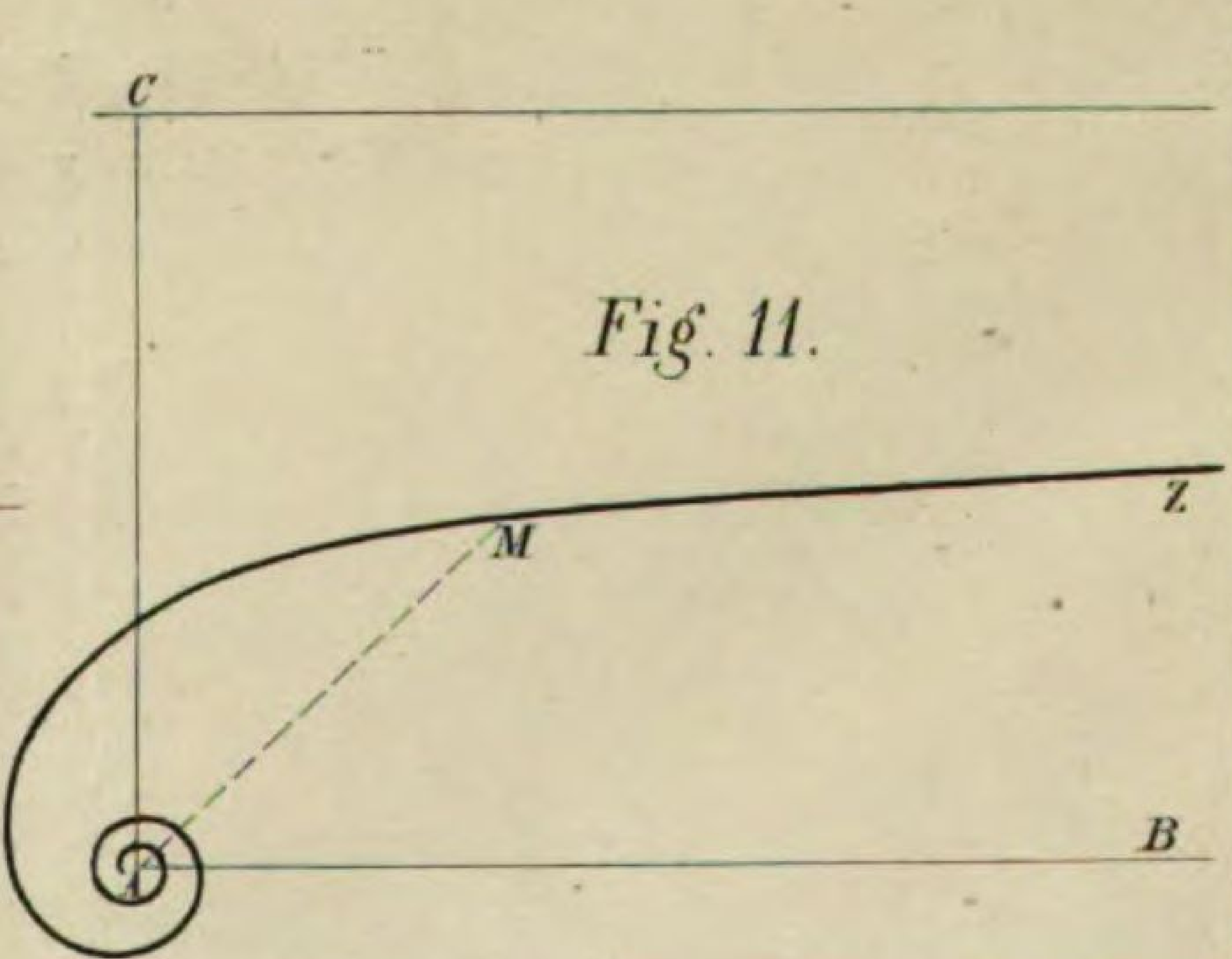


Fig. 11.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

A 4 38

II.

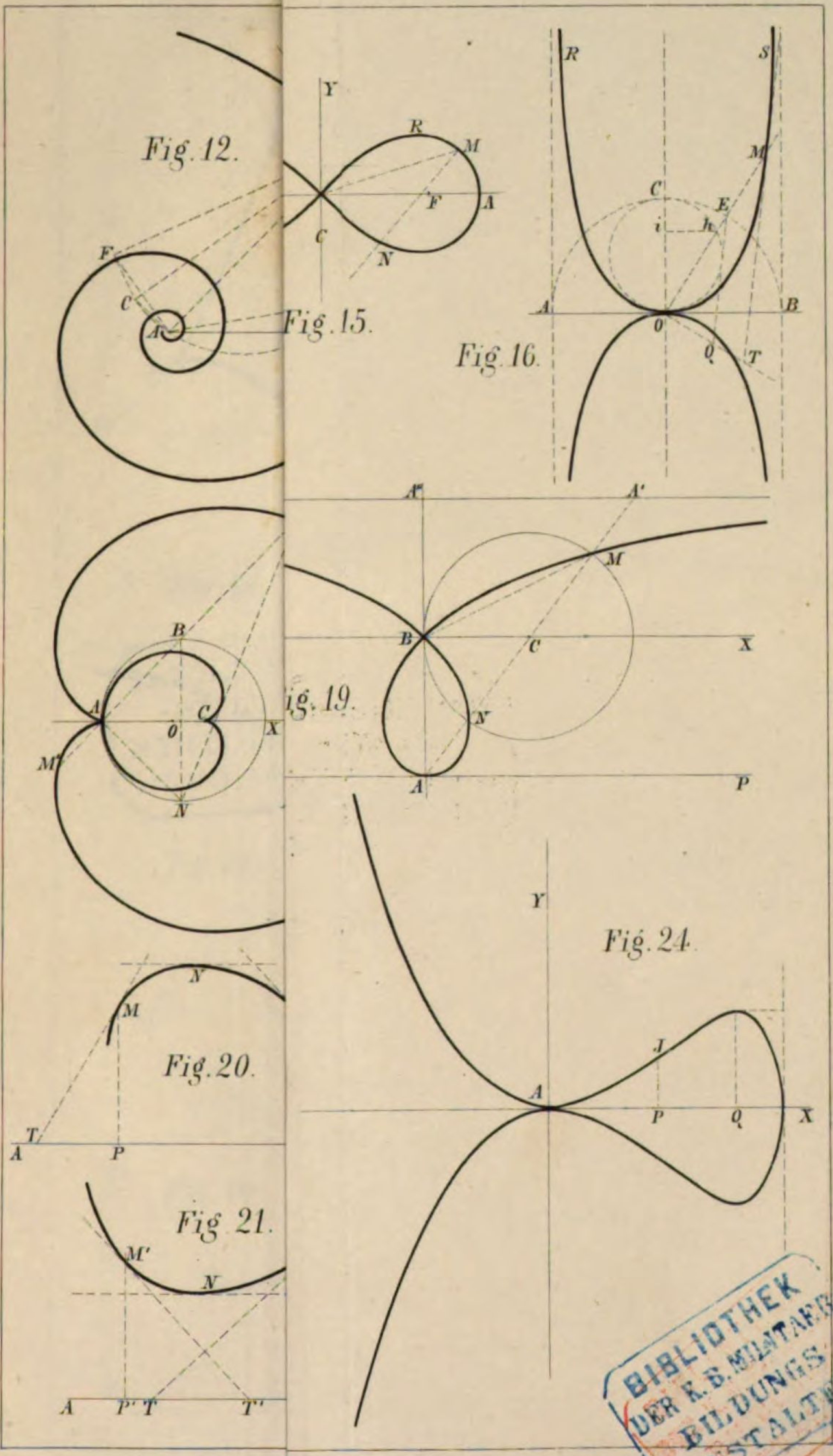



Fig. 12. Fig. 15. Fig. 16. Fig. 19. Fig. 20. Fig. 21. Fig. 24.

BIBLIOTHEK DER K. B. MILITAER-BILDUNGS-ANSTALTEN

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MÜENCHEN

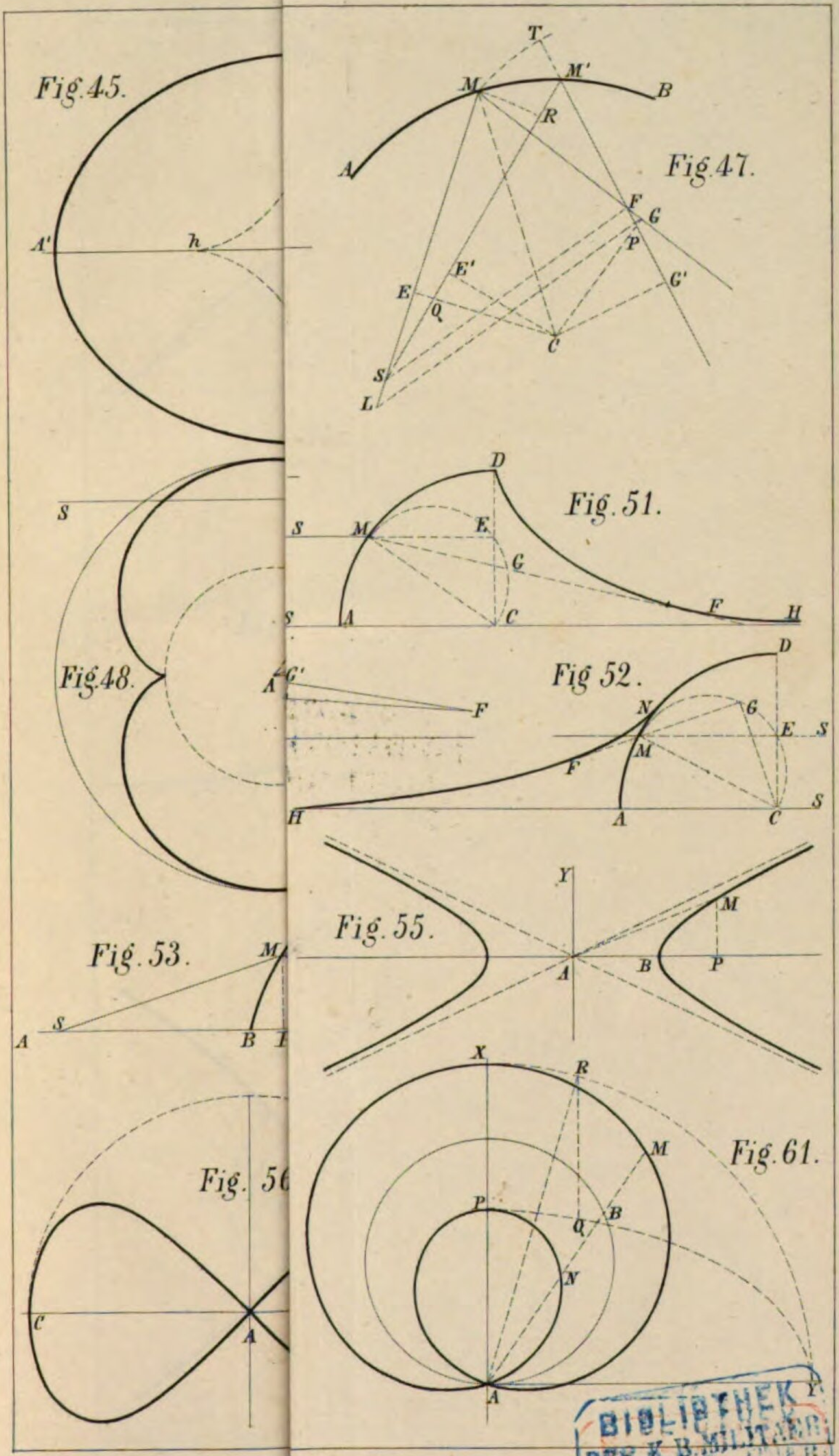
Aa 38



BIBLIOTHEK DER K. B. MILITAER BILDUNGS ANSTALTEN

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Aa 38



BIBLIOTHEK DER K. B. MILITAER BILDUNGS ANSTALTEN

Aa 38

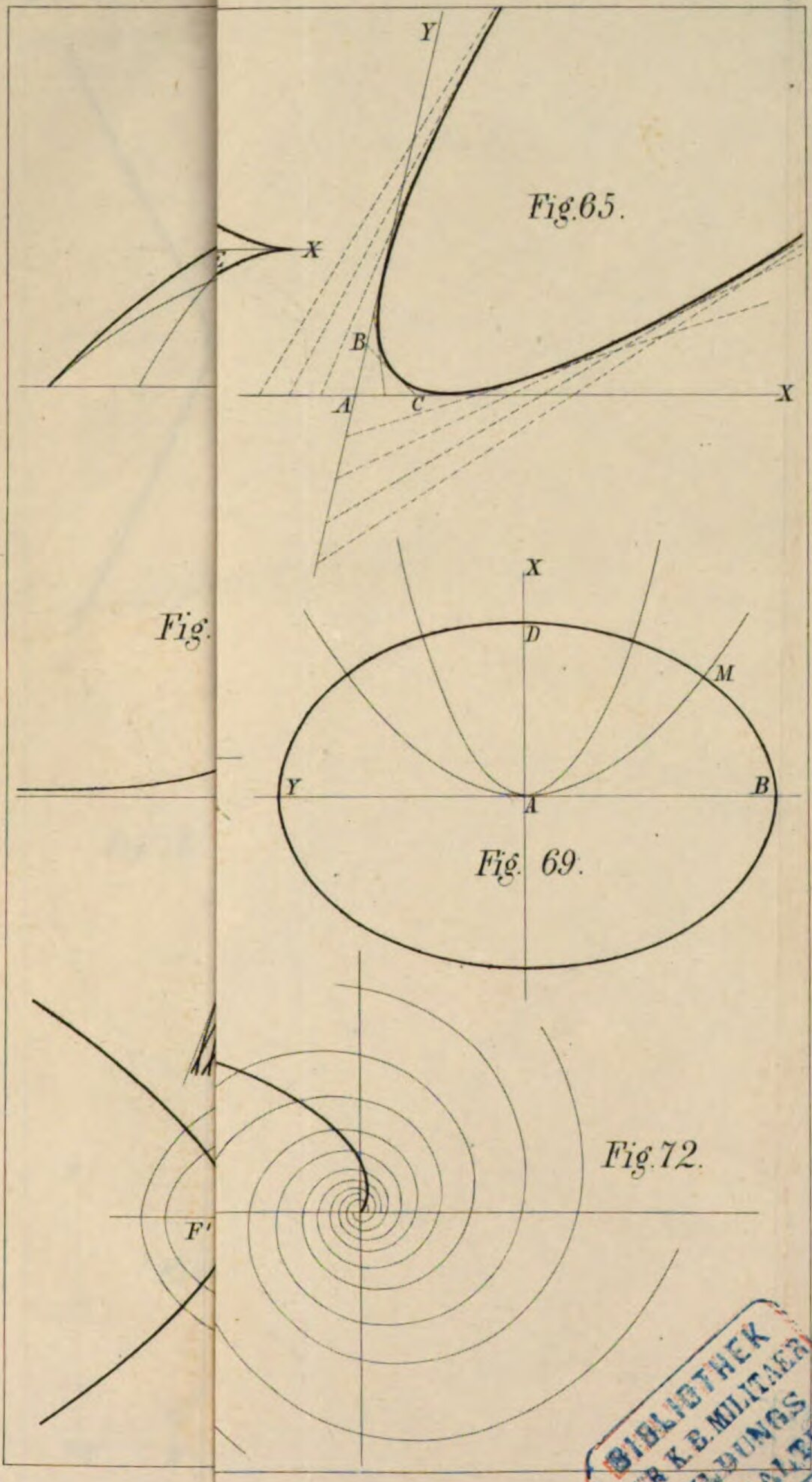


Fig. 65.

Fig.

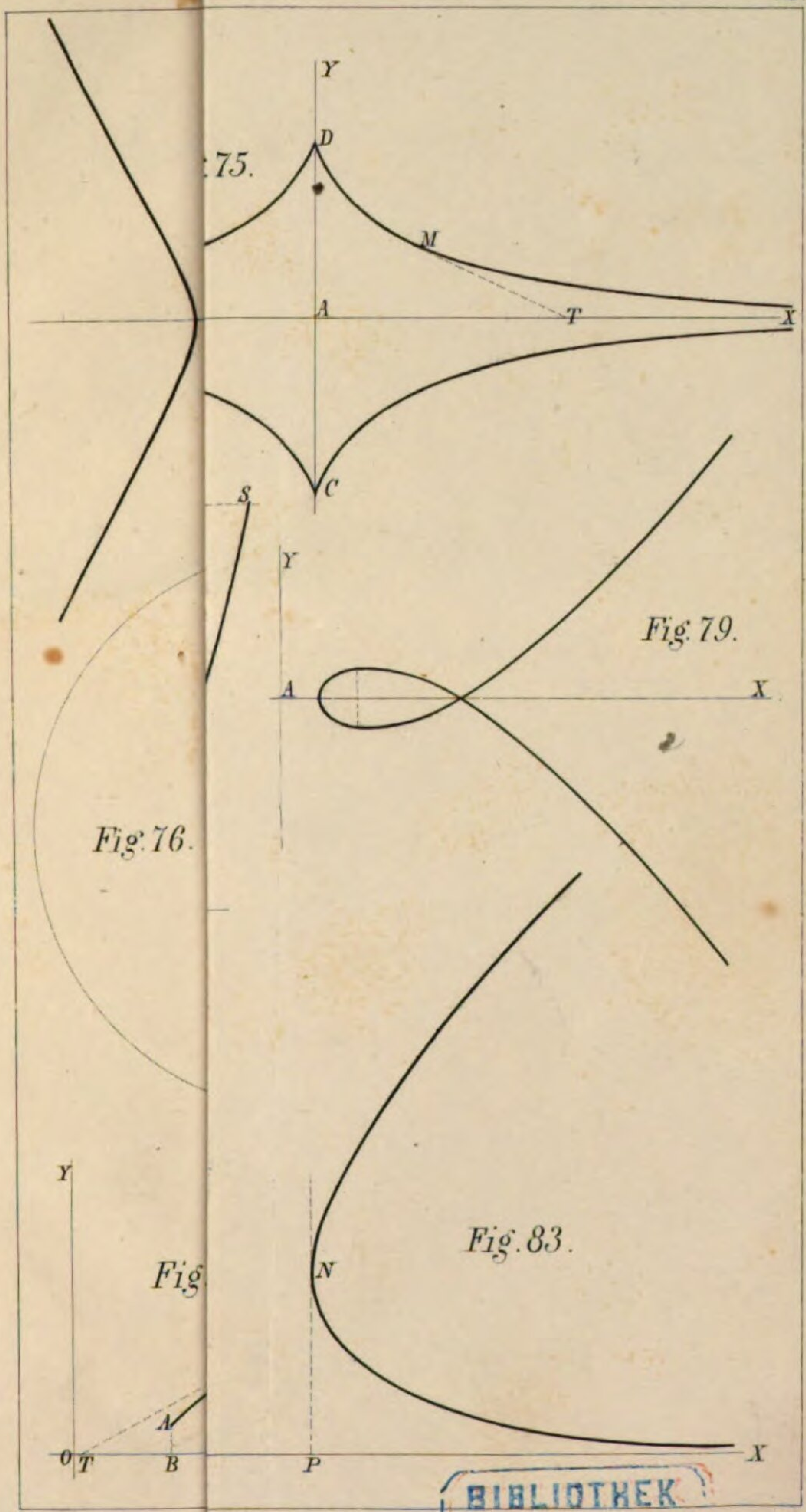
Fig. 69.

Fig. 72.

BIBLIOTHEK DER K. B. MILITAER BILDUNGS ANSTALTEN

Aa 38

VI.



:75.

Fig. 76.

Fig. 79.

Fig.

Fig. 83.

BIBLIOTHEK
DER K. B. MILITAER
BILDUNGS
ANSTALTEN

[illegible]

SWERK
aus
GSWERK
IINGEN

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Külp, Edmund

Die Differential- und Intergralrechnung und deren Anwendung auf die Geometrie in der Ebene Von Edmund Külp. Mit 6 lithographirten Tafeln

Darmstadt 1856

Math.p. 715 a
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083251-5